流形的拓扑学

苏竞存 著

本书主题是围绕流形的拓扑学介绍拓扑学与分析学的相互关系——指标定理。内容从微分流形的基本理论到深刻的 Riemann-Roch 定理、Atiyah-Singer 指标定理。



武汉大学学术丛书

WUHAN UNIVERSITY ACADEMIC LIBRARY 武汉大学出版社

流形的拓扑学

苏竞存　著

武汉大学出版社
199.

流形的拓扑学

苏竞存　著

*

武汉大学出版社出版
（430072 武昌 珞珈山）
新华书店湖北发行所发行
武汉市汉桥印刷厂印刷

*

850×1168　1/32　22.875 印张　插页 6　587 千字
1992 年 5 月第 1 版　　1996 年 3 月第 3 次印刷
印数：2001—3000
ISBN 7-307-01245-6/O・102
定价：23.80 元



苏竞存　1932 年出生。1955 年毕业于台湾大学物理系。后在台湾中央研究院数学研究所开始数学研究。1962 年在美国宾夕法尼亚州立大学师事著名数学家杨忠道，并得哲学博士学位。现任美国麻省州立大学数学系教授。1930 年在武汉大学讲学，并任客座教授。

内 容 简 介

拓扑学的方法与结果在各个数学分支中有广泛的应用，因此适当选择其中的内容供各个分支的研究者与教师之用是一个很重要的工作。本书作者以微分流形为中心写了这本书，涉及到拓扑学的广泛的领域并在分析数学、几何学乃至理论物理学中均可得到重要的应用。本书的主要内容是：微分流形、矢量丛、Stokes 定理、同调理论与上同调理论、Lie 群、纤维丛理论、示性类理论、表示论大意、Hodge 理论、Hirzebruch 指标定理、Riemann-Roch 定理、Atiyah-Singer 指标定理和 Gauss-Bonnet 定理等。它适合现代数学的许多分支以及理论物理的研究生、教师和研究工作者的需要。

序　言

1980 年秋，我应武汉大学数学系之邀讲授拓扑学。这本书即为该课之用。在写这本讲义时，我怀有几个目的。首先，我知道在中国找到参考书比较困难，所以我打算以这个讲义作为流形理论这个基本的一般科目的方便的参考。这样，尽管在这个科目上有众多极好的参考书，我想，把种种材料集中在一起也是不无助益的。结果，读者会看到这里的材料远远超过了一学期讲授之需。事实上，这讲义分为两部分，后一部分（从第十二章起）是在我访问结束后才写成的。其次，在我看来，拓扑学的许多入门书都是按所用的方法与工具来划分的，例如分为代数拓扑、微分拓扑和微分几何等等，我有一个想法，即拓扑学中有重要性的中心问题当然是流形问题，应该围绕着这个问题而不是围绕种种技巧来写一本讲义。这里所采用的计划就是如此。我们从光滑流形的基本概念讲起，进而讨论各种专题，那时需要什么工具就介绍什么工具。这样，我们从流形上的微积分开始，因为流形就是为了搞微积分而设计的。我们先讲导数的局部理论。然后积分理论就导致一些整体性的东西，例如 de Rham 定理。为了解释它，我们开始建造通常用到的同调与上同调工具，而最终以流形的同调理论的核心事实即 Poincaré 对偶性结束。虽然这些东西是真正基本的而且肯定是必不可少的，然而象许多入门书那样，要想讲清楚它，通常是费劲而头疼的事。我想，如果选用一个比较实质性的主题作为最终的目标，则读者不致陷入一大堆表面的知识而不知所终，这样在启发读者上可能是有好处的。虽然不乏值得选择的问题，我觉得 Atiyah-Singer 指标定理是一个好的主题。主要是因为我觉得它最好不过地说明了现代拓扑学对于微分方程的整体理论的用

处。这里还有一些个人的考虑。我的哥哥齐民友从事偏微分方程，而他也有兴趣来学习这些材料。当然，不是单单一本讲义就能充分地解释这个定理．但是这本讲义的第二部分收集了的材料，我觉得至少可以向读者说明指标定理讲的是什么。

所以大家看到，我认为我的主要职责是一个收集者，同时花一些力量去组织这些材料。在这样做的时候，我遵循一些以我个人的看法为基础的指导原则。首先，我觉得拓扑学应该是几何而我就强调这一方面。其次，我认为拓扑学的现代发展，特别是它对其它领域的推动，集中表现在整体方面．所以，只要有可能，我就力图指出这一点。此外，现代拓扑学的语言可以是很细致很抽象的。我试图把一般性和抽象性保持在最低限度，仅仅是适合当前问题之所需，而将种种可能的更一般的表述留待读者自学。再则，只要做得到，总是用一些例子来引导出对某种工具的需要。所有这一切，说起来当然比做起来容易，我只希望读者花时间和精力在这本讲义上之前，了解我打算做的是什么。

最后，应该感谢张敦穆先生，他仔细阅读了这本教材并且提了许多宝贵的建议。当然对这本讲义的缺点，欢迎读者指出，以便改进。

作　者

目　录

第一章　基本定义

§1. 定义和例

我们都知道，拓扑空间的提出是为了使我们能谈到定义其上的函数连续性，流形则是可以在其上作微积分的一个拓扑空间.

令 M 为一拓扑空间（为简单起见，以后凡谈到拓扑空间总是设它为Hausdorff 空间），$f: M \longrightarrow \mathbf{R}$ 为一实值函数，我们知道如何取导数，也知道求导是一件局部的事，所以第一个明显的条件应该是

(M_1)：每一点 $P \in M$ 都有一邻域 U 同胚于 $\mathbf{R}^n$ 的一个开子集.

令 $\varphi: U \longrightarrow \varphi(U)$ 是这种同胚之一（我们称 (U, φ) 为一个局部坐标）. 于是 $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \longrightarrow \mathbf{R}$ 成为定义在开集 $\varphi(U) \subset \mathbf{R}^n$ 上的函数而可以谈得上 $\tilde{f}$ 是否可微. 这显然依赖于局部坐标 φ. 若 ψ 是另一个局部坐标，$\tilde{f} = f \circ \psi^{-1}$ 可能不再可微了. 为了使得可微，需另加一个条件.

(M_2)：对任意两个局部坐标 (U, φ) 和 (V, ψ) 函数

$$\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

都是可微的.

因为 $\psi \circ \varphi^{-1}$ 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 的开集 $\varphi(U \cap V)$ 上而且在 $\mathbf{R}^n$ 中取值，所以这样说是有意义的. 这里讲的可微性指的是各阶偏导数都存在，即是说 $\psi \circ \varphi^{-1}$ 是属于 C^∞ 类的.

我们可以用不同的办法修改这相容性条件：

1) 如果只要求 $\psi \circ \varphi^{-1}$ 属于 C^k 类（即到 k 阶为止的偏导数存在且连续），就得到一个 C^k 类流形.

2) 特别是，C^0 意味着除（M_1）以外不再加其它条件，有时称它为拓扑流形，而与此对照，称 C^∞ 流形为微分流形.

3) 我们可以要求 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 是实解析的，即它局部地有幂级数展开式. 这就是 C^ω 流形，

4) 我们可以用 $\mathbf{C}^n$（n 维复空间）代替 $\mathbf{R}^n$，并要求 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 为复解析的（也称为全纯的），这样就得到一个 n 维复流形. 注意，它也是一个 $2n$ 维实流形.

今后我们主要讨论的是 C^∞ 流形. 但应该指出，C^0，C^∞ 和 C^ω 流形的理论差别很大. 后面我们可以看到其中的一部分.

总括起来说，流形是特别的一类拓扑空间. 它们是局部欧几里德的而又满足某些相容性条件. 这种空间在许多地方都会很自然地找到. 最普通的有：

1. n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 是一个 n 维流形.

2. n 维球面 $S^n=\{x\in\mathbf{R}^{n+1}\mid |x|=1\}$ 是一个 n 维流形. S^n 作为欧氏空间 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的子空间是一个拓扑流形（即局部欧），容易看出，相容性则要用球极投影计算，这也是标准的作法.

令 $P=(0,\cdots,0,1)$，$Q=(0,\cdots,0,-1)$ 是北极和南极. $U=S^n-\{P\}$，$V=S^n-\{Q\}$，取 $x\in U$，连接 x 和 P 的直线是 $y=\lambda x+(1-\lambda)P$. 当 $\lambda=1/(1-x_{n+1})$ 时，它和 $y_{n+1}=0$ 相交，定义

$$\varphi: U\longrightarrow\mathbf{R}^n=\{y\in\mathbf{R}^{n+1}\mid y_{n+1}=0\}$$

为

$$\varphi(x)=\frac{x}{1-x_{n+1}}-\frac{x_{n+1}}{1-x_{n+1}}P.$$

同样，利用 Q 可以作出 $\psi: V\longrightarrow\mathbf{R}^n$. 容易看到 $\varphi(U\cap V)=\mathbf{R}^n-\{0\}$，而且在 $\varphi(U\cap V)=\mathbf{R}^n-\{0\}$ 上 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 正是 $\psi\circ\varphi^{-1}(y)=y/|y|^2$，当 $y\neq0$ 时，它显然是 C^∞ 的.

3. 一个重要的例子是 n 维射影空间 $\mathbf{P}^n$. 有几种方法来描述它. 最直接的一种是：$\mathbf{P}^n$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中过原点之一切直线之集，即矢量空间 $\mathbf{R}^{n+1}$ 之一切一维子空间之集. $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的一条直线由基底矢量 $x\neq0$

决定，若 x 与 y 成比例，即有一个纯量 (scalar) $\lambda\neq0$ 使 $x=\lambda y$，则 x，y 将给出相同的直线，所以 $\mathbf{P}^n$ 也可以这样描述，在 $\mathbf{R}^{n+1}-\{0\}$ 中，关系 $x\sim y$ iff 有一纯量 $\lambda\neq0$ 使 $x=\lambda y$，这显然为一等价关系. $\mathbf{P}^n$ 就是商空间 $(\mathbf{R}^{n+1}-\{0\})/\sim$. 我们可以取 x，y 为单位矢量（即它们在 S^n 上）. 这时 $x\sim y$ iff $x=\pm y$，也

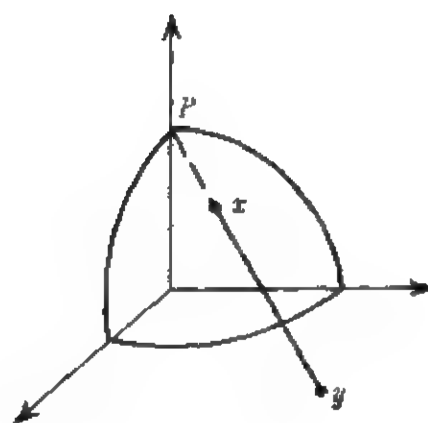


图 1—1

有 $\mathbf{P}^n=S^n/\sim$. 对于 $x=(x_0, x_1, \cdots, x_n)\in\mathbf{R}^{n+1}-\{0\}$，用 $[x]=[x_0, x_1, \cdots, x_n]$ 表示它在 $\mathbf{P}^n$ 中的等价类. 把 $\mathbf{P}^n$ 描述成商空间给了它一个拓扑，但它是否是流形还不清楚. 作法是：对每个整数 $i=0, 1, \cdots, n$. 定义

$$U_i=\{[x]=[x_0,x_1,\cdots,x_n]\in\mathbf{P}^n\,|\,x_i\neq0\}.$$

它是 $\mathbf{P}^n$ 中的一开集. 定义 $\varphi_i: U_i\longrightarrow\mathbf{R}^n$ 为

$$\varphi_i[x_0,x_1,\cdots,x_n]=(x_0/x_i,\cdots,\widehat{x_i/x_i},\cdots,x_n/x_i),$$

ˆ 表示这一项要除去（所以只留下 n 个坐标）. 这定义了局部坐标 (U_i, φ_i)，$i=0, 1, \cdots, n$. 若 $i\neq j$ 例如 $i<j$，容易算出

$$\begin{aligned}&\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}(y_1,y_2,\cdots,y_n)\\&=(y_1/y_j,\cdots,1/y_j,\cdots,\widehat{y_j/y_j},\cdots,y_n/y_j),\end{aligned}$$

$1/y_j$ 出现在第 $i+1$ 个位置上. 这是一个光滑映射，因为对于 $y\in\varphi_i(U_i\cap U_j)$，总有 $y_j\neq0$.

4. 上例的作法可以用于复空间 $\mathbf{C}^{n+1}$，得到的射影空间是 n 维复射影空间 $\mathbf{CP}^n$（所以例 3 是 n 维实射影空间，有时记作 $\mathbf{RP}^n$）. $\mathbf{CP}^n$ 是复流形之一例.

还有两个一般的作法.

5. n 维流形 M 的任一开子集 $U\subset M$ 若继承 M 的流形结构，则 U 本身也是一个 n 维流形，叫做 M 的开子流形（和以后要讨论的

闭子流形相对照）．下面是一个重要的例．

令 $M(n)$是一切 $n\times n$ 矩阵之集．很清楚，$M(n)$作为一个集和$\mathbf{R}^{n^2}$可以建立一一对应，并由例 1，可使 $M(n)$是一流形．令 $GL(n)\subset M(n)$是所有非异 $n\times n$ 矩阵之集．矩阵 A 非异 iff 其行列式 $\det(A)\neq 0$，因为 $\det(A)$显然是 A 的连续函数，故 $GL(n)\subset M(n)$是开的，$GL(n)$在矩阵乘法下又是一个群．这是 Lie 群的重要例子．

6．若 M 是一个 k 维流形，N 是一个 l 维流形，其积可以自然地做成一个 $k+l$ 维流形．只要在 M 和 N 中各取坐标（U，φ）和（V，ψ），就可以作出 $M\times N$ 的一个坐标为

$$U\times V\xrightarrow{\varphi\times\psi}\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^l=\mathbf{R}^{k+l}.$$

这些例子是否真正不同？从纯拓扑的观点看．流形是一个有很好的局部性质的拓扑空间，比如说，我们知道它是局部紧的，局部连通的等等．但这些性质不能把它们区分开来（说到底，所有的流形都有这样的性质）．要把它们区分开来，就要用整体性质．例如，$\mathbf{R}^n$ 和 S^n 不同，因为容易看到，一个是紧的，另一个不是．但是 S^n 和 $\mathbf{P}^n$（都紧）或 $\mathbf{R}^{n^2}$和 $GL(n)$（都不紧）又怎样呢？进一步观察，得到 S^2 和 $\mathbf{P}^2$ 是不一样的．S^2 只是一个球面，$\mathbf{P}^2$ 有一种描述：

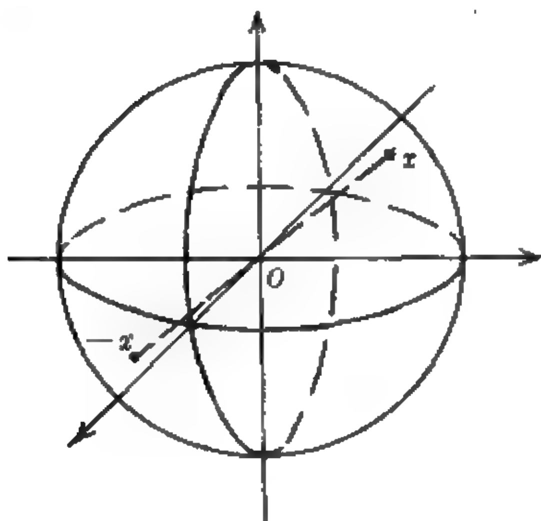


图 1—2

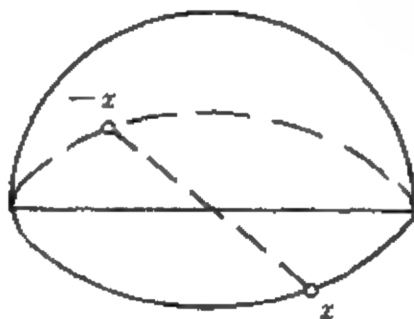


图 1—3

P^2 可以从 S^2 中将它的对径点 $x\in S^2$ 和 $-x$ 等同 (identify) 起来而得到. 所以如果取上半球的 x，就可以抛掉下半球的 $-x$. 但赤道上的点 x 必须要与 $-x$ 重合，如果真正想实现这样的重合，我们就会发现，我们不能想象出它. 这句话的意思是说，这种重合不可能在 R^3 中物理地实现（但是用理解力却很容易做到）也就是说 P^2 不能嵌入在 R^3 中，既然 S^2 显然地可以嵌入在 R^3 中，它就和 P^2 不一样了. 这并不是 S^2 和 P^2 不同胚的一个证明，只是一种可信的论证，它指出作为一个一般性的拓扑问题，不容易判断两个已给的空间同胚与否（用上面论证可以轻易地使你信服 P^1 和 S^1 是一样的）.

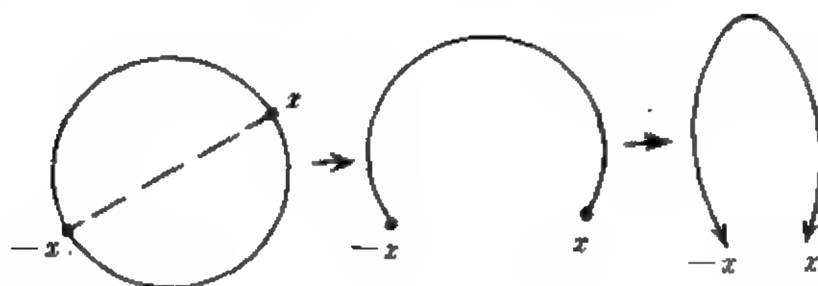


图 1—4

我们所需要的是拓扑空间的一些系统的整体不变量. 迄今为止，这一类不变量中最有用的是同调不变量，以后我们会用很多时间讨论它.

我们可以作一个局部的论断：不同维数的流形是不同的. 这是以下定理的推论.

定理（区域不变性） 若 $n\neq m$，R^n 的开集不能同胚于 R^m 中的开集.

这个定理虽然直观上很有道理，证起来并不容易. 我们在 $n=1$ 的特例下讨论它. 关键是下面的

引理 R^1 的开集 U 必是相互分离的开区间之并. 特别是，R^1 的连通开集 U 就是一个开区间.

若开集 $V\subset\mathbf{R}^m$ 同胚于开集 $W\subset\mathbf{R}^1$，我们可以取一个开的小圆盘（disk）$D^m\subset V$，由引理它必然同胚于 $\mathbf{R}^1$ 中一个开区间．这是不可能的，因为开区间在除去一点后是不连通的，但 D^m 当 $m>1$ 时却不如此．不变性定理的完整的证明正是基于连通性的概念，但却要以更细致得多的涉及同调的方式来陈述．

§ 2. 光滑函数与光滑映射

我们一开始就说过，光滑流形是这样的空间，在它上面可以讨论光滑函数．做法是很清楚的：令 M，N 是光滑流形，$f: M\longrightarrow N$．我们说 f 在 $P\in M$ 点邻近是光滑的，如果有 P 点附近的局部坐标(U,φ)和 $Q=f(P)$点附近的局部坐标（V，ψ）使映射 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 在 φ（P）邻近光滑．这是有意义的，因为我们谈的是欧氏空间之间的映射．相容性保证了这定义与所用的局部坐标无关．特别若是 $N=\mathbf{R}$，我们就不需要 ψ 而说有一个光滑函数 $f: M\longrightarrow\mathbf{R}$，$\tilde{f}=f\circ\varphi^{-1}$是 f 的一个局部表示．若$\{(U_i,\varphi_i)\}$是覆盖 M 的一族局部坐标，就有定义在 $\varphi_i(U_i)$上的局部表示 $\tilde{f}_i=f\circ\varphi_i^{-1}$．这些函数之间有以下关系

$$\tilde{f}_i=\tilde{f}_j\circ\varphi_{ji},$$

$\varphi_{ji}=\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i\cap U_j)\longrightarrow\varphi_j(U_i\cap U_j)$称为局部坐标的迁移函数(transition function)．反之，若函数 $\tilde{f}_i: \varphi_i(U_i)\longrightarrow\mathbf{R}$ 并使上述相容性条件成立，则定义在 U_i 上的局部函数 $\tilde{f}_i\circ\varphi_i$ 在 $U_i\cap U_j$ 上是相互协调的，从而定义了一个整体函数 f．整体的函数时常是这样从相容的局部的东西“粘”起来的．既然 $\tilde{f}_i$ 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 的子集φ_i（U_i）$\subset\mathbf{R}^n$ 上的，这就是经典的情况．但是，采用整体的观点能对问题得到更好的展望，举例如下：

复变函数论中经典的 Liouville 定理指出，在平面 $\mathbf{C}$ 上全纯而

且有界的函数必定是常数(想到代数学的基本定理可以由此推出，你们会同意这是一个重要的定理). 下面是经典的证法. 将 f 展开成幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n.$$

它在全平面上收敛. 取一个以 $z=0$ 为心，r 为半径的圆 R，有

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_R\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz.$$

若 $|f(z)|\leqslant M$，很容易估计出

$$|a_n|\leqslant\frac{M}{r^n}.$$

既然 r 是任意的，当 $n>1$ 时有 $a_n=0$，即 $f(z)=a_0$ 是常数.

我们要把 Liouville 定理解释为关于整体函数的一般事实. 首先回顾一下可去奇点.

引理 若 $g(z)$ 在原点的邻域 U 中全纯但原点除外(即在 $U-\{0\}$ 中全纯)而且当 $z\longrightarrow 0$ 时 $zg(z)\longrightarrow 0$，则 $g(z)$ 可拓展为 U 上的全纯函数.

证 拓展如下

$$g(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_R\frac{g(z)}{z}dz,$$

R 是围绕 0 的圆(例如参看 Ahlfors [1] p. 100，中译本 p. 122).

把 S^2 看成 Riemann 球：$\mathbf{C}\cup\{\infty\}$，它有局部坐标 (U_1,φ_1)，(U_2,φ_2)，其中 $U_1=\mathbf{C}$，$\varphi_1: U_1\longrightarrow\mathbf{C}$ 为恒等映射，$U_2=(\mathbf{C}-\{0\})\cup\{\infty\}$，$\varphi_2: U_2\longrightarrow\mathbf{C}$ 定义为

$$\varphi_2(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{z}, & z\in\mathbf{C}-\{0\},\\ 0, & z=\infty.\end{cases}$$

我们看到，在 $\varphi_1(U_1\cap U_2)=\mathbf{C}-\{0\}$ 上，迁移函数 $\varphi_{21}=\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}$ 正是

$$\varphi_{21}(z)=1/z,\quad z\in\mathbf{C}-\{0\}.$$

因为在 $\mathbf{C}-\{0\}$ 上 $z\neq 0$，φ_{21}是全纯的，这就使 S^2 成为一个复流形（Riemann 球）．

若 f 在全平面 $\mathbf{C}$ 上全纯，则它在 $\varphi_1(U_1)$上定义局部函数 f_1．利用相容性，在 $\varphi_2(U_1\cap U_2)=\mathbf{C}-\{0\}$上定义 f_2 为

$$f_2(z)=f_1\circ\varphi_{12}(z)=f(\frac{1}{z}).$$

因为 f 有界，所以条件

$$\lim_{z\to 0} zf_2(z)=0$$

显然成立．于是 f_2 可拓展到 $\varphi_2(U_2)$ 上．(f_1, f_2) 定义一个 S^2 上的整体全纯函数 $F: S^2\longrightarrow\mathbf{C}$.

然而紧复流形上的任意整体全纯函数必定是一常数．因为一方面这种函数之模必有最大值（紧性），另一方面，极值原理指出，任意的局部极大值都不可能存在．这个例也表明了全纯理论和光滑理论根本不同．在紧光滑流形上当然有许多非常值的整体光滑函数．

我们又看到，已给一个光滑流形 M，笛卡尔乘积 $M\times M$ 也可构成光滑流形．

定义 Lie 群 G 既是一个群，作为一个空间又是光滑流形．而且群运算

(G_1) $G\times G\longrightarrow G$，$(g_1, g_2)\longmapsto g_1g_2$，

(G_2) $G\longrightarrow G$，$g\longmapsto g^{-1}$

是光滑映射．

例如 $G=GL(n)$是一个 Lie 群，条件 (G_1) 可从熟知的矩阵乘法公式

$$(AB)_{ij}=\sum_k A_{ik}B_{kj}$$

得出，$(AB)_{ij}$是 A_{ik}和 B_{kj}的光滑函数．

现在我们可以形式地定义光滑流形的范畴：对光滑映射 $f: M\longrightarrow N$ 若有另一光滑映射 $g: N\longrightarrow M$ 使 $f\circ g=\mathrm{id}$ on N，$g\circ f=\mathrm{id}$

on M，则 f 称为微分同胚（diffeomorphism）．这就是光滑流形范畴中的同构（isomorphism）．类似地，也有拓扑范畴中的同构（即同胚），C^k 范畴，C^∞ 范畴等等都各有其同构．这些理论的最终目的是解决两个对象（object）同构与否．但是从很少的几个例子就已看到，目前这还只是一句空话，关于这一点，我们还得学习很多知识才能谈到一点实质性的东西．

最后还要提醒，到现在为止，我们只谈到可微性而没有谈到实际的导数．理由很简单，函数 f 的可微性与局部表示 $\tilde{f}=f\circ\varphi^{-1}$ 无关，其导数十分肯定不是这样．事实上，怎样内在地（intrinsically）定义导数要引到矢量丛（vector bundle）的概念．将在下一章里讨论它．

§3. 子流形和隐函数定理

若 $k<n$，我们可以把 $\mathbf{R}^k$ 嵌入 $\mathbf{R}^n$ 中，$\mathbf{R}^k\subset\mathbf{R}^n$，$(x_1, \cdots, x_k)\longmapsto(x_1, \cdots, x_k, 0, \cdots, 0)$．我们称它为“标准”嵌入（其实这里并没有什么真正标准的东西，这样说不过是为了固定一个说法），当我们说 $\mathbf{R}^k$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间时，总是指的这个意思．这就是子流形的局部图象．精确地说：

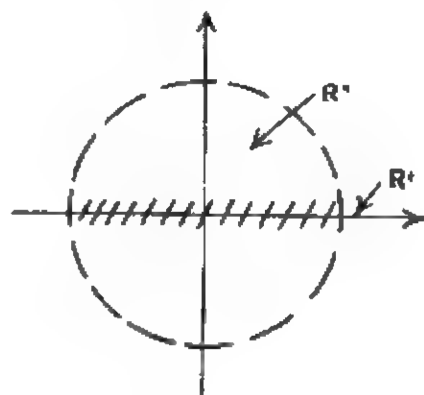


图 1—5

定义 令 M 为一 n 维流形，子集 $N\subset M$ 称为一个 k 维子流形，若对每一点 $P\in N$，都有一个 M 的局部坐标 (U, φ) 使 $\varphi(N\cap U)=\mathbf{R}^k\cap\varphi(U)$，$(N\cap U, \varphi|_{N\cap U})$ 为点 P 在 N 中的局部坐标，容易验证条件 (M_1) — (M_2) 成立：

注意，根据定义，子流形实际上是一个 k 维流形．

这个定义的几何内容虽然是完全清楚的，但用起来却非常不便．例如，我们不会反对说 S^2 是 $\mathbf{R}^3$ 的子流形．但是要形式地套定

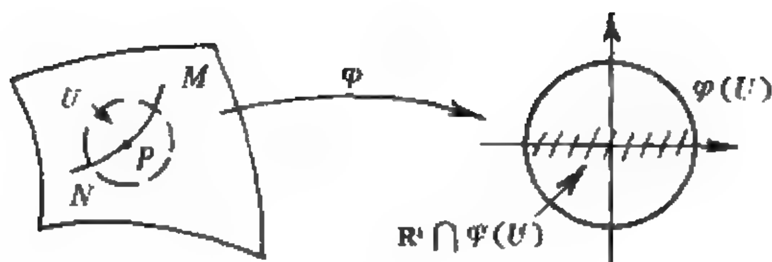


图 1—6

义，那就得去找把弯曲的面“展平”成“平坦”的面的局部坐标，这并不轻而易举．对付这一点的技术是古典的隐函数定理，介绍如下：

令 $U\subset\mathbf{R}^n$ 为开，$f: U\longrightarrow\mathbf{R}^m$ 为一光滑函数，$P_0\in U$ 为一点，已给矢量 $u\in\mathbf{R}^n$．f 在 P_0 点处 u 方向的方向导数定义为

$$df(P_0,u)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(P_0+tu)-f(P_0)}{t},$$

这里设极限存在．于是 $df(P_0,u)\in\mathbf{R}^m$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的一个矢量，即

$$df(P_0): \mathbf{R}^n\longrightarrow\mathbf{R}^m,\quad u\longmapsto df(P_0,u)$$

是一个映射，事实上它是一个线性映射，若取 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{R}^m$ 的“标准”基底 $\{e_i\}$，$i=1, 2, \cdots, n$；$\{d_j\}$，$j=1, 2, \cdots, m$，这里

$$e_i=\underbrace{(\overbrace{0,\cdots,1}^{i},\cdots,0)}_{n},\quad d_j=\underbrace{(\overbrace{0,\cdots,1}^{j},\cdots,0)}_{m}.$$

$df(P_0)$对于这些基底的矩阵由偏导数 $\partial f_j/\partial x_i(P_0)$组成．若记由 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 之一切线性映射的集为 $L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$，则有映射

$$df: U\longrightarrow L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)\simeq\mathbf{R}^{mn},$$

$$P_0\longmapsto df(P_0)$$

即一阶导数，因为 $L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$是一个($mn$ 维)线性空间，就可以谈得上它的导函数，并且重复作下去(每一次都得到一个新的空间)．这就是多变量矢量值函数的微分学的与坐标无关(coordinate free)的处理方法（参看 J. Dieudonné [3]）．

现在我们可以陈述

反函数定理 令 $U\subset\mathbf{R}^n$ 为开，$f: U\longrightarrow\mathbf{R}^n$ 为光滑映射，点 $P_0\in U$，若 $df(P_0)$非异，则 f 必是 P_0 之某个邻域到 $f(P_0)$之某个邻域上的微分同胚，反之亦然.

这个定理有许多证明，在本章之末我们将给出 Milnor [5] 的一个极好的证明. 现在先给出一些推论.

单射 (injection) 引理 令 $U\subset\mathbf{R}^n$ 是原点的邻域，$f: U\longrightarrow\mathbf{R}^p$ 是光滑映射且 $f(0)=0$，若 $n\leqslant p$，且 $df(0)$是单射，则必有由 $0\in\mathbf{R}^p$ 的某邻域到其另一邻域上的微分同胚 g，$g(0)=0$，使

$$g\circ f(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_n,0,\cdots,0)$$

成为标准嵌入 $\mathbf{R}^n\subset\mathbf{R}^p$，即有局部微分同胚 g 能把象 $f(U)$"展平".

证 不妨设矩阵$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1\leqslant j\leqslant n}^{1\leqslant i\leqslant n}$非异，定义 $F: U\times\mathbf{R}^{p-n}\longrightarrow\mathbf{R}^p$ 为

$$F(x_1,\cdots,x_p)=f(x_1,\cdots,x_n)+(0,\cdots,0,x_{n+1},\cdots,x_p).$$

容易看到 $dF(0)$非异，从而 F 有局部逆 g，但

$$\begin{aligned}g\circ f(x_1,\cdots,x_n)&=g\circ F(x_1,\cdots,x_n,0,\cdots,0)\\&=(x_1,\cdots,x_n,0,\cdots,0).\end{aligned}$$

投影定理 令 $U\subset\mathbf{R}^n$ 为原点的邻域，$f: U\longrightarrow\mathbf{R}^p$ 是一光滑映射且 $f(0)=0$，若 $n\geqslant p$，$df(0)$是全射(surjective)，则必有由 $0\in\mathbf{R}^n$ 的某邻域到另一邻域上的微分同胚 h，$h(0)=0$，使得

$$f\circ h(x_1,\cdots,x_n)=(x_{n-p+1},\cdots,x_n).$$

证 在 0 点，矩阵 $(\partial f_i/\partial x_j)$ 之秩为 p，因此可以假设子矩阵 $(\partial f_i/\partial x_j)$，$i=1,\cdots,p$；$j=n-p+1,\cdots,n$ 为非异，定义 $F: U\longrightarrow\mathbf{R}^n$ 如下

$$F(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_{n-p},f_1(x),\cdots,f_p(x)).$$

容易看到 $dF(0)$非异，于是 F 有局部逆 h，令 $g: \mathbf{R}^n\longrightarrow\mathbf{R}^p$ 为投影到后 p 个坐标，则 $f=g\circ F$，从而

$$\begin{aligned}f\circ h(x_1,\cdots,x_n)&=g\circ F\circ h(x_1,\cdots,x_n)\\&=g(x_1,\cdots,x_n)=(x_{n-p+1},\cdots,x_n).\end{aligned}$$

令 $f: M\longrightarrow N$ 为一光滑映射，$P_0\in M$ 为一点；(U_1,φ_1)，$(U_2,$

φ_2）为 P_0 处的局部坐标，(V_1, ψ_1)，(V_2, ψ_2) 为 $f(P_0)$ 处的局部坐标，f 有两个局部表示 $f_1=\psi_1\circ f\circ\varphi_1^{-1}$ 和 $f_2=\psi_2\circ f\circ\varphi_2^{-1}$ 而且 $f_2=\psi_{21}\circ f_1\circ\varphi_{12}$，由链法则，有

$$df_2(\varphi_2(P_0)) = d\psi_{21}(Q_0)\circ df_1(\varphi_1(P_0))\circ d\varphi_{12}(\varphi_2(P_0)),$$

$Q_0=f_1\circ\varphi_1(P_0)$. 因为 φ_{12},ψ_{21} 都是微分同胚，而 $df_1(\varphi_1(P_0))$ 又是有意义的，我们可以用它的秩作为 $df(P_0)$ 之秩.

投影定理明显地蕴涵着

子流形判据 令 M 为一 n 维流形，$N\subset M$ 是它的一个子集. 于是 N 是 k 维子流形 iff 任一点 $P\in N$，都有在 M 中的一个邻域 U 以及一光滑映射 $f: U\longrightarrow\mathbf{R}^{n-k}$ 使 rank $df(P)=n-k$ 而且 $N\cap U=f^{-1}(0)$，即 N 局部地是由一映射 f 构成的轨迹 $f=0$，f 要适合适当的秩条件. 特别是，若 $n-k=1$，N 就是一个超曲面(hypersurface).

例如，$S^n\subset\mathbf{R}^{n+1}$ 是由方程 $x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2-1=0$ 所定义的超曲面. 此后我们再不必操心去展平球面了.

反函数的另一个推论是

微分同胚判据 若 $f: M\longrightarrow N$ 是同维微分流形之间的光滑映射，而且是 1-1 的"映上"，又处处有最大秩，则 f 是微分同胚.

关于子流形我们再作一个说明. 令 $N^k\subset M^n$ 是一个 n 维流形的 k 维子流形，注意，$k=n$ 的情况就是开子流形的概念，这里 N 真正是 M 的开子集. 在一般情况下，定义中没有说明 N 是开是闭. 但是由定义确实可知 N 为局部闭，即对已给的 $P\in N$ 有 P 在 M 中的邻域 U 使 $N\cap U$ 在 U 中为闭. 一个局部闭集不一定为开或闭. 例如 $\mathbf{R}^2$ 中的开区间是局部闭的但非开、非闭子流形. 然而在大多数例子中闭子流形是最有用的.

例 设 $GL(n)$ 是 $n\times n$ 非异矩阵的 Lie 群. $GL(n)$ 中有正交矩阵群

$$O(n) = \{A\in GL(n)\,|\,AA^t = I\},$$

A^t 表 A 之转置. $O(n)$ 是 $GL(n)$ 的闭子群，试证：$O(n)\subset GL(n)$ 是 $n(n-1)/2$ 维子流形.

证 在所有 $n\times n$ 矩阵的矢量空间 $M(n)$ 中引入范数

$$|A| = (\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^p)^{1/p} \qquad (p = 1,2).$$

于是 $M(n)$ 成为一个 Banach 代数.

对已给的 $A\in M(n)$，定义

$$\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

是有意义的. 因为右方的级数收敛. 若 A，B 可换，则

$$(A+B)^k = \sum_l \binom{k}{l} A^l B^{k-l}.$$

而且经过标准的计算有

$$\exp(A+B) = \exp A \cdot \exp B.$$

特别是可取 $B=-A$，而得

$$I = \exp A \cdot \exp(-A),$$

即 $\exp A\in GL(n)$. 这意味着得到一个映射

$$\exp : M(n) \longrightarrow GL(n).$$

计算 $d(\exp)(0)$，由定义

$$d\exp(0,A) = \lim_{t\to 0}[\exp(tA) - \exp(0)]/t$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k A^k}{k!} = A,$$

即 $d(\exp)(0)=I$. 所以 exp 是一个局部微分同胚而将 $0\in M(n)$ 映到 $I\in GL(n)$，所以可以用它(或宁可说用其逆)为 $I\in GL(n)$ 点附近的局部坐标.

显然 $(\exp A)^t=\exp A^t$，令

$$SK(n) = \{A \in M(n) \mid A + A^t = 0\}.$$

显然 $SK(n)\subset M(n)$ 是 $(1/2)n(n-1)$ 维子空间. 若 $A\in SK(n)$，则 A 与 A^t 可换，于是

$$(\exp A)(\exp A)^t = \exp A \cdot \exp(A^t)$$

$$= \exp(A + A^t) = I,$$

即 $\exp(SK(n))\subset O(n)$. 我们要证明在 $0\in M(n)$ 附近映射 exp 是"映上". 这表明 $O(n)$ 是平坦的子空间 $SK(n)\subset M(n)$ 在局部坐标 exp 下的象. 可惜的是, 因为 A 与 A^t 一般不可换, 上式不能反转, 所以要稍为改变其形式来讨论(见 Chevalley[2], Chap. 1. Prop. 2).

因为 $\exp: M(n)\longrightarrow GL(n)$ 使 $d\exp(0)$ 为非异, 故它将 $0\in M(n)$ 的一个邻域 U 同胚地映到 $I\in GL(n)$ 的一个邻域 W 上.

在 $M(n)$ 中, 函数

$$A\longrightarrow A^t \text{ 与 } A\longrightarrow -A$$

在 0 处都是连续的. 所以我们可以取 0 的一个较小的邻域 $V\subset U$ 使得

$$A\in V\Rightarrow A^t,\ -A\in U.$$

令 $\widetilde{W}=\exp V$, 若 $B\in\widetilde{W}\cap O(n)$, 则必有 $A\in V$ 使 $B=\exp A$, 方程 $B^t=B^{-1}$ 意味着

$$\exp(A^t)=\exp(-A).$$

因为 $A^t, -A\in U$ 而且 exp 又是 1-1 的, 所以

$$A+A^t=0.$$

§ 4. 技术性的问题

1. **反函数定理的证明** 通过平移和一个非异线性变换, 可以设 $P_0=f(P_0)=0, df(P_0)=\mathrm{id}$. 由中值定理($f(x)-f(y)=df(z)(x-y)$, 其中 $z=tx+(1-t)y, 0\leqslant t\leqslant 1$), 若 $|df|\leqslant M$, 有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|.$$

令 $g(x)=f(x)-x$ 于是 $dg(0)=0$, 因此可以找到一个 $r>0$. 使得当 $x\in B(r)=\{x\mid |x|<r\}$ 时 $|dg(x)|<1/2$. 我们指出

$$f: B(r)\cap f^{-1}(B(r/2))\longrightarrow B(r/2)$$

是一个全单射(bijection). 设已给 $y\in B(r/2)$, 依次令

$$x_0=0,\ x_1=y,\ \cdots,\ x_{n+1}=y-g(x_n).$$

很容易看到 $|x_n|<r$ 对一切 n 成立, 即

$$x_n - x_{n+1} = g(x_n) - g(x_{n-1}).$$

所以

$$|x_n - x_{n+1}| = |g(x_{n-1}) - g(x_n)| \leqslant \frac{1}{2}|x_{n-1} - x_n|.$$

换言之，$\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列，令 $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$，显然 $x \in B(r)$，而且

$$x = y - g(x) \quad 或 \quad y = f(x).$$

这个解是唯一的，因为若 $f(x) = f(x_1) = y$ 而且 $x, x_1 \in B(r)$，则 $g(x) - g(x_1) = x - x_1$，这是不可能的. 因为 $|g(x) - g(x_1)| \leqslant (1/2)|x - x_1|$ in $B(r)$.

令 $k: B(r/2) \longrightarrow B(r)$ 是 f 之逆，有

$$f(x) = f(x_1) + df(x_1)(x - x_1) + h(x, x_1),$$

其中当 $x \longrightarrow x_1$ 时 $h(x, x_1)/|x - x_1| \longrightarrow 0$. 令 $A = df(x_1)^{-1}$，于是

$$A(f(x) - f(x_1)) = x - x_1 + Ah(x, x_1).$$

记 $y = f(x)$, $y_1 = f(x_1)$, $h_1(y, y_1) = -h(k(y), k(y_1))$，上述方程可以写为

$$A(y - y_1) + Ah_1(y, y_1) = k(y) - k(y_1).$$

但

$$\frac{h_1(y, y_1)}{|y - y_1|} = -\frac{h(x, x_1)}{|x - x_1|} \cdot \frac{|x - x_1|}{|y - y_1|},$$

且 $|x - x_1|/|y - y_1| \leqslant 2$，所以当 $|y - y_1| \longrightarrow 0$ 时

$$h_1(y, y_1)/|y - y_1| \longrightarrow 0.$$

由定义 $A = dk(y_1)$，这说明当 f 为 C^1 时 k 也为 C^1. 重复这个论证知 k 是光滑的.

2. 微分构造 当我们用一族相容的局部坐标 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\} = \mathscr{U}$ 描述光滑流形 M 时，并没有什么特殊典则的 $\mathscr{U}$. 很可能用另一族坐标 $\mathscr{V} = \{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}$ 来覆盖 M，这就产生了 $\mathscr{U}$ 与 $\mathscr{V}$ 是否定义"同一个"流形的问题. 在 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{V}$ 之内，这个问题是简单的，因为由一个坐标转换到另一个坐标是光滑的，如果在合并后得到的坐标系 $\mathscr{U} \cup \mathscr{V}$ 中仍是这样，即若 $\mathscr{U}$ 中每个 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 和 $\mathscr{V}$

中每个 $(V_\alpha, \varphi_\alpha)$ 都相容的话，我们说 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{V}$ 是定义同样的东西。从形式上看，$\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{V}$ 之间的这种相容性是一个等价关系（极易验证）。而我们定义一个光滑构造（smooth structure）即一个局部坐标系的等价类 $[\mathscr{U}]$。$\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{V}$ 等价的另一个说法是：恒等映射 id：$(M, \mathscr{U}) \longrightarrow (M, \mathscr{V})$ 为微分同胚。我们已在几个例子中隐含地看到了这一点。例如，我们用了三种方法描述二维球面 S^2：用球极射影直接给出局部坐标；使方程 $|x|^2=1$ 成为 $\mathbf{R}^3$ 的子流形以及给它一个复构造（Riemann 球）。这些都是等价的光滑构造。

不等价的坐标系也很容易做出一些来。例如在直线 $\mathbf{R}$ 上，$\mathscr{U} = (\mathbf{R}, \mathrm{id})$ 和 $\mathscr{V} = (\mathbf{R}, \varphi)$，$\varphi(x)=x^3$ 就不等价。但是 $(\mathbf{R}, [\mathscr{U}])$ 和 $(\mathbf{R}, [\mathscr{V}])$ 却是微分同胚的，下面的映射

$$(\mathbf{R},[\mathscr{U}]) \xrightarrow{\psi} (\mathbf{R},[\mathscr{V}]), \quad x \longmapsto x^{1/3}$$

就是微分同胚（$\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{V}$ 是不等价的，因为 id 不是微分同胚，但 $(\mathbf{R}, [\mathscr{U}])$ 和 $(\mathbf{R}, [\mathscr{V}])$ 是微分同胚的，因为 ψ 是微分同胚）。所以真正的问题是找出不微分同胚的 $(M, [\mathscr{U}])$ 和 $(M, [\mathscr{V}])$，即是说，不仅恒等映射不是微分同胚，而且任何光滑映射也不能是微分同胚。没有什么预先就有的理由说找不到不同的构造。但是真正做出一个来却极为困难。拓扑学近年来的一大成就是 Kervair-Milnor-Smale 的工作 [6]，[7]。它指出在高维球面上确有不同的光滑构造。又有一些限制很严的例子。例如，Lie 群上只能有一个光滑构造（见 Chevalley [2]，第 4 章定理 3）。更进一步还可在其它范畴里提同样的问题。例如，是否所有复结构都是光滑地相同的？答案是肯定的，事实上，这是一个古典的著名的结果，而且在深度上和光滑的情况不能比拟。适当的看法是，复结构是很坚固而且限制极严的，所以很容易把它们区别开来。另一方面，光滑结构要活动得多，很不容易固定下来。

3. **复环面**（complex tori）　我们现在在环面 $S^1 \times S^1$ 上给出不同的复结构。令 $\mathbf{C}$ 为复平面，(w_1, w_2) 是它对于实数域 $\mathbf{R}$ 的基底。

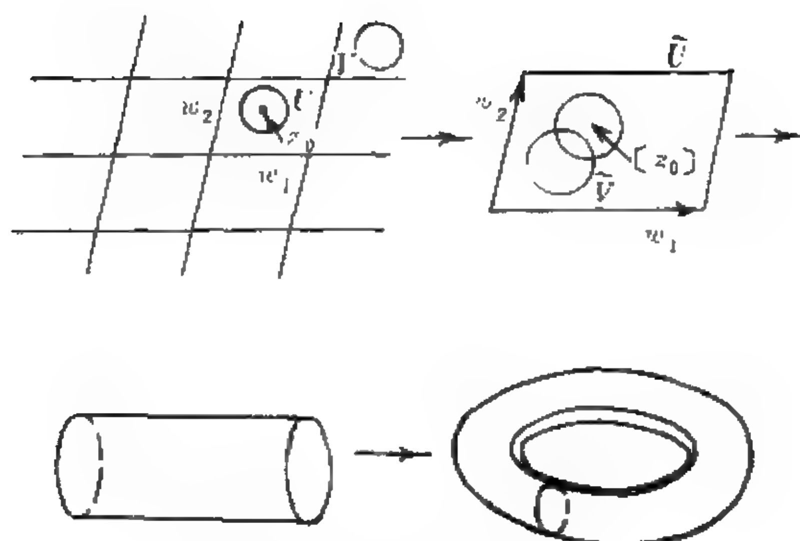


图 1—7

由 (w_1, w_2) 作出的格点成一个加群

$$\Gamma = \{n_1w_1 + n_2w_2 | n_1, n_2 \text{ 为整数}\}.$$

关系 $z_1 \sim z_2$ iff $z_2 = z_1 + r, r \in \Gamma$ 显然是一等价关系，令 $T(\Gamma) = \mathbf{C}/\Gamma$ 为商空间，$\pi: \mathbf{C} \longrightarrow T(\Gamma)$ 为自然投影. 给出一点 $[z_0] \in T(\Gamma)$，显然可以找到 z_0 之小邻域 U 使 U 中任一对点不等价. 于是 $\tilde{U} = \pi(U)$ 是 $T(\Gamma)$ 之开集，且 $\pi_U: U \longrightarrow \tilde{U}$ 为同胚. 所以可以用 $(\tilde{U}, \pi_{\tilde{U}}^{-1})$ 作为局部坐标. 若 $(\tilde{V}, \pi_{\tilde{V}}^{-1})$ 是另一个局部坐标，存在一个 $r \in \Gamma$ 使

$$\pi_{\tilde{V}}^{-1}\pi_U(z) = z + r.$$

这是平移显然也是全纯的，于是 $T(\Gamma)$ 有一个复结构. 定义

$$g: \mathbf{C} \longrightarrow S^1 \times S^1,$$

$$\lambda_1w_1 + \lambda_2w_2 \longmapsto (e^{2\pi i\lambda_1}, e^{2\pi i\lambda_2}).$$

g 与等价关系是相容的，而诱导出一个单全射 $\tilde{g}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \xrightarrow{g} & S^1 \times S^1 \\ & {\scriptstyle\pi}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle\tilde{g}} & \\ & T(\Gamma) & \end{array}$$

$\tilde{g}$ 显然是一个微分同胚，于是作为一个实光滑流形，

$$T(\Gamma) = S^1 \times S^1.$$

令 $\Gamma' = (w_1', w_2')$ 是另一个格子并设 $\tilde{f}: T(\Gamma) \longrightarrow T(\Gamma')$ 是一个复同胚（即 $\tilde{f}$ 是全纯的且有全纯逆），不难证明 $\tilde{f}$ 可以提升(lift)

为映射 $\tilde{f}: T(\Gamma) \longrightarrow T(\Gamma')$ 为映射 $f: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$，使

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \xrightarrow{f} & \mathbf{C} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ T(\Gamma) & \xrightarrow{\tilde{f}} & T(\Gamma') \end{array}$$

为可换的.

现在讨论如下的问题：格 $\Gamma=(w_1,w_2)$ 和格 $\Gamma'=(w_1',w_2')$ 何时定义同一个复环面，亦即，什么情况 $T(\Gamma)$ 和 $T(\Gamma')$ 作为复流形是同构的. 首先作某些一般的考察.

若 $f: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ 是一个同关系 Γ 与 Γ' 相容的函数，即 $z-z_1 \in \Gamma \Rightarrow f(z)-f(z_1) \in \Gamma'$，则 f 诱导一个映射 $\tilde{f}: T(\Gamma) \longrightarrow T(\Gamma')$. 事实上，它的逆也是正确的，但我们现在不证明它. 这样我们就能够在 $\mathbf{C}$ 和 $T(\Gamma)$ 之间进行变换. 显然 $\tilde{f}$ 是连续的、光滑的或全纯的充要条件为 f 也具有相应的性质.

根据上述考察作一些简化. 设 $\Gamma=(w_1,w_2)$ 为一个格，因为 w_1，w_2 是非零的，用 w_1 去除它得到一个新的格 $\Gamma'=(1,w_2/w_1)$. 显然 $f(z)=z/w_1$ 为一同 Γ 与 Γ' 相容的全纯函数，因此不妨害一般性，可设 Γ 有如下形式：$(1,\tau)$. 由于 w_1/w_2 和 w_2/w_1 互为倒数，它们之一必定落在上半平面，因此，设 $\Gamma=(1,\tau)$，且 τ 在上半平面，即 $\operatorname{Im}\tau>0$（$\operatorname{Im}\tau$ 不能等于零）. 因此，所有的格均可由开的上半平面的点来表示. 但并不是它们全都定义了不同的环面. 设 $\Gamma=(1,\tau)$ 和 $\Gamma'=(1,\tau')$ 决定了同一个环面. 按前述考察，存在一个同 Γ 与 Γ' 相容的全纯函数 $f: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$. 定义在全平面上的全纯函数称为整函数并且它们为数甚多，例如 $f(z)=e^z$. 然而 f 还必须同 Γ 与 Γ' 相容，这就在 f 上加了下述极为严格的限制. 设 $z-z_1 \in \Gamma$，则存在整数 n,m 使

$$f(z)-f(z_1)=n+m\tau'.$$

由于 f 连续而 Γ' 离散，故当稍许改变 z 和 z_1 时，整数 n,m 必定保持不变，亦即

$$f(z+h)-f(z_1+h)=n+m\tau'.$$

对小的 h 成立. 这显然蕴涵了它们的导数相同 $f'(z)=f'(z_1)$. 换言之,导函数 $f'(z)$是周期的,因而是有界函数.

截至目前为止,函数 f 不论是光滑的或是全纯的,相同的论证均为正确. 然而,在下面有一个决定性的差别. 若 f 为全纯,则 f' 亦为全纯,但全平面上的有界全纯函数按 Louivilie 定理必为常数. 由此推知 f 为一线性函数 $f(z)=az+b$. 由于 f 具有某些任意性我们还可以作一点选择. 例如说 $f(0)=0$ 即 $b=0$,则相容性条件给出

$$a = f(1) = m_1 + m_2\tau' ,$$

$$a\tau = f(\tau) = n_1 + n_2\tau' ,$$

其中 m_1, m_2, n_1 和 n_2 均为整数. 若 $\tilde{f}: T(\Gamma) \longrightarrow T(\Gamma')$为一同构映射,故 $a\neq 0$,由此即得

$$\tau = \frac{n_1 + n_2\tau'}{m_1 + m_2\tau'}. \tag{1}$$

反之,若(1)式成立,则

$$f(z) = (m_1 + m_2\tau')z$$

为一同 Γ 与 Γ' 相容的整函数. 因此(1)就是等价性的判据,若利用矩阵

$$A = \begin{pmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{pmatrix}$$

来重述它,则易于看出(1)式为一个等价关系的必要充分条件为矩阵是非奇异的,由于仅考虑整数矩阵,这就相当于要求 $\det A=\pm 1$, 若要求 $\operatorname{Im}\tau>0$,则需 $\det A>0$. 因此 $A\in SL(2,\mathbf{Z})$为一整数么模矩阵. 由此看出一切不同的复环面之集与 $\mathbf{C}$ 的上半平面 U 的点按关系式 (1) 取模后的点集成 1-1 对应, 后一个空间记为 $U/SL(2,\mathbf{Z})$. 由于 $SL(2,\mathbf{Z})$至多可数,因此知存在不可数多个不同的复环面. 事实上,因为 $SL(2,\mathbf{Z})$如同 $\Gamma\subset\mathbf{C}$ 一样是离散的,$U/SL(2,\mathbf{Z})$本身也是一个复流形,称为 Abel 簇 (Abelian Varieties) (=复环面——在复维数 1 的情形) 的模空间 (moduli space). 对于熟悉 Riemann 面理论的读者这些都是众所周知的事实. 我们仅仅希望说明当一个范

畴（category）或非常松散或非常严格时，在它上面区别不同构的对象相对来说较为容易.

参 考 文 献

[1] Ahlfors, L. V., *Complex analysis*, McGraw-Hill, 1953. 中译本：阿尔福斯，《复分析》，上海科学技术出版社，1962.

[2] Chevalley, C., *Theory of Lie Groups*, Princeton Univ. Press, 1946.

[3] Dieudonné, J., *Foundations of Modern Analysis*. 中译本：迪厄多内，《现代分析基础》，科学出版社，1983.

[4] Griffiths, P. and Harris, J., *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley, 1978.

[5] Milnor, J., *Differential Topology*, Princeton Univ. Notes, 1958. 中译本：米尔诺.《从微分观点看拓扑》,上海科学技术出版社,1983.

[6] Milnor, J., *Lectures on the h-cobordism theory*, Princeton Univ. Notes, 1965.

[7] Milnor, J. and Kervaire, M., Groups of Homotopy Spheres, *Ann. of Math.* 77(1963),504～537.

第二章 切 丛

§1. 流形的切丛

在第一章我们已经看到，光滑流形的定义使得在其上可以讨论函数的可微性，但是还没有讨论如何实际求导的问题．现在我们就来讨论这个问题．取函数的导数是一局部问题，因为流形局部地看来正象欧氏空间的一块，在求导上肯定没有内在的困难．问题在于怎样适当地表述．虽然有局部的图象可用，却没有唯一的图象．所以，不论如何表述，都要能肯定所说的不依赖于所选用的特定的图象．当谈到流形上的任一局部不变量时，这总是一个基本的反复出现的论题．我们再简要地回顾一下欧氏空间的情况以便弄清问题所在．令 $U\subset\mathbb{R}^n$ 为一开集，$f:U\longrightarrow\mathbb{R}$（取值于 $\mathbb{R}$ 仅是为了简单）是一实值函数．在求导数时要有两个参数：df 是在一点 $P\in U$ 处沿一个方向 $u\in\mathbb{R}^n$ 取的，它是一个映射

$$df:U\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}\times\mathbb{R},\qquad (P,\ u)\longmapsto(f(P),df(P,u)).$$

虽然 P 和 u 都是同一个“集”$\mathbb{R}^n$ 之元，它们却被区别对待，我们把 P 看成一点，u 则看成一个方向．这意味着，在 $U\times\mathbb{R}^n$ 中第二个因子 $\mathbb{R}^n$ 不同于第一个因子只是一个集而是一个矢量空间．在定义中就明显地需要这一点：

$$df(P,u)=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{f(P+tu)-f(P)}{t},$$

因为对 u 作了矢量运算 tu．由下面的性质还可以进一步看清楚这一点：对于一定点 $P\in U$，映射

$$df(P):\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R},\ u\longmapsto df(P,u)$$

是线性映射. 事实上导数之有用，实质即在于其线性(例如，正因如此，知道偏微商 $\partial f/\partial x$ 就够了). 所以在流形 M 的一般情况下，点 $P\in M$ 处的导数 $df(P)$仍应是一线性映射. 但是这里出现了问题之一，在 $M=U\subset\mathbf{R}^n$ 时，它确是线性映射，因为 $\mathbf{R}^n$ 已经是矢量空间，但在一般情况下，首先要在 P 点安一个矢量空间 V_P 然后才能谈得上线性映射.

对一点 P 给一矢量空间没有任何困难，这不过是给了一族矢量空间，对参数空间 M（就是那个流形）之每一点 P 给了一族参数化的（Parametrized）矢量空间. 例如，$M\times\mathbf{R}^n$ 是这种矢量空间族中最简单的. 事实上，对于开集 $U\subset\mathbf{R}^n$，我们就用了这一族 $U\times\mathbf{R}^n$ 来定义 df. 一般情况下，还想如以前一样把 df 定义为线性映射 $df: M\times\mathbf{R}^n\longrightarrow\mathbf{R}$ 就出了麻烦. 很容易看清其问题所在.

令 $P\in M$ 为一点，取局部坐标 (U,φ)，于是得到函数的局部表示 $\tilde{f}=f\circ\varphi^{-1}$. 它是定义在开集 $\varphi(U)\subset\mathbf{R}^n$ 上的函数，所以可以定义 $df: M\times\mathbf{R}^n\longrightarrow\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 为

$$(P,u)\longmapsto(f(P),d\tilde{f}(\varphi(P),u)).$$

但是这是不行的，若(V,ψ)是另一个局部坐标，就会有不同的局部表示 $\check{f}=f\circ\psi^{-1}$，$d\tilde{f}(\varphi(P),u)$和 $d\check{f}(\psi(P),u)$当然不会相同. 令 $h=\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\longrightarrow\psi(U\cap V)$为这两个局部坐标的“迁移函数”，有 $\tilde{f}=\check{f}\circ h$. 故由链法则

$$d\tilde{f}(\varphi(P),u)=d\check{f}(\psi(P),dh(\varphi(P),u)). \tag{1}$$

所以问题在方向矢量上:第一个坐标系的 $U\times\mathbf{R}^n$ 中的矢量 u 变成了第二个坐标系 $V\times\mathbf{R}^n$ 下的 $v=dh(\varphi(P),u)$，它一般与 u 不同，改变我们放置所有 $U\times\mathbf{R}^n$ 的参数族，而且按公式(1)把矢量适当地等同起来，就能避免这种麻烦. 其形式的程序如下:

令 M 为一 n 维光滑流形，$\mathscr{U}=\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$是 M 的光滑构造中的局部坐标（见第一章§4)，令

$$\mathscr{E}=\bigsqcup_{i\in I}(U_i\times\mathbf{R}^n)$$

为乘积 $U_i\times\mathbf{R}^n$ 之分离并集（disjoint union). $\mathscr{E}$ 中之点用三元组（i,

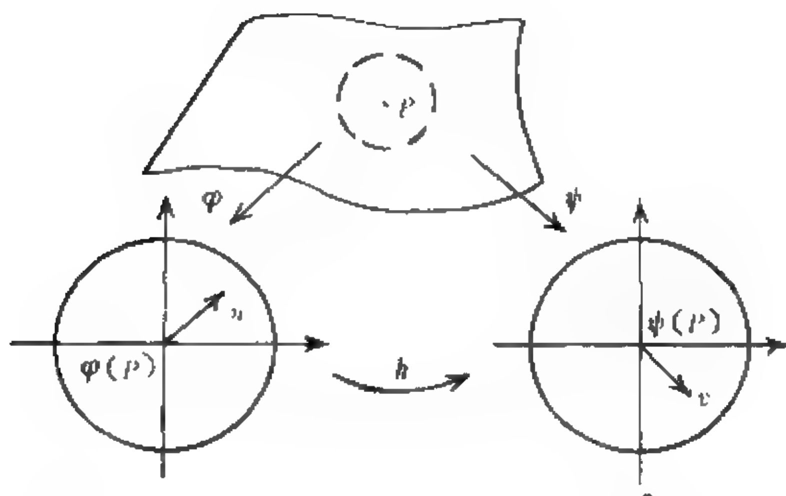


图 2—1

P, u) 来表示，其中 $i\in I$，$P\in U_i$，$u\in\mathbf{R}^n$. 定义等价关系 (i, P, u) ~ (j, Q, v) 如下：

(1) $P=Q$,

(2) $v=d\varphi_{ji}(\varphi_i(P),u)$,

其中 $\varphi_{ji}=\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}:\varphi_i(U_i\cap U_j)\longrightarrow\varphi_j(U_i\cap U_j)$是迁移函数. 所得的商空间 $T(M)=\mathscr{E}/\sim$称为 M 之"切丛". 这个名词我们以后再解释(切于什么?). 我们先更仔细地来研究 $T(M)$：

1. $T(M)$是一拓扑空间，集 $\mathscr{E}$ 上赋有"不相交拓扑"(子集 $A\subset\mathscr{E}$ 为开 iff 对每一个 $i\in I$，$A\cap(U_i\times\mathbf{R}^n)$均在 $U_i\times\mathbf{R}^n$ 中为开). $T(M)$则赋有商拓扑.

2. $T(M)$实际上是参数化的矢量空间族，定义 $\pi:T(M)\longrightarrow M$ 为 $\pi[i,P,u]=P$([i,P,u]按习惯表示(i,P,u)之等价类). π 显然是适当定义的而且是连续的. 对一个固定的 i 很容易验证，映射

$$\mathbf{R}^n\longrightarrow T_P(M)=\pi^{-1}(P),\quad u\longmapsto[i,P,u]$$

是全单射，同时，若 $P\neq Q$，$T_P(M)\cap T_Q(M)=\varnothing$. 于是对于每一点 $P\in M$，$T_P(M)$是一个矢量空间称为 P 点处的切空间.

3. $T(M)$ 还是一个流形，对于固定的 $i\in I$ 映射

$$\tilde{\varphi}_i:U_i\times\mathbf{R}^n\longrightarrow T_{U_i}(M),\ (P,u)\longmapsto[i,P,u]$$

是全单射. 令 $\tilde{U}_i=\tilde{\varphi}_i(U_i\times\mathbf{R}^n)=\pi^{-1}(U_i)$，则 $\tilde{U}_i\subset T(M)$是开的，而我

们可以用

$$p_i : \tilde{U}_i \xrightarrow{\tilde{\varphi}_i^{-1}} U_i \times \mathbf{R}^n \xrightarrow{\varphi_i \times \mathrm{id}} \varphi_i(U_i) \times \mathbf{R}^n \subset \mathbf{R}^{2n}$$

为局部坐标（请读者证明其相容性）. 但实际上我们对于 $T(M)$ 作为一个流形不感兴趣.

4. 若 $f: M \longrightarrow \mathbf{R}$ 为光滑的，应有一映射

$$df: T(M) \longrightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R},$$

使对每一点 P 都成为线性映射

$$df(P): T_P(M) \longrightarrow \mathbf{R}.$$

更一般地说，若 $f: M \longrightarrow N$ 是流形间的光滑映射，有

$$df: T(M) \longrightarrow T(N)$$

定义如下，令 $\mathscr{V} = \{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ 是定义 N 的局部坐标系. 对于点 $[i, P, u] \in T(M)$，令 $Q = f(P) \in V_\alpha$ 对某个 α 成立，而 $f_{\alpha i} = \psi_\alpha \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ 是局部表示. 定义

$$df[i, P, u] = [\alpha, Q, df_{\alpha i}(\varphi_i(P), u)].$$

这只是利用局部表示求导数的老办法. 现在使 $T(M)$ 和 $T(N)$ 有适当的定义. 当然可以看到，对固定的 $P \in M$, $df(P): T_P(M) \longrightarrow T_Q(N)$ 是线性的.

5. 上述 df 的定义代表了一种利用抽象化来耍花样的典型情况. 一个老老实实的简单方法可惜行不通了，于是就人为地发明一种更抽象的对象使它行得通（还记得是怎样发明 Riemann 面来使一个非函数变成一个函数的吗?）. 问题在于这种抽象是否只是空洞的抽象. 在我们的情况下，全部想法就在于 $T(M)$ 是一个适当的参数化而 $M \times \mathbf{R}^n$ 可能不是，所以应该要问两者是否确实不同. 更确切地说，令 $p: M \times \mathbf{R}^n \longrightarrow M$ 是投影 $(P, u) \longmapsto P$. 说 $T(M)$ 和 $M \times \mathbf{R}^n$ 一样意思就是有一个同胚 $f: M \times \mathbf{R}^n \longrightarrow T(M)$ 使得下面的图式是可换的

$$\begin{array}{ccc} M \times \mathbf{R}^n & \xrightarrow{f} & T(M) \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \pi} & \\ & M & \end{array}$$

然后对每一点 $P\in M$，f 诱导出一个映射 f_P，

$$f_P: \mathbb{R}^n \longrightarrow T_P(M),\quad u \longmapsto f(P,u).$$

我们也要求 f_P 对一切 $P\in M$ 是线性同构. 如果是这样，$T(M)$就称为平凡的(trivial)(M 则称为可平行化(parallizable)的). 注意，局部地总是如此. 在 3 中定义的映射

$$\tilde{\varphi}_i: U_i \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \pi^{-1}(U_i) \subset T(M)$$

正是给出了 U_i 上的局部同构，但在交 $U_i\cap U_j$ 上有

$$g_{ji}(P,u) = \tilde{\varphi}_j^{-1}\circ\tilde{\varphi}_i(P,u) = (P, d\varphi_{ji}(\varphi_i(P),u)), \qquad (2)$$

这是 $T(M)$上的转移关系. 对于 $P\in U_i\cap U_j, g_{ji}(P): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 可能不是恒等映射，这件事是使 $T(M)$整体上可能不是平凡的理由. 但是"可能不"和"不可能"并不是一回事，以后我们会看到，在许多情况下 $T(M)$确不是平凡的. 例如 $M=S^2$ 就是如此. 目前我们只强调对于 $T(M)$说来，本质的构造就是迁移关系(2). 后面我们还要讲这一点.

6. 有一类重要的可平行化流形，即是 Lie 群. 令 G 为 Lie 群，对任意的 $g_0\in G$，平移 $L_{g_0}: G\longrightarrow G, g\longmapsto g_0g$ 按定义是光滑的，它还是微分同胚，因为 $L_{g_0}^{-1}=L_{g_0^{-1}}$，所以 $dL_{g_0}: T_e(G)\longrightarrow T_{g_0}(G)$($e$ 是 G 的单位元)是同构，而

$$G\times T_e(G)\longrightarrow T(G),\quad (g,u)\longmapsto dL_g(u)$$

就给出一个整体的平凡化(global trivialization)，所以象环面，$GL(n)$，$U(n)$都是可平行化的.

§2. 内在的描述

上一节给出的切丛的作法可以称之为坐标的方法，因为它很明显地应用了局部坐标. 它虽然有简单直接的优点，直接用到坐标有时却繁冗. 例如，切向量 $[i, P, u]$ 有许多表示法，象 $[j, P, d\varphi_{ji}(\varphi_i(P),u)]$和一切定义为一个等价类的东西一样，时常需要验证. 我们所做的工作是有适当定义的. 因此人们时常要寻求与

坐标无关的即内在的方法来描述同一对象. 有时这只是纯粹追求形式，所得的是表面的优美，所失却的是模糊了一切直观概念的启发，但有时这却包含了重要的概念上的观点. 切丛的情况就是一例.

构造 $T(M)$ 之关键在于看到取导数的"方向"，这个概念在一已给的局部坐标系中没有内在的意义. 所以要把许多局部的方向看成一个东西才能得到不变的空间 $T_P(M)$. 如果我们可以讨论导数而不明显地提到方向就可以避免这一点. 让我们再一次回到欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的开集 $P_0\in U\subset\mathbf{R}^n$ 的情况. 对于固定的方向 $u\in\mathbf{R}^n$，运算

$$f\longmapsto df(P_0,u)$$

将函数 f 变成实数 $df(P_0,u)$. 称这运算为 D_u. 换言之，记定义于 U 上的光滑函数 $f:U\longrightarrow\mathbf{R}$ 之集为 $\mathscr{F}(U)$，有映射

$$D_u:\mathscr{F}(U)\longrightarrow\mathbf{R}.$$

关于 D_u 我们知道些什么？

(1) $\mathscr{F}(U)$ 是 $\mathbf{R}$ 上之矢量空间，显然 D_u 为线性的. 这只不过是"和之导数即导数之和"以及常数可以取出导数记号之外的老话. 此外我们还学过乘法规则.

(2) $D_u(fg)=(D_uf)g(P_0)+f(P_0)(D_ug)$.

定义于环上且具有这两性质的任意算子都称为导算子. 注意到(1)，(2)两个性质都用不着方向概念. 所以它们如果刻画了方向导数，我们的目的就达到了.

引理 令 $0\in U\subset\mathbf{R}^n$ 为围绕 $\mathbf{R}^n$ 中原点的开的圆盘. 于是对 $\mathscr{F}(U)$ 任意一个导算子 D 都有一个 $u\in\mathbf{R}^n$ 使之成为 D_u.

证 令 $x_i:U\longrightarrow\mathbf{R}$ 为第 i 个坐标函数，于是可得一组数 $a_i=D(x_i)$. 令

$$u=\sum a_ie_i,$$

e_i 和通常一样表示 $(0,\cdots,\overset{i}{1},\cdots,0)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 之标准基底中的第 i 个矢量. 我们指出 $D=D_u$.

要证明这一点，对每个函数 $f\in\mathscr{F}(U)$ 以及点 $P\in U$，都作一个定义在区间 $I\subset\mathbb{R}$ 上的函数 $\tilde{f}$，$\tilde{f}(t)=f(tP)$. 于是

$$f(P)-f(0)=\tilde{f}(1)-\tilde{f}(0)=\int_0^1\tilde{f}'(t)dt$$

$$=\int_0^1\sum_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(tP)x_i(P)dt$$

$$=\sum_i x_i(P)g_i(P),$$

$$g_i(P)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_i}(tP)dt.$$

换言之，作为一个函数，有

$$f=f(0)+\sum_i x_ig_i.$$

注意 $g_i(0)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$，应用导算子的规则(1)和(2)，有

$$Df=\sum_i[(Dx_i)g_i(0)+x_i(0)D(g_i)]=\sum_i a_ig_i(0).$$

应用通常方向微分的规则，则有

$$D_af=\sum_i a_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(0)=\sum_i a_ig_i(0).$$

令 M 为一流形，$P\in M$ 为定点，从上面所作可知，切向量可以定义为求导的算子. 但是我们还是先介绍一种有用的语言，我们将要与定义在 P 之邻域 U 上的函数打交道，而与 U 的大小并不相干，所以如果有 P 的邻域 $P\in W\subset U\cap V$ 使 $g|W=f|W$，就说 (U,f) 和 (V,g) 等价，等价类 $[U,f]$ 称为 f 在 P 点的"芽"类(germ class)，这些芽类之集记作 $\mathscr{F}_P$. 显然 $\mathscr{F}_P$ 是一个环. 为简单起见，我们用 f 记 $[U,f]$. 令 D_P 为 $\mathscr{F}_P$ 上一切导算子之集. 在 D_P 上可以显然地定义线性运算

$$(D_1+D_2)f=D_1f+D_2f,$$

$$(\lambda D)f=\lambda(Df),$$

这样 D_P 成了矢量空间. 它就是内在的切空间. 其合理性很容易看到. 定义 $\alpha: T_P(M)\longrightarrow D_P$ 如下：取一个元 $t=[i,P,u]\in T_P(M)$，

取一函数 $f\in\mathscr{F}_P$，注意 t 中的 i 表示一个局部坐标 (U_i,φ_i)，于是有了 f 的表示 $f_i=f\circ\varphi_i^{-1}$. 定义 $a(t)=D_t$ 为

$$D_t(f) = (D_u f_i)(\varphi_i(P)).$$

要证明 D_t 适当定义只要再用一次链法则，要证明 D_t 是一个导算子而 a 是线性的，则是显然的，证明 a 是映上就是上述引理，a 是 1-1 则是一个简单的练习. 证毕.

如果 $t_j=[i,\ P,\ e_j]$，e_j 是第 j 个标准基底矢量，我们看到

$$D_{t_j}(f) = \frac{\partial\tilde{f}}{\partial x_j}(0),$$

这里，$\tilde{f}=f\circ\varphi_i^{-1}=f_i$，而且假设 $\varphi_i(P)=0$. 由于这个原因，切矢量 D_{t_j} 常记作 $\partial/\partial x_j$，而我们说一个局部坐标 $\varphi=(x_1,\cdots,x_n)$ 就给出了切空间 $T_P(M)$ 的一个基底 $\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$.

若 $F: M\longrightarrow N$ 是一光滑映射，我们已看到 P 点处的导数 dF 是一个线性映射 $dF: T_P(M)\longrightarrow T_Q(N)$，$Q=F(P)$，$dF$ 可以用导算子表述：令 $D\in T_P(M)$ 是一导算子，已给一个芽 $f\in\mathscr{F}_Q$，$f\circ F$ 是 $\mathscr{F}_P$ 中的一个芽，这时

$$[dF(D)]f = D(f\circ F).$$

由此易得链法则：若 $G: N\longrightarrow L$ 是一个光滑映射，于是有

$$d(G\circ F) = dG\circ dF.$$

§3. 切空间的几何意义

另一种描述切矢量的方法是：令 M 为一流形，$P\in M$ 为一点. M 上的一条曲线就是一个光滑映射 $\alpha: I\longrightarrow M$，$I\subset\mathbf{R}$ 是一区间，我们假设 $0\in I$ 是一内点，且 $\alpha(0)=P$，于是有导数

$$d\alpha: T_0(I)\longrightarrow T_P(M),$$

因为 $T(I)=I\times\mathbf{R}$，$T_0(I)=\{0\}\times\mathbf{R}$ 具有基底矢量 $(0,1)\in T_0(I)$. 我们记切矢量 $d\alpha(0,1)$ 为 $\alpha'(0)$，$\alpha'(0)$ 可用导算子表述如下：若 $f\in\mathscr{F}_P$，则

$$\alpha'(0)(f) = d(f\circ\alpha)(0,1) = d\tilde{f}(0,1).$$

但 $\tilde{f}: I \longrightarrow \mathbf{R}$ 是一个一元实值函数，而且我们知道在老的微积分记号中 $d\tilde{f}(0,1)=\tilde{f}'(0)$，这就是选用 $\alpha'(0)$ 这个记号的理由. 很明显，$T_P(M)$ 中任一个切矢量都可以这样得出.

这里提一个叫法的问题：$T_P(M)$ 为什么叫"切"空间. 切矢量的思想在几何的局面中自然是大家熟习的. 例如，下图画出了在 $\mathbf{R}^3$ 中的矢量 u 在 x 点切于二维球面 S^2，这个图象之所以"清楚"，是因为我们把 S^2 放在 $\mathbf{R}^3$ 中来看的. 但是一般情况下，我们得到的流形并没有放在什么东西里，所以上面的图不能用. 当然，我们希望在把 $M\subset\mathbf{R}^n$ 嵌入在 $\mathbf{R}^n$ 中时，$T_P(M)$ 的切矢量就是在上图里看到的东西. 一般地. 令 $M\subset N$ 是一个 n 维流形的 k 维子流形，包含映射 $i: M\longrightarrow N$ 诱导出 $di: T_P(M)\longrightarrow T_P(N)$，它是很容易描述的. 回想一下，$P$ 在 M 中有一个局部坐标 (U,φ) 使 $\varphi(M\cap U)=\mathbf{R}^k\subset\mathbf{R}^n$. 在这种表示之下，元素 $[U\cap M,P,u]\in T_P(M)$ $(u\in\mathbf{R}^k)$ 被 di 送到 $[U,P,u]\in T_P(N)$，而这里的 $u\in\mathbf{R}^k\subset\mathbf{R}^n$，所以 di 把 $T_P(M)$ 和 $T_P(N)$ 的一个子空间等同起来. 以后我们总是把它们这样等同起来的.

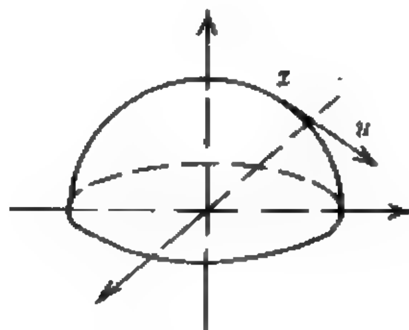


图 2—2

把这应用到嵌入 $S^2\subset\mathbf{R}^3$. 令 $P=(p_1,p_2,p_3)\in S^2$ 而 $u\in T_P(S^2)$ 是其一个切矢量. 作为 $T_P(\mathbf{R}^3)=\mathbf{R}^3$ 的一个元，$u=(u_1,u_2,u_3)$ 就是一个普通的矢量. 按照我们前面的讨论，有一条曲线 $\alpha: I\longrightarrow S^2$ 使 $\alpha(0)=P=(p_1,p_2,p_3)$ 而 $\alpha'(0)=(u_1,u_2,u_3)$. 如果 $\alpha(t)=(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t))$，有

$$\alpha_1^2(t)+\alpha_2^2(t)+\alpha_3^2(t)=1,$$

取导数，且在 $t=0$ 时计算其值，我们得到

$$p_1u_1 + p_2u_2 + p_3u_3 = 0.$$

因此 $\alpha'(0)$ 垂直于 P，从而切于球面.

§4. 球面的切丛

我们看一些特定的例子，例如 n 维球面 S^n 的切丛，第一种情况 $n=1$ 很简单，$T(S^1)$ 是平凡的，因为 $S^1=\{z||z|=1\}\subset \mathbf{C}=\mathbf{R}^2$ 是一个（复数乘法下的）Lie 群，所以，从一般的考虑可得这个结论. 我们也能通过具体的手段再次肯定这一点. 根据 §3,

$$T(S^1)=\{(u,v)|u,v\in\mathbf{R}^2,|u|=1,\langle u,v\rangle=0\}.$$

定义平凡化 $\alpha: S^1\times\mathbf{R}\longrightarrow T(S^1)$ 如下：令 $(u,\lambda)\in S^1\times\mathbf{R}$，若 $u=(u_1,u_2)$，令 $\tilde{u}=(u_2,-u_1)$ 于是有 $\langle u,\tilde{u}\rangle=-u_1u_2+u_1u_2=0$，然后令 $\alpha(u,\lambda)=(u,\lambda\tilde{u})$.

下一个情况就比较复杂了，嵌入 $S^2\subset\mathbf{R}^3$ 又给出切丛如下

$$T(S^2)=\{(u,v)|u,v\in\mathbf{R}^3,|u|=1,\langle u,v\rangle=0\}.$$

如果有一个平凡化

$$\alpha: S^2\times\mathbf{R}^2\longrightarrow T(S^2)$$

存在，就会得到一个所谓的非零截口(section)：只需取一个非零矢量 $v_0\in\mathbf{R}^2$，并令 $\tilde{\rho}: S^2\longrightarrow T(S^2)$ 为

$$\tilde{\rho}(u)=(u,\pi_2\circ(u,v_0)),$$

其中 $\pi_2\circ(u,v)=v$. 若 $(u,v)\in T(S^2)$ 因为 $v_0\neq 0$，故对一切 $u\in S^2$，$\pi_2\circ\alpha(u,v_0)\neq 0$. 于是可以将它规范化(normalize)而得一个映射

$$\rho: S^2\longrightarrow S^2,\quad u\longmapsto\frac{\pi_2\circ\alpha(u,v_0)}{|\pi_2\circ\alpha(u,v_0)|}.$$

因为 $\tilde{\rho}(u)\in T(S^2)$，有

$$\langle u,\rho(u)\rangle=0. \tag{1}$$

(1)式是一个梳头发的问题. 在头上每一点 u，头发给出了一个切于 u 的确定的方向 $\rho(u)$，而且这些方向应该是连续的(要不然就不太雅观了). 我们的直观告诉我们这是做不到的，我们将给出

一个不完全的说明. 但是,从下图就可以看到梳一个一维的头再容易不过了. 这种梳法就是证明 $T(S^1)$ 的平凡性所用的 α. 所以维数是断然地重要的.

拓扑学中一个很基本的概念是同伦,拓扑空间之间的两个映射 $g, f: X \longrightarrow Y$ 称为同伦的,如果有一个映射

$H: X \times I \longrightarrow Y, I = [0,1]$

使得 $H(x,0)=f(x), H(x,1)=g(x)$,即同伦是一族映射,以 I 为参数集,而 $H_t: X \longrightarrow Y$, $H_t(x)=H(x,t)$ 把 $f=H_0$ 连续变形(deform)为 $g=H_1$,映射的许多性质可能是同伦不变的. 例如,若 $F: U \longrightarrow \mathbf{C}$ 是一个全纯函数,定义于区域 $U \subset \mathbf{C}$ 上,α_0 和 α_1 是 U 中的两个同伦的端点的路径. 于是有

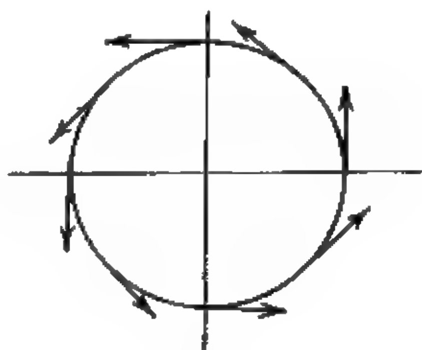


图 2—3

$$\int_{\alpha_0} F(z)dz = \int_{\alpha_1} F(z)dz.$$

我们对 ρ 进行变形,可以通过连接 $\rho(u)$ 和 u 的大圆劣弧将 $\rho(u)$ 移到 u,只有当 $\rho(u)=-u$ 时大圆的两弧才谈不上优劣. 因为 $\langle u, \rho(u)\rangle=0$, $\rho(u)=-u$ 是不会发生的,这个同伦可以明显地写为

$$H_t(u) = \frac{tu + (1-t)\rho(u)}{|tu + (1-t)\rho(u)|},$$

且 $\langle u, \rho(u)\rangle=0$ 保证了分母不为 0,于是我们有一同伦变 ρ 为恒等映射:$\rho \sim \text{id}$. 用同样的证法也可将 $\rho(u)$ 变形为 $-u$,这意味着 $\rho \sim A$,即同伦于"对径"(antipodal)反射映射 $A(u)=-u$. 所以 $A \overset{\varphi_t}{\sim} \text{id}$. 这是不可能的,因为用矩阵式来写

$$A = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix},$$

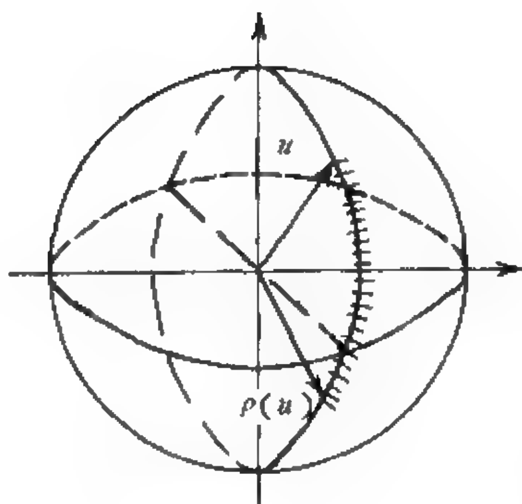


图 2—4

$$\mathrm{id}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}.$$

所以 $\det A=-1,\det(\mathrm{id})=1$，但在连续形变中 det 是连续变化的，所以一定在某处为 0，另一方面，映射 $\varphi: S^2\longrightarrow S^2$ 又必然是非异的，于是 $\det(\varphi)\neq 0$，这就是矛盾. 上面的证明是有漏洞的，但是我们有意地让它这样.

对于 $T(S^n)$，$n\geqslant 3$ 做下去又会怎样？

$T(S^3)$是平凡的，因为 S^3 可以看成单位四元数，而四元数乘法使 S^3 成为一个 Lie 群.

类似地，$T(S^7)$是平凡的. S^7 是所有单位 Cayley 数的集合，这差一点使 S^7 成一个 Lie 群. Cayley 数乘法是非结合的，所以不能成群. 但是我们仍有左右平移，而它这时起了作用.

所以，在球面之中，$T(S^n)$在 $n=1,3,7$ 时是平凡的，此外还有吗？这就是所谓矢量场问题，在很长时期都悬而未决，而后由 Adams［1］(又见［2］)完全解决了，答案是：$T(S^n)$恰好只在 $n=1,3$ 和 7 时是平凡. 但这里要用到许许多多工具，如上同调运算，K-理论等等，所以肯定地非我们这里之所能及.

参 考 文 献

[1] Adams, J. F., Vector fields on spheres, *Ann. of Math.* 75(1962), 603～632.

[2] Steenrod, N. E. and Whitehead, J. H. C., Vector fields on the n-sphere, *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.* 37(1951), 58～63.

第三章 矢 量 丛

§1. 定义和例

在上一章里，我们已经看到，对于一般的流形 M，并不存在单一的线性空间来在其中求导. 我们需要的是一族用 M 来参数化的矢量空间才能有意义地讨论导数概念. 这就是 M 的切丛 $T(M)$，在许多情况下这种参数化的矢量空间是自然地出现的. 因此，对这种现象制定出一般的术语是有用的.

定义 空间 B 上的矢量丛即一空间 E(全空间 total space)和一个映射 $\pi: E \longrightarrow B$，使得

(V_1) 对于每一点 $b\in B$，“纤维(fibre)”$E_b=\pi^{-1}(b)$是一个有限维矢量空间，维数为 k.

这里，基域可以是实的，这时有实矢量丛，也可以是复的，这时是复矢量丛. 在一般的讨论中基域是无关紧要时，我们就不指定是哪一个了. 纤维的维数 k 当点 b 变化时，也不必是固定的. 但是在我们提出第二个条件后，就可以证明在 B 的每一个连通分支上它是常数，所以为了简单起见，也可以在定义中规定 k 是常数.

条件(V_1)确切地表达了参数化的矢量空间族的思想. 但是这是太一般化了且难于掌握，因此，还要提出

(V_2) 局部平凡性：每一点 $b_0\in B$ 都存在 B 中一邻域 U 以及一个同胚 $\varphi: U\times F^k \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ (F 表示基域)，使得下面的图式是可换的

$$\begin{array}{ccc} U\times F^k & \xrightarrow{\varphi} & \pi^{-1}(U) \\ & {\scriptstyle p_1}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \pi} & \\ & U & \end{array}$$

p_1 是投影，$p_1(b,v)=b$，此外，对于任一个 $b\in U$，映射

$$\varphi_b: F^k \longrightarrow E_b, \quad v\longmapsto \varphi(b,v)$$

是线性同构映射.

因此我们用"局部坐标"所成的开覆盖 $\mathscr{U}=\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$去覆盖底空间(base space)$B$. 对于交集 $U_i\cap U_j$ 中一点 b，我们有"迁移函数"

$$\varphi_{ij}(b) = \varphi_{ib}^{-1}\circ\varphi_{jb},$$

这是由 F^k 到 F^k 的一个线性映射，并且是非奇异的. F^k 上的一切非奇异线性映射之集 $GL(F,k)$称为一般线性群(即元在 F 中的 $k\times k$ 非异矩阵之群). 对于 b 指定值 $\varphi_{ij}(b)$与之对应就定义了一个函数

$$\varphi_{ij}: U_i\cap U_j \longrightarrow GL(F,k)$$

即迁移函数.

很清楚，迁移函数$\{\varphi_{ij}\}$适合下面的迁移性条件，然而我们却给它一个怪名字——上循环条件(cocycle condition)

$$\varphi_{ij}\circ\varphi_{jk}=\varphi_{ik}, \qquad 于 U_i\cap U_j\cap U_k 上.$$

局部坐标和迁移函数是这个构造的关键部分，因为它们指出了怎样用局部平凡小块 $U_i\times F^k$ 拼出丛 E. 形式地讲，有

命题 3.1 已给一空间 B，开覆盖 $\mathscr{U}=\{U_i\}_{i\in I}$以及仅服从上循环条件的任意函数 $\varphi_{ij}: U_i\cap U_j\longrightarrow GL(F,k)$，必有一个矢量丛 $\pi: E\longrightarrow B$ 其迁移函数就是$\{\varphi_{ij}\}$.

证 这只是切丛的作法的形式的重复，取其分离并 $\mathscr{E}=\coprod_i U_i\times F^k$，引入等价关系～如下：

$$(i,b,v)\sim(j,b',v'),$$

如果

$$b=b' \tag{1}$$

$$v=\varphi_{ij}(b)v' \tag{2}$$

上循环条件保证了这确是一个等价关系. 令 $E=\mathscr{E}/\sim$，定义 $\pi: E\longrightarrow B$ 如 $\pi[i,b,v]=b$，$\varphi_i: U_i\times F^k\longrightarrow E$ 如 $U_i\times F^k\longrightarrow\mathscr{E}\longrightarrow\mathscr{E}/\sim$

$=E$. 证毕.

注：和流形一样，局部坐标并不是唯一的. 如果对同一个丛 E 又有 $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}$，这只意味着，把 $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}$ 和 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ 合并成较大的族 $\{(U_i, \varphi_i)\} \cup \{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}$，它仍适合上循环条件. 反过来如果两族函数 $\{\varphi_{ij}\}$ 和 $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ 合起来仍适合上循环条件. 它们所定义的矢量丛在下述意义上是同一个丛.

映射 $\tilde{f}: E \longrightarrow E'$ 称为丛 E 和 E' 间的态映射(morphism)，如果 $\tilde{f}$ 映纤维为纤维而且在每个纤维上，$\tilde{f}$ 都是线性映射. 即有可换图

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E' \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi'} \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

使 $\tilde{f}_b: E_b \longrightarrow E_{f(b)}$ 对每一个 $b \in B$ 均为线性的. 如果有另一态映射 $\tilde{g}: E' \longrightarrow E$ 使 $\tilde{f} \circ \tilde{g} = \mathrm{id}_{E'}$，$\tilde{g} \circ \tilde{f} = \mathrm{id}_E$，则称 $\tilde{f}$ 为丛同构. 这就定义了矢量丛的范畴. 注意，$\tilde{f}_b$ 有可能对每一个 b 都是线性同构而 $\tilde{f}$ 则不是丛同构，其原因例如可以是，诱导映射 f 不一定是 1-1 的. 我们将看到，这种情况是时常出现的，所以我们给它一个特殊的名字叫做"丛映射"(bundle map).

我们时常需要讨论同一个底空间 B 上的各个丛. 它们之间的态映射就成了可换图

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E' \\ & {\scriptstyle \pi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \pi'} & \\ & B & \end{array}$$

而且对每一个 $b \in B$，$\tilde{f}_b: E_b \longrightarrow E_b'$ 是线性的(所以它就是态映射加上 $B=B'$ 和 $f=\mathrm{id}$ 的限制). 这就是在一个给定的底空间 B 上的矢量丛之范畴 $v(B)$. B 上的"同一个丛，指的是这一范畴中的同构的丛.

下面看一些例子.

(1) 我们已经看到流形 M 的切丛，但是我们还是愿从基本的构造的对象即迁移函数的观点再来研究它. 若 M 是由局部坐标

$\{(U_i,\varphi_i)\}$来描述的，M 也有迁移函数 $\varphi_{ij}=\varphi_i\circ\varphi_j^{-1}:\varphi_j(U_i\cap U_j)\longrightarrow\varphi_i(U_i\cap U_j)$. 不应把它们与切丛的迁移函数混为一谈. 切丛的迁移函数$\{(U_i\cap U_j),g_{ij}\}$却是 φ_{ij}的导数(即:Jacobian 矩阵)

$$g_{ij}:U_i\cap U_j\longrightarrow GL(\mathbf{R},n),\ p\longmapsto d\varphi_{ij}(\varphi_j(P)).$$

(2) 回想一下,n 维射影空间 $\mathbf{P}^n$ 即 $\mathbf{R}^{n+1}$中直线之集(准确些说是矢量空间 $\mathbf{R}^{n+1}$中的一维子空间之集),这就给出了 $\mathbf{P}^n$ 上的一个自然的参数化族;对每个"点"$L\in\mathbf{P}^n$ 都联属一个矢量空间 $E_L=L$. 形式地讲

$$E=\{(L,u)\,|\,L\in\mathbf{P}^n,u\in\mathbf{R}^{n+1},u\in L\},$$

射影是 $\pi:(L,u)\longmapsto L$. 为了证明它是个矢量丛,让我们放进局部坐标,有 $\mathbf{P}^n$ 的开覆盖$\{U_i\}_{i=0}^n$如下

$$U_i=\{[x]=[x_0,x_1,\cdots,x_n]\in\mathbf{P}^n\,|\,x_i\neq0\}.$$

定义

$$g_i:U_i\times\mathbf{R}\longrightarrow E,\ ([x],\lambda)\longmapsto\left([x],\lambda\left(\frac{x_0}{x_i},\cdots,\frac{x_n}{x_i}\right)\right),$$

问题仅只在于 g_i 是否是适当定义的. 若$[x]=[y]$,这意味着有某个 $\mu\neq0$ 使 $y=\mu x$,于是 $y_i=\mu x_i$,从而

$$\frac{\lambda x}{x_i}=\frac{\lambda y}{y_i}.$$

若$[x]\in U_i\cap U_j$,则

$$g_i([x],\lambda)=\left([x],\lambda\left(\frac{x_0}{x_i},\cdots,\frac{x_n}{x_i}\right)\right),$$

$$g_j([x],\lambda')=\left([x],\lambda'\left(\frac{x_0}{x_j},\cdots,\frac{x_n}{x_j}\right)\right).$$

于是 $g_{ij}([x])(\lambda')=\dfrac{x_i}{x_j}\lambda'$,或

$$g_{ij}:U_i\cap U_j\longrightarrow GL(1,\mathbf{R}),\ [x]\longmapsto\frac{x_i}{x_j}.$$

丛 E 称为"典则"线丛 $\gamma(\mathbf{P}^n)$,我们将在以后解释这个名词,当然也有完全相同的方法作出的复典则线丛 $\gamma(\mathbf{CP}^n)$.

(3) 我们知道,关于丛的一个问题是了解它是否为平凡的.

例如，我们或多或少已经断定 $T(S^2)$ 是不平凡的，现在又有一个容易得多的典则线丛 $\gamma_1=\gamma(\mathbf{P}^1)$.

首先作为一个空间 $\mathbf{P}^1=S^1$ 就是一维球面. 因为令 $I=[0,1]$ 为单位区间. 定义

$$f: I \longrightarrow \mathbf{P}^1,\quad t \longmapsto [\cos \pi t, \sin \pi t].$$

f 当然不是同胚，但它是连续的全射，而且它不是1-1之处只有 $t=0$ 或 $t=1$，即是说 $\mathbf{P}^1$ 等于把两个端点视为同一点之后的 I. 这自然是一个一维球面，再定义

$$\tilde{f}: I \times \mathbf{R} \longrightarrow \gamma(\mathbf{P}^1).$$

$$(t,\lambda) \longmapsto ([\cos \pi t, \sin \pi t], (\lambda\cos \pi t, \lambda\sin \pi t)).$$

于是我们可得一个丛映射

$$\begin{array}{ccc} I\times\mathbf{R} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \gamma(\mathbf{P}^1) \\ \pi\downarrow & & \downarrow \\ I & \xrightarrow{f} & \mathbf{P}^1 \end{array}$$

在端点处，有

$$\tilde{f}(0,\lambda) = ([1,0],(\lambda,0)),$$

$$\tilde{f}(1,\mu) = ([-1,0],(-\mu,0)).$$

所以当 $\mu=-\lambda$ 时它们重合，换言之，可以这样来看 $\gamma(\mathbf{P}^1)$，取 $I\times\mathbf{R}$ 并将其一端的 $(0,\lambda)$ 和另一端的 $(1,-\lambda)$ 看成同一点. 这就是熟知的 Möbius 带的作法.

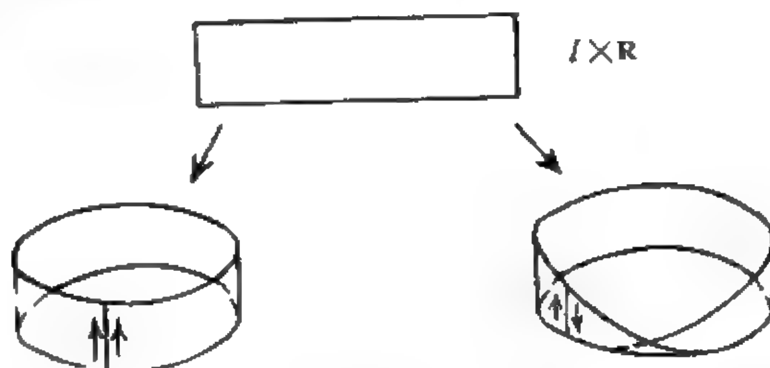


图 3—1

通过上面的图，知道了 $\gamma(\mathbf{P}^1)$ 不是平凡的. 把 Möbius 带沿带的中线

剪开，它仍然只是一片，而平凡丛就会分成两块. 因此它说明 $\gamma(\mathbf{P}^1)$ 和 $S\times\mathbf{R}$ 甚至作为拓扑空间也是不同的(通常正是就此提出 Möbius 带的).

在空间 S^1 上，至少有两个不同的线丛，而且 S^1 上只有这两个线丛. 这一点讲到示性类(characteristic class)时再讲.

(4) 一维复射影空间 $\mathbf{CP}^1$ 和典则的复线丛的情况. 我们将看到，这也是极重要的，而且事实上自 Hopf 以来已经研究过很久了(所以它叫做 Hopf 丛).

首先，作为一个流形，$\mathbf{CP}^1=S^2$，可以用两个坐标邻域覆盖

$$U_0=\{[z_0,z_1]\mid z_0,z_1\in\mathbf{C},z_0\neq 0\},$$
$$U_1=\{[z_0,z_1]\mid z_0,z_1\in\mathbf{C},z_1\neq 0\},$$

其坐标映射为

$$\varphi_0:U_0\longrightarrow\mathbf{C},\quad [z_0,z_1]\longmapsto z_1/z_0,$$
$$\varphi_1:U_1\longrightarrow\mathbf{C},\quad [z_0,z_1]\longmapsto z_0/z_1.$$

把 S^2 看做 $\mathbf{C}^2\cup\{\infty\}$(见第一章)，定义 $\alpha:\mathbf{CP}^1\longrightarrow S^2$ 为

$$\alpha[z_0,z_1]=\begin{cases}z_1/z_0, & z_0\neq 0,\\ \infty, & z_0=0.\end{cases}$$

由定义，典则线丛 $\gamma(\mathbf{CP}^1)$ 可以由迁移函数

$$g_{01}:U_0\cap U_1\longrightarrow GL(1,\mathbf{C}),\quad [z_0,z_1]\longmapsto z_0/z_1$$

来表示，上循环条件为

$$g_{00}=g_{11}=1,\quad g_{01}\circ g_{10}=1.$$

因为上循环条件这样简单，我们还可以用

$$\bar{g}_{01}=(g_{01})^n:U_0\cap U_1\longrightarrow GL(1,\mathbf{C}),\qquad (1)$$
$$[z_0,z_1]\longmapsto (z_0/z_1)^n$$

来定义新的线丛，这里 n 是正、负整数. 很清楚，上循环条件仍有效，所以由命题3.1可以得出丛 $\gamma^n(\mathbf{CP}^1)$ 称为 $\gamma(\mathbf{CP}^1)$ 的 n 次张量积. 例如 $n=0$ 给出平凡丛，$n=1$ 给出典则丛等等.

考虑切丛 $T(\mathbf{CP}^1)$，按照(1)式，它可以描述如下：取流形的迁移函数为

$$\varphi_{01}:\varphi_1(U_0\cap U_1)\longrightarrow\varphi_0(U_0\cap U_1),\quad z\longmapsto 1/z.$$

取其导数 $\varphi_{01}'(z)=-1/z^2$，切丛的迁移函数是

$$U_0\cap U_1\longrightarrow GL(1,\mathbf{C}),$$

$$[z_0,z_1]\longmapsto\varphi_{01}'(\varphi_1[z_0,z_1])=-(z_1/z_0)^2.$$

除了相差一个符号外(这是不关紧要的)，这正是我们的格式中 $n=-2$的情况，即

$$T(\mathbf{CP}^1)=\gamma^{-2}(\mathbf{CP}^1)$$

(我们得到 $n=-2$而不是 $n=2$，这有一点儿麻烦，所以要进行调整并称 $\gamma^{-1}(\mathbf{CP}^1)$为典则丛)。

到现在，我们并不知道是否 $\gamma^n(\mathbf{CP}^1)$这些幂都是不同的丛. 将会看到，确实如此，而且它们就是 $\mathbf{CP}^1$上的全部复线丛. 还会看到，整数 n 有很具体的几何意义，它们首先是由 Hopf 研究的，所以称为 Hopf 不变量.

我们再作一般的考虑，令 $\pi:E\longrightarrow B$ 和 $\pi':E'\longrightarrow B$ 是两个丛，它们在同一个开覆盖$\{U_i\}$(这总是可以作出的)上的局部坐标分别是$\{(U_i,\varphi_i)\}$和$\{(U_i,\varphi_i')\}$. 如果有 $v(B)$范畴中的同构 $f:E\longrightarrow E'$，则对每个 i 均有映射

$$U_i\times F^k\xrightarrow{\varphi_i}E\xrightarrow{f}E'\xrightarrow{\varphi'^{-1}_i}U_i\times F^k.$$

它对每个 $b\in U_i$ 给出 $f_i(b)=\varphi'^{-1}_{ib}\circ f\circ\varphi_{ib}\in GL(F,k)$，映射族

$$U_i\longrightarrow GL(F,k),\quad b\longmapsto f_i(b)$$

称为一个上链(cochain)，若(g_{ij})和(g_{ij}')是 E 和 E' 的迁移函数，显然有以下的上边缘条件(coboundary condition)

$$g_{ij}'\circ f_j=f_i\circ g_{ij}$$

成立. 反之，若(g_{ij})和(g_{ij}')由某个上链(f_i)按上式连接成上边缘关系，则由

$$f(\varphi_i(b,v))=\varphi_i'(b,f_i(b)v)$$

所给出的 $f:E\longrightarrow E'$ 是一适当定义的同构. 于是有

命题3.2 同一底空间 B 上的两个丛 $\pi:E\longrightarrow B$ 和 $\pi':E'\longrightarrow$

B 为同构，当且仅当其迁移函数由同一个上链的上边缘关系所连接.

这就是上面最后一个例子中负号无关紧要的原因. 因为上循环 $g_{01}=(z_1/z_0)^2$ 和 $g_{01}'=-(z_1/z_0)^2$ 是由上链 $f_0(U_0)=1, f_1(U_1)=-1$ 所连接的.

至于上循环、上链、上边缘等等奇怪的名词都是同调论中的行话. 事实上，我们正在作准备，把矢量丛解释为某个上同调类.

§2. 矢量丛上的运算

既然矢量丛就是参数化的矢量空间族，矢量空间中的许多构造都可以推广到矢量丛上来. 这种推广并不总是自然而然的，因为，必须要能肯定其结果还是矢量丛，即是在每个情况下验证由上循环所表示的局部平凡性成立，我们在此举出用得最多的例.

1. 直和

两个矢量空间 V 和 W 的直和 $V\oplus W$ 就是笛卡尔乘积 $V\times W$，其运算则按坐标进行. V 和 W 则视为 $V\oplus W$ 的子空间 $V\oplus\{0\}$ 和 $\{0\}\oplus W$. 于是 $V\oplus W$ 之一点 (v,w) 可以写成 $(v,w)=(v,0)+(0,w)=v+w$. 若 $f:V\longrightarrow V'$, $g:W\longrightarrow W'$ 是线性映射，$f\oplus g:V\oplus W\longrightarrow V'\oplus W'$ 就是线性映射

$$\begin{aligned}(f\oplus g)(v+w)=(f\times g)(v,w)&=(f(v),g(w))\\&=f(v)+g(w).\end{aligned}$$

$f\oplus g$ 用矩阵表示即是分块矩阵

$$\begin{pmatrix}f & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}.$$

令 E 和 E' 是 B 上的矢量丛. 其直和或称 Whitney 和 $E\oplus E'$ 是 $E\times E'$ 的一个子集

$$E\oplus E'=\{(v,v')\in E\times E'\,|\,\pi(v)=\pi'(v')\}.$$

于是其映射是适当定义的：$\rho(v,v')=\pi(v)=\pi'(v')$，而显然 $\rho^{-1}(b)$

$=E_b\times E_b'=E_b\oplus E_b'$，很容易验证 $E\oplus E'$ 确实是一个丛，其迁移函数为$\{g_{ij}\oplus g_{ij}'\}$。

2. 张量积

令 V,V' 和 W 为矢量空间，映射 $f:V\times V'\longrightarrow W$ 若对每个因子都是线性的，则称为双线性的. 张量积仍是一个矢量空间，而将所有的双线性映射都吸收成线性映射，它是由以下的万有性质(universal property)来定义的，张量积是一个矢量空间 $T(V,V')$以及一个双线性映射 $i:V\times V'\longrightarrow T(V,V')$使得任意其它双线性映射都可通过 $T(V,V')$唯一地分解为一个线性映射 $\tilde{f}$ 和 i：$f=\tilde{f}\circ i$ 或用图表示如下

$$\begin{array}{ccc} V\times V' & \xrightarrow{i} & T(V,V') \\ & f\searrow \quad \swarrow \tilde{f} & \\ & W & \end{array}$$

用这种万有性质定义出来的张量积是唯一的，至多相差一个同构. 至于其存在性，令 $F(V\times V')$是由集 $V\times V'$生成的矢量空间. 考虑 $F(V\times V')$中由下面形式的元生成的子空间 H：这些元是$(\lambda_1v_1+\lambda_2v_2,\mu_1v_1'+\mu_2v_2')-\lambda_1\mu_1(v_1,v_1')-\lambda_1\mu_2(v_1,v_2')-\lambda_2\mu_1(v_2,v_1')-\lambda_2\mu_2(v_2,v_2')$，$v_1,v_2\in V$，$v_1',v_2'\in V'$. 于是 $V\otimes V'=F(V,V')/H$ 就是一个张量积，而 $i(v,v')=v\otimes v'$ 是$(v,v')\in F(V,V')$在 $V\otimes V'$ 中的剩余类. 若 $f:V\longrightarrow W$，$g:V'\longrightarrow W'$ 都是线性映射，则映射

$$V\times V'\longrightarrow W\otimes W',\quad (v,v')\longmapsto f(v)\otimes g(v')$$

是双线性的. 因此，它诱导出一个线性映射

$$f\otimes g:V\otimes V'\longrightarrow W\otimes W',$$

并且适合

$$(f\otimes g)(v\otimes v')=f(v)\otimes g(v'),$$

这就是线性映射的张量积. 用更具体的话来说：若$(v_1,\cdots,v_k)$是 V 的基底，$(v_1',\cdots,v_l')$是 V' 的基底，则$(v_i\otimes v_j')$，$1\leqslant i\leqslant k$，$1\leqslant j\leqslant l$ 是 $V\otimes V'$ 的基底(所以 $\dim(V\otimes V')=\dim V\cdot\dim V'$). 于是若 f 由矩阵(f_{κ})表示，g 由矩阵$(g_{\nu\mu})$表示，$f\otimes g$ 的矩阵则由所有的乘积$(f_{\kappa\mu}\cdot$

g_{rr})组成的大矩阵表示. 这些元怎样排列要看基底中的元素的排列. 但是至少有一个简单的情况:若 f 是 1×1 矩阵(f), g 是 1×1 矩阵(g), $f\otimes g$ 也就是 1×1 矩阵(fg).

这当然可以推广到两个以上因子的张量积特别是 k 重张量积

$$T^k(V)=\overbrace{V\otimes V\otimes\cdots\otimes V}^{k}.$$

直和

$$T(V)=\sum_{k=0}^{\infty}T^k(V),$$

其中 $T^0(V)=F=$ 基域,称为 V 的张量代数,以$\otimes$为其乘法.

令 E,E' 为 B 上的矢量丛,各有迁移函数$(g_{ij}),(g_{ij}')$. 张量积 $E\otimes E'$ 定义为具有迁移函数$(g_{ij}\otimes g_{ij}')$的丛. 注意,和直和不同,我们没有描述 $E\otimes E'$ 的全空间. 这是因为没有特别好的办法来做这件事,如果真想要做的话,可以用如下方法描述:作为一个集, $E\otimes E'=$(分离并)$\coprod_{b\in B}E_b\otimes E_b'$ 而且有显然的投影 $E\otimes E'\longrightarrow B$. 至此还没有赋以拓扑,对于每个 i,有映射

$$\psi_i:U_i\times(F^k\otimes F^l)\longrightarrow E\otimes E'$$

$$(b,(v\otimes v'))\longmapsto\varphi_i(b,v)\otimes\varphi_i'(b,v').$$

对于 $E\otimes E'$ 我们赋以使所有 ψ_i 都连续的最大拓扑(称为族(ψ_i)之归纳拓扑(inductive topology)). 于是 $E\otimes E'$ 就真正成为以(U_i,ψ_i)为局部坐标的丛. 很明显,迁移函数还是$(g_{ij}\otimes g_{ij}')$,所以得到的还是同一个张量积.

3. 外积

令 V 和 W 是矢量空间,一个 k 重线性映射 $f:\overbrace{V\times V\times\cdots\times V}^{k\text{次}}\longrightarrow W$,如果当任意两个因子互换时就会变号, f 称为是交代的(alternative). 外积就是具有如下性质的万有的空间:这是一个矢量空间 $\Lambda^k(V)$,并连带一个交代映射

$$i:V\times\cdots\times V\longrightarrow\Lambda^k(V),$$

使得任一个别的 k 重线性交代映射 f 都能通过 $\Lambda^k(V)$而唯一地分

解出一个线性映射 $\bar{f}: \Lambda^k(V) \longrightarrow W$ 使 $f = \bar{f} \circ i$. 至于其存在性，取 k 重张量积 $T^k(V)$，在其中取所有形式为 $v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_j \otimes \cdots \otimes v_k + v_1 \otimes \cdots \otimes v_j \otimes \cdots \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_k$（即 v_i, v_j 对换）元素所生成的子空间 K. 于是 $\Lambda^k(V) = T^k(V)/K$. 若 $f: V \longrightarrow V'$ 是线性映射

$$V \times \cdots \times V \longrightarrow \Lambda^k(V')$$

$$(v_1, \cdots, v_k) \longmapsto f(v_1) \wedge \cdots \wedge f(v_k)$$

的一个交代映射. 于是它诱导出一个线性映射

$$\Lambda^k f: \Lambda^k(V) \longrightarrow \Lambda^k(V'),$$

它适合

$$\Lambda^k f(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = f(v_1) \wedge \cdots \wedge f(v_k),$$

这里 $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ 是 $T^k(V)$ 中的 $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ 在 $\Lambda^k(V)$ 中的等价类. 直和

$$\Lambda(V) = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^k(V)$$

也是一个代数而以 $\wedge$ 为乘法. 这就是 V 所生成的外代数. 若 $(v_1, \cdots, v_l)$ 是 V 的一个基底，则

$$v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k}, \ 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant l$$

这种形状的元构成 $\Lambda^k(V)$ 的一个基底，所以

$$\Lambda^k(V) = \{0\}, \quad k > l,$$

而且

$$\dim \Lambda^k(V) = \binom{l}{k}, \ k \leqslant l.$$

和 $T(V)$ 不同，$\Lambda(V)$ 是有限维代数，其维数

$$\dim \Lambda(V) = \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} = 2^l.$$

外代数 $\Lambda(V)$ 是用来讨论定向和行列式问题的，两个有序基 $(v_1, \cdots, v_l)$ 和 $(v_1', \cdots, v_l')$ 是等价的，如果下面的展开式

$$v_i' = \sum_j A_{ij} v_j' \tag{1}$$

有正行列式(于此基域是实数域). 这是一个等价关系,而等价类 $[v_1,\cdots,v_l]$是一个定向. 因为 $\det(A_{ij})$或正或负,所以一个矢量空间恰好有两个定向. 例如 $\mathbf{R}^3$中就有左手系和右手系.

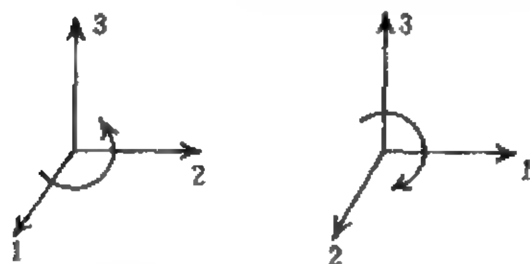


图 3-2

最高阶数的外积 $\Lambda^l(V)$之维数=1, $v_1\wedge\cdots\wedge v_l$ 为基底, 所以必定有一个纯量 A 使得

$v_1'\wedge\cdots\wedge v_l'=Av_1\wedge\cdots\wedge v_l.$

将式(1)代入,并且赋以乘法 $\wedge$ 的符号规律,即得 $A=\det(A_{ij})$.

若 E 是 B 上的矢量丛而且有迁移函数(g_{ij}),我们定义 $\Lambda^l(E)$为具有迁移函数$(\Lambda^l(g_{ij}))$的丛. 当然也可以描述全空间,但这几乎没有什么好处,倒是应该对 $T^s_r(E)$和 $\Lambda^l(E)$检验一下定义的合理性,即迁移函数确实满足上循环条件而且与上边缘相容(compatible).

4. 对偶丛

令 V 为基域 F 的矢量空间,线性映射 $f:V\longrightarrow F$ 称为线性泛函,全体线性泛函之集 V^* 本身也是一个矢量空间,与 V 维数相同,这就是 V 的对偶空间. 对于 $v^*\in V^*$ 和 $v\in V$,记

$$v^*(v)=\langle v^*,v\rangle=\langle v,v^*\rangle.$$

如果$(v_1,\cdots,v_l)$是 V 的一个基底,其对偶基$(v_1^*,\cdots,v_l^*)$就是 V^*的适合以下条件的基底

$$\langle v_i^*,v_j\rangle=\delta_{ij}.$$

若 $f:V\longrightarrow W$ 是线性映射,则它诱导出一个线性映射 $f^*:W^*\longrightarrow V^*$ 如下:

$$f^*(w^*)=w^*\circ f.$$

令$(v_1,\cdots,v_l)$和$(w_1,\cdots,w_m)$各为 V 和 W 的基底,$(v_1^*,\cdots,v_l^*)$, $(w_1^*,\cdots,w_m^*)$是 V^* 和 W^* 中的对偶基,设在这些基底下 f 之矩阵为(f_{ij})即

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^{m} f_{ij} w_j$$

(故(f_{ij})是$(l\times m)$矩阵). 很容易算出,f^*在对偶基下的矩阵是(f_{ij})的转置,记为

$$(f^*) = (f)^t,$$

或简记为$f^*=f^t$.

令E是B上的丛,其迁移函数是(g_{ij}),其对偶丛定义为以

$$(h_{ij}) = ((g_{ij})^{-1})^t$$

为迁移函数的丛. 加进逆的理由是为了保证(h_{ij})满足上循环条件. 否则次序不对,注意,张量积和对偶丛运算正是例4(列举CP^n之一切线丛)时用到的.

除了对一定固定底空间B上的丛的运算之外,还有一个很有用的更换参数空间的运算——“拉回”(pull-back). 情况是这样的:设有空间B上的一个丛$\pi:E\longrightarrow B$,空间A和映射$f:A\longrightarrow B$. 我们要把B上的丛移植成A上的丛$f^*(E)$,它和E之间由一个f上的丛映射$\tilde{f}:f^*(E)\longrightarrow E$相联系(按定义,$\tilde{f}$在每个纤维上都是同构),即图

$$\begin{array}{ccc} f^*(E) & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{\pi}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

是可换的. 很容易直接作这个丛:$f^*(E)\subset A\times E$是由下式定义的子集

$$f^*(E) = \{(a,u)\,|\,a\in A, u\in E, f(a)=\pi(u)\},$$

$$\tilde{f}(a,u) = u, \quad \tilde{\pi}(a,u) = a.$$

用局部坐标表示,若$\{(U_i,\varphi_i)\}$是E的局部坐标,其迁移函数是(g_{ij}),则$f^*(E)$有一个坐标系$(\tilde{U}_i,\tilde{\varphi}_i)$,其中$\tilde{U}_i=f^{-1}(U_i)$,

$$\tilde{\varphi}_i:\tilde{U}_i\times F^n \longrightarrow f^*(E),$$

$$(a,v)\longmapsto (a,\varphi_i(f(a),v)),$$

迁移函数则是$\tilde{g}_{ij}=g_{ij}\circ f$.

在下面的形式化陈述中拉回运算代替了带有同构的丛映射：

命题3.3 设已知空间 A 和 B 上的丛 $E' \longrightarrow A$ 和 $E \longrightarrow B$，则存在一个丛映射 $\bar{f}: E' \longrightarrow E$ iff E'（在 $v(A)$ 范畴中）同构于对应某个映射 $f: A \longrightarrow B$ 的 $f^*(E)$。

两个简单的但是重要的说明．首先，拉回一个丛将趋向于使丛"弱化"，意思是 $f^*(E)$ 不如 E 本身那么复杂．例如，不论 E 是什么丛，用一个常值映射拉回它，总是得到一个平凡丛．其次，一般地并没有一种自然的办法来推前(push-forward)一个丛，但是我们将看到，在一些特殊的情况下却可以做到这一点．

§3. 丛的正合序列，分裂和一的分割

我们讨论有关矢量空间的初等情况：令 V 为矢量空间，子空间 $V_1 \subset V$，我们可以作商空间：在 V 中引进等价关系～，$v_1 \sim v_2$ iff $v_1 - v_2 \in V_1$，在商集 $V_2 = V/\sim$ 中令 $[v_1]+[v_2]=[v_1+v_2]$，$\lambda[v]=[\lambda v]$，使它成为一个矢量空间．这就是商空间 V_2，记作 V/V_1．

矢量空间和线性映射的序列

$$\longrightarrow V_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} V_i \xrightarrow{f_i} V_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

称为在 V_i 处的正合序列(exact sequence)如果 $\mathrm{Im} f_{i-1} = \ker f_i$．

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} V_3 \longrightarrow 0$$

这种形状的正合序列称为短正合序列．例如，若 $V_1 \subset V$ 是上面讲的子空间，则包含映射 $i: V_1 \longrightarrow V$ 和投影映射 $\pi: V \longrightarrow V/V_1$ 合起来成为一个短正合序列

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{i} V \xrightarrow{\pi} V/V_1 \longrightarrow 0.$$

反过来，任何正合序列

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} V_3 \longrightarrow 0$$

也都可以看成上面的那个子空间：f_1是1-1的，故V_1可以与$f_1(V_1)\subset V_2$看成一样，f_2是满射并且诱导出同构$V_2/\ker f_2=V_2/\operatorname{Im} f_1=V_2/V_1=V_3$．所以正合序列和子空间—商空间对是相同的．

这些概念可以直接推广到矢量丛上．若E是B上的矢量丛，子集$E_1\subset E$如果其本身也是B上的一个矢量丛而且对每一个$b\in B$，$E_{1b}\subset E_b$是一个子空间，则E_1是E的子丛．这时又可以在E上定义等价关系$v_1\sim v_2$ iff （1）$\pi(v_1)=\pi(v_2)$（$\pi:E\longrightarrow B$是投影）；（2）$v_1-v_2\in E_1$．于是$E/E_1=E/\sim$可以显然的方式作成一个矢量丛即商丛．定义$\tilde{\pi}:E/E_1\longrightarrow B$为$\tilde{\pi}[v]=\pi(v)$．于是有$\tilde{\pi}^{-1}(b)=E_b/E_{1b}$是一个矢量空间．设$U\subset B$是开集并使$E$和$E_1$在其上为平凡的．令

$$\begin{array}{ccc} U\times F^k & \xrightarrow{\psi} & E_1 \\ \downarrow & & \downarrow i \\ U\times F^n & \xrightarrow{\varphi} & E \end{array}$$

各为E和E_1的局部坐标．令$(e_1,\cdots,e_n)$是F^n的基底而其前k个矢量$(e_1,\cdots,e_k)$是F^k的基底，于是，映射$\varphi^{-1}\circ i\circ\psi$之形式是

$$\varphi^{-1}\circ i\circ\psi(b,e_i)=(b,\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}(b)e_j),\quad i=1,\cdots,k.$$

因为$E_{1b}\subset E_b$是k维子空间，所以$k\times n$矩阵$(\lambda_{ij}(b))$对每一点$b\in U$秩都是k．若我们设U充分小，可设$k\times k$矩阵$(\lambda_{ij}(b))$，$1\leqslant i\leqslant k$，$1\leqslant j\leqslant k$非异，定义$U\times F^{n-k}\xrightarrow{\tilde{\varphi}}E/E_1$为

$$\tilde{\varphi}(b,e_i)=[\varphi(b,e_i)],\quad i=k+1,\cdots,n,$$

就给出了E/E_1的局部坐标．要点在于矢量$(\tilde{\varphi}(b,e_i))$，$i=k+1$，$\cdots$，n对每一点$b\in U$都构成$(E/E_1)_b$的基底，即是说$n\times n$矩阵

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11}(b) & \cdots & \lambda_{1k}(b) & \lambda_{1,k+1}(b) & \cdots & \lambda_{1n}(b) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{k1}(b) & \cdots & \lambda_{kk}(b) & \lambda_{k,k+1}(b) & \cdots & \lambda_{kn}(b) \\ & 0 & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

是非异的．假设左上角的 $k\times k$ 方块为非异后，这是显然的．

在同一底空间 B 上的一串矢量丛及其同态

$$\longrightarrow E_{i-1}\xrightarrow{f_{i-1}}E_i\xrightarrow{f_i}E_{i+1}\longrightarrow\cdots$$

称为正合的，如果对每点 $b\in B$，序列

$$\longrightarrow(E_{i-1})_b\xrightarrow{f_{i-1}}(E_i)_b\xrightarrow{f_i}(E_{i+1})_b\longrightarrow\cdots$$

和前面一样，丛的短正合序列

$$0\longrightarrow E_1\xrightarrow{f_1}E_2\xrightarrow{f_2}E_3\longrightarrow 0$$

相当于 E_1可以看作 E_2的子丛，而 E_3可看成商丛 E_2/E_1．

我们再来讨论有关矢量空间的另两个简单的情况．令 $V_1\subset V$ 是一个子空间而 $(e_1,\cdots,e_k)$ 是 V_1的基底，大家知道可以加上一些矢量 $e_{k+1},\cdots,e_n$ 使大的矢量组 $(e_1,\cdots,e_k,e_{k+1},\cdots,e_n)$ 是全空间 V 的基底．剩余类（$[e_{k+1}],\cdots,[e_n]$）构成 V/V_1的基底，令 $V_2\subset V$ 是 $(e_{k+1},\cdots,e_n)$ 所张的子空间，则映射

$$\lambda: V/V_1\longrightarrow V,\ [e_i]\longmapsto e_i,\ i=k+1,\cdots,n$$

将商空间 V/V_1与子空间 V_2等同起来．从我们的作法有 $V=V_1\oplus V_2$，所以我们可以说 $V\simeq V_1\oplus V/V_1$．子空间 V_2 称为 V_1 的补 (compliment)．它不是唯一的，V_2的不同取法反映为 λ 的不同取法．用正合序列的语言来说，有映射

$$0\longrightarrow V_1\xrightarrow[i]{}V\underset{\pi}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}}V/V_1\longrightarrow 0,$$

$\pi\lambda=1$，我们称 λ 为分裂 (splitting) 映射或称为 π 的提升．更一般地说，短正合序列中的分裂映射

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow[f_1]{} V_2 \underset{f_2}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} V_3 \longrightarrow 0,$$

即适合 $f_2\lambda=1$ 的映射．这时它给出一个同构

$$V_2 \longrightarrow V_1 \oplus V_3,\quad v \longmapsto (v-\lambda f_2(v), \lambda f_2(v)).\ ^*$$

从上面所说，分裂 λ 总是存在的．

用类似的说法，矢量丛的短正合序列

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow[f_1]{} E_2 \underset{f_2}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} E_3 \longrightarrow 0$$

的分裂映射 λ 是丛的同态，而且适合 $f_2\lambda=1$．如果分裂映射存在，和上面完全一样，我们有丛同构

$$E_2 \longrightarrow E_1 \oplus E_3,\quad v \longmapsto (v-\lambda f_2(v), \lambda f_2(v)).$$

每一个矢量丛的短正合序列都能分裂吗？答是可能行也可能不行，要看处理的是什么范畴，这是一个我们至今还没有讨论过的新的问题．但是我们会看到，它将成为一个决定的因素．

不失一般性，考虑一个子丛—商丛情况下的短正合序列

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow[i]{} E \underset{\pi}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} E/E_1 \longrightarrow 0,$$

并且讨论分裂映射 λ 的存在问题．

第一个事实是，这种分裂是局部地，即如果把丛限制在一个小开集 $U\subset B$ 上，它总是存在的，在我们关于 E/E_1 的局部平凡性的讨论中已经隐含了这一点．保持前面我们所用的记号，取一个小开集 $U\subset B$，使 E 和 E_1 在 U 上是平凡的，而且 $k\times n$ 矩阵 $(\lambda_{ij}(b))$ 之前 k 列组成非异的 $k\times k$ 矩阵．我们已经看到，对于每个 $b\in U$，下面 $n-k$ 个矢量

$$\widetilde{\varphi}(b,e_i) = [\varphi(b,e_i)],\quad i=k+1,\cdots,n$$

---

* $v-\lambda f_2(v)\in V_1$？$\lambda f_2(v)\in V_3$？ cf. A. Dold, Lectures on Algebraic Topology. pp 9—10.

成为空间 $(E/E_1)_b$ 之一个基底. 所以，每个矢量 $\tilde{v}\in (E/E_1)|_{U}$ 都可以唯一地表示为

$$\tilde{v}=\sum_{i=k+1}^{n}\lambda_i\widetilde{\varphi(b,e_i)}.$$

而我们就定义 λ 为

$$\lambda(\tilde{v})=\sum_{i=k+1}^{n}\lambda_i\varphi(b,e_i),$$

因为 λ_i 和 b 连续地依赖于 $\tilde{v}$, λ 是连续线性映射，而且适合 $\pi\lambda=1$.

于是，我们可以用开覆盖 $\{U_i\}$ 来盖满底空间 B，并且对每个 U_i 定义局部分裂 λ_i: $(E/E_1)|_{U_i}\longrightarrow E|_{U_i}$. 但是，$\lambda_i$ 之定义依赖于 E_1 和 E 的局部坐标，所以，没有理由相信，在 $U_i\cap U_j$ 上 λ_i 会和 λ_j 重合. 这就引导到一个今后会一再出现的情况：我们已经有了一族局部的数据，能不能造出一个整体的解答，答案要视问题而定. 但是，有时只对底空间 B 加上很温和的拓扑条件——一的分割就够了，介绍如下.

对于实值函数 $\lambda: B\longrightarrow\mathbf{R}$，$\lambda$ 的支集定义为集

$$\operatorname{supp}(\lambda)=\overline{\{b\mid\lambda(b)\neq 0\}},$$

一横表示闭包. 于是 $b\notin\operatorname{supp}(\lambda)$ ($\notin$ —— 不属于) iff b 有一邻域 U 使 λ 在其上恒为零.

如果每点 $b\in B$ 均有一邻域 U 只与有限多个 U_i 相交，则 B 的开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$ 称为局部有限的. 给出这样一个局部有限的开覆盖，从属于它的一的分割就是一族实值的非负函数 $(\lambda_i)_{i\in I}$ (指标集与前相同)，定义在 B 上而且

(1) 对每个 $i\in I$, $\operatorname{supp}(\lambda_i)\subset U_i$,

(2) 对每一点 $b\in B$, $\sum_{i\in I}\lambda_i(b)=1$.

因为对每个 $b\in B$, 只有有限多个 $\lambda_i(b)$ 不为0，所以第二个条件是有意义的.

我们需要的情况是

(1)　每个开覆盖都有一个局部有限的加细 (refinement).

(2) 每个局部有限的开覆盖都有从属于它的一的分割.

因为这个情况出现得如此频繁，所以适合于它的空间有了一个名称"仿紧"(paracompact)〔事实上，(1) 蕴涵 (2)〕. 我们现在不讨论仿紧性的细节. 我们首先关心的是流形，对于流形，稍加一点条件，如第二可数性，就能使它们成为仿紧的，这一点(还有一些其它的)将在附录中讨论. 以后都假设我们的流形有仿紧性.

再回到分裂问题，我们有一个开覆盖 $\{U_i\}$，假设它已是局部有限的，在每一个 U_i 上都有一个局部分裂 $\lambda_i:(E/E_1)|_{U_i}\longrightarrow E|_{U_i}$. 现在只需取从属于 $\{U_i\}$ 的一的分割 $\{\rho_i\}$，即可定义一个整体分裂 $\lambda: E/E_1\longrightarrow E$ 如下

$$\lambda(\tilde{v}) = \sum \rho_i(\hat{\pi}\tilde{v})\lambda_i(\tilde{v}).$$

虽然 λ_i 只定义在 U_i 上，上式仍是有意义的，因为如果 $\hat{\pi}(\tilde{v}) \notin U_i$，则一定有 $\rho(\hat{\pi}(\tilde{v})) = 0$，和通常一样，由于局部有限性，无限和也是有意义的. 最后，对于固定的 $b=\hat{\pi}(\tilde{v})$，λ 显然是线性的. 由于 λ 是适当定义的同态，当我们作用以 π 时，一的分割就起作用：

$$\begin{aligned}\pi\lambda(\tilde{v}) &= \pi\left(\sum \rho_i(\hat{\pi}(\tilde{v}))\lambda_i(\tilde{v})\right) = \sum \rho_i(\hat{\pi}(\tilde{v}))\pi\lambda_i(\tilde{v})\\ &= \sum \rho_i(\hat{\pi}(\tilde{v}))\tilde{v} = \left(\sum \rho_i(\hat{\pi}(\tilde{v}))\right)\tilde{v} = \tilde{v},\end{aligned}$$

其中

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\pi} & E/E_1 \\ & \hat{\pi}\searrow \quad \swarrow\hat{\pi} & \\ & B & \end{array}$$

由此说明 λ 确是 π 的分裂. 因此，整体的分裂问题解决了. 不要得出一个错误的印象，以为凡局部的东西必可用一的分割粘成整体的解答，我们之所以能成功是因为我们所要求的并不是太苛刻，只要任何一个整体分裂即可. 而一的分割在这种情况下是很好的.

现在必须讨论丛的范畴. 我们将要处理的对象大部分属于三

个范畴：连续的（C^0），光滑的（C^∞）和解析的（C^ω）．我们对丛所给的定义是C^0范畴的，即全空间、底空间只是拓扑空间，投影、局部坐标映射、同态等等只是连续映射．显然地可以修改定义，要求有所有的空间都是C^∞流形，所有的映射都是C^∞映射，这样我们就得到C^∞-丛的范畴．例如一个C^∞流形的切丛是一个C^∞-丛．同样，有C^ω-丛的范畴．这很容易看到，§2中定义的一切运算都将把丛保留在同一范畴中，我们刚才所作的正是确定了C^0-范畴中的分裂的存在．很清楚只要我们有C^∞和C^ω的一的分割，即若分割中的函数是C^∞或C^ω的，则对C^∞和C^ω范畴，刚才所做的也可适用．正是在这里C^ω-范畴和C^∞-范畴间存在本质的不同．我们将在附录中证明在光滑流形上恒有光滑的一的分割存在，但是C^ω流形上的C^ω的一的分割决不可能．这个尖锐的区别的理由在于解析拓展原理．

§4. 法　丛

令$N\subset M$是一子流形它的包含映射$i:N\longrightarrow M$诱导出切丛之间的一个同态映射

$$\begin{array}{ccc} T(N) & \xrightarrow{di} & T(M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ N & \xrightarrow{i} & M \end{array}$$

或者，如果我们在同一个底空间上，就诱导出同态$T(N)\longrightarrow i^*T(M)$．现在$i^*T(M)=\{(P,u)\mid P\in N, u\in T_P(M)\}$．只不过是$T(M)$限制在$N$上，记作$T(M)|_N$．同态$T(N)\longrightarrow T(M)|_N$是单射，用局部坐标就很容易看到这一点．我们可以在$P\in M$点选取$M$的局部坐标$(U,(x_1,\cdots,x_n))$，使得$(U\cap N,(x_1,\cdots,x_k))$，$k\leqslant n$是$N$在$P$点的局部坐标（见第一章定义）．由第二章知道$T_P(M)$有基底$(\partial/$

$\partial x_1, \cdots, \partial/\partial x_n)$，而 $T_p(N)$则有基底$(\partial/\partial x_1, \cdots, \partial/\partial x_k)$，所以 $T_p(N) \subset T_p(M)$是一个子空间. 商丛 $T(M)|_N/T(N)$称 N 在 M 中的法丛，记作$\tau(N, M)$. 由分裂定理，我们有关系式

$$T(N) \oplus \tau(N, M) = T(M)|_N.$$

事实上，若 E 是 N 上任意的丛使得

$$T(N) \oplus E = T(M)|_N,$$

则恒有 $E \simeq \dfrac{T(M)|_N}{T(N)} = \tau(N, M)$.

例

(1) 计算嵌入 $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$的法丛. 首先切丛 $T(\mathbf{R}^{n+1}) = \mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R}^{n+1}$ 是平凡丛，因此 $T(\mathbf{R}^{n+1})|_{S^n} = S^n \times \mathbf{R}^{n+1}$也是平凡丛. 前面已经看到，$T(S^n)$可以看成是 $S^n \times \mathbf{R}^{n+1}$的一个子集

$$T(S^n) = \{(x, v) | x \in S^n, v \in \mathbf{R}^{n+1}, \langle x, v \rangle = 0\}.$$

就丛的关系来说，这把 $T(S^n) \subset T(\mathbf{R}^{n+1})|_{S^n}$描述为一个子丛. 子是不难找到法丛：已给 $x \in S^n$，$T_x(S^n) = \{(x, v) | \langle x, v \rangle = 0\} \subset T_x(\mathbf{R}^{n+1}) = \{(x, v) | v \in \mathbf{R}^{n+1}\}$. 方程$\langle x, v \rangle = 0$表示正交于 x 的矢量之超平面. 求法矢量就是寻找一个补空间，在我们的情况下就是由 x 所决定的直线，即

$$N_x = \{(x, v) | x \in S^n, v \in \mathbf{R}^{n+1}, v = \lambda x\},$$

或

$$\tau(S^n, \mathbf{R}^{n+1}) = \{(x, \lambda x) | x \in S^n, \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

容易验证这正是 S^n 上的一个矢量丛. 另外，这个丛是平凡的，因为有明显的等同关系

$$S^n \times \mathbf{R} \longrightarrow \tau(S^n, \mathbf{R}^{n+1}),$$

$$(x, \lambda) \longmapsto (x, \lambda x).$$

这引到以下的重要事实，令 ε 表示 S^n 上的平凡线丛 $S^n \times \mathbf{R}$. 我们刚才证明的就是 $\tau(S^n, \mathbf{R}^{n+1}) = \varepsilon$，显然，平凡的$(n+1)$-丛 $T(\mathbf{R}^{n+1})|_{S^n} = S^n \times \mathbf{R}^{n+1}$正是 ε 和自己的$(n+1)$重 Whitney 和，记作$(n+1)\varepsilon$. 因此，切丛—法丛的基本方程可以表示为

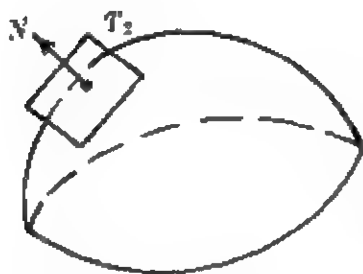


图 3—3

$$T(S^n) \oplus \varepsilon = (n+1)\varepsilon = n\varepsilon \oplus \varepsilon.$$

另一方面，足以相信 $T(S^n)$ 不是平凡的（至少当 $n=2$ 时），于是 $T(S^n)\neq n\varepsilon$，换言之，对于丛上的 Whitney 和，相消律并不成立．这显然是引人注意的，它反映了矢量丛的意思就是如何将矢量空间族参数化这样一个基本点．在 $T(\mathbf{R}^{n+1})|_{S^n}=S^n\times\mathbf{R}^{n+1}=(n+1)\varepsilon$ 中，每个因子 ε 用一个在 S^n 上平行移动的坐标轴表示．但是平凡丛 $\varepsilon=\tau(S^n,\mathbf{R}^{n+1})$ 并不是沿着某个坐标轴而位于 $(n+1)\varepsilon$ 内的，所以它的补也不一定就是某个坐标轴的补．

(2) 方程 $T(S^n)\oplus\varepsilon=(n+1)\varepsilon$ 可以推到射影空间 $\mathbf{P}^n$ 上去．由第一章，把 S^n 上之点与对径点 $-x\in S$ 视为同一点，$\mathbf{P}^n$ 就可以看作商空间．因此我们有投影 $\pi:S^n\longrightarrow\mathbf{P}^n$ 及其导数

$$\begin{array}{ccc} T(S^n) & \xrightarrow{d\pi} & T(\mathbf{P}^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^n & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{P}^n \end{array}$$

π 局部地是一个微分同胚，所以 $d\pi$ 在每一个纤维上都是同构，即是丛映射．由于 π 是全射，$d\pi$ 也是全射，所以 $T(\mathbf{P}^n)$ 可以从 $T(S^n)$ 用某种等同化得到．不难找到这个等同化：设 $(x,v),(x_1,v_1)\in T(S^n)$ 使得 $d\pi(x,v)=d\pi(x_1,v_1)$．于是 $\pi(x)=\pi(x_1)$，$x=x_1$ 或 $x=-x_1$，在前一个情况下，(x,v) 和 (x_1,v_1) 在同一个纤维中，所以 $v=v_1$；在后一情况下 $x_1=-x=Ax$，这里 $A:S^n\longrightarrow S^n$ 是对径映射 $Ax=-x$．于是 $dA(x,v)$ 和 (x_1,v_1) 在同一个纤维里，因 $\pi\circ A=\pi_1$，所以有

$$d\pi dA(x,v) = d\pi_1(x,v) = d\pi(x_1,v_1).$$

从而 $(x_1,v_1)=dA(x,v)$．dA 是容易计算的，因 $dA(x,v)=(-x,-v)$，所以 $v_1=-v$．于是 $T(\mathbf{P}^n)$ 是在 $T(S^n)$ 中将 (x,v) 和 $(-x,-v)$ 等同起来所得的商空间．

当我们把 $T(S^n)$ 放在 $S^n\times\mathbf{R}^{n+1}$ 中时，也可以对 $S^n\times\mathbf{R}^{n+1}$ 实行这种等同，于是得到 $\mathbf{P}^n$ 上的一个丛 E，我们可以如下说明它，把 $S^n\times\mathbf{R}^{n+1}$ 看做 $n+1$ 个 $S^n\times\mathbf{R}$. 在 $S^n\times\mathbf{R}$ 上将 (x,v) 和 $(-x,-v)$ 等同，得到 $\mathbf{P}^n$ 上的丛记作 ξ. 显然，$E=(n+1)\xi$. 至于 ξ，由 §1 知道 $\mathbf{P}^n$ 上的典则线丛 $\gamma(\mathbf{P}^n)$ 之定义是

$$\gamma(\mathbf{P}^n)=\{([x],u)\mid[x]\in\mathbf{P}^n,u\in\mathbf{R}^{n+1},u=\lambda x,\lambda\text{ 为某实数}\}.$$

显然有一个全射

$$S^n\times\mathbf{R}\longrightarrow\gamma(\mathbf{P}^n),\quad(x,\lambda)\longmapsto([x],\lambda x).$$

若 $([x],\lambda x)=([x_1],\lambda_1x_1)$，则或 $x=x_1$ 从而 $\lambda=\lambda_1$ 或者 $x=-x_1$ 从而 $\lambda=-\lambda_1$，换言之，我们恰好有 $\xi=\gamma(\mathbf{P}^n)$. 最后，我们有法丛 $N=\{(x,\lambda x)\mid x\in S^n,\lambda\in\mathbf{R}\}\subset S^n\times\mathbf{R}^{n+1}$ 和等价关系

$$S^n\times\mathbf{R}\longrightarrow N,\quad(x,\lambda)\longmapsto(x,\lambda x).$$

当 $(x,\lambda)\longrightarrow(-x,\lambda)$ 时，有 $(x,\lambda x)\longrightarrow(-x,-\lambda x)$ 所得的丛正是 $\mathbf{P}^n$ 上的平凡丛，我们仍记为 ε.

于是，在作了适当的等同化后，S^n 上的方程 $T(S^n)\oplus N=(n+1)\varepsilon$ 成为

$$T(\mathbf{P}^n)\oplus\varepsilon=(n+1)\gamma(\mathbf{P}^n).$$

我们已经知道，从这里"解"不出 $T(\mathbf{P}^n)$，但是我们将看到，这仍然是一个极有用的关系.

(3) 计算 $\mathbf{P}^{n-1}\subset\mathbf{P}^n$ 的法丛 $\tau(\mathbf{P}^{n-1},\mathbf{P}^n)$. 我们还是从 $S^{n-1}\subset S^n$ 开始，因为

$$S^{n-1}=\{x=(x_0,x_1,\cdots,x_n)\in S^n\mid x_n=0\}$$

和前面一样，有

$$T(S^n)|_{S^{n-1}}=\{(x,u)\mid x\in S^{n-1},u\in\mathbf{R}^{n+1},\langle x,u\rangle=0\},$$

在其中可以找到子丛 $T(S^{n-1})\subset T(S^n)|_{S^{n-1}}$. 回想第二章，在 $T(S^{n-1})$ 中，取一曲线 $\alpha:I\longrightarrow S^{n-1}$ 然后再取 $\alpha'(0)$，但是 $\alpha(t)\in S^{n-1}$ 就意味 $\alpha(t)_n=0$，于是 $\alpha'(0)_n=0$，即

$$T(S^{n-1})=\{(x,u)\mid x\in S^{n-1},u\in\mathbf{R}^{n+1},\langle x,u\rangle=0\text{ 且 }u_n=0\}.$$

由此，有

$$\tau(S^{n-1},S^n)=\{(x,u)\mid x\in S^{n-1},u\in \mathbb{R}^{n+1},u_0=\cdots=u_{n-1}=0\}.$$

它又是平凡的

$$S^{n-1}\times\mathbb{R}\longrightarrow\tau(S^{n-1},S^n)$$
$$(x,\lambda)\longmapsto(x,(0,\cdots,0,\lambda)).$$

在 $T(S^n)$中作等同$(x,u)\longrightarrow(-x,-u)$,即在 $S^{n-1}\times\mathbb{R}$ 中得到$(x,\lambda)\longrightarrow(-x,-\lambda)$. 在等同化后,有

$$T(\mathbb{P}^{n-1})\oplus\gamma(\mathbb{P}^{n-1})=T(\mathbb{P}^n).$$

因此 $\tau(\mathbb{P}^{n-1},\mathbb{P}^n)=\gamma(\mathbb{P}^{n-1})$.

§5. 仿紧性与一的分割

空间 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$ 称为局部有限的,如果每一点 $x\in X$ 均有一个邻域 U 使得 $\mathscr{U}$ 中与 U 相交的集 V:$V\cap U\neq\varnothing$为数有限. 这个概念在谈到诸如一的分割之类时是有用的,在这里需要讲到一些和,它在每点附近都是有限的,但项数随点而变.

很容易得到一的分割. 例如 $\mathscr{U}$ 仅含一个元,即全空间时,所以真正的重点是对于任意"细"的局部有限覆盖. 这一点很象紧性的想法. 形式的想法如下:X 是仿紧的,如果它的每一个开覆盖都有局部有限的加细(回忆一下,所谓 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的加细即每个元 $V\in\mathscr{V}$ 都包含于某个 $U\in\mathscr{U}$ 内).

仿紧概念有许多细节,例如这种空间一定是正规(normal)的,但其逆不一定真. 还有,如果 X 是仿紧的,则它的任一个局部有限的开覆盖自动地有一个一的分割解,因此,我们在§3中所加的条件是多余的. 我们的兴趣并不在于进入这些细节,而是很快地指出流形成为仿紧的合理的条件并且指出怎样作出光滑的一的分割. 我们需要的条件就是第二可数性. 这肯定是一个"合理的"条件(毕竟 $\mathbb{R}^n$ 是第二可数的). 我们需要的点集论方面的事实是

引理 第二可数的局部紧空间 X 必为仿紧的.

证 令$\{U_i\}$是可数开集基而且对每个 i,$\bar{U}_i$ 都是紧集. 依次定

义紧集 A_i 如下：$A_1=\overline{U_1}$. 在定义 A_i 后，令 k 为使 $A_i\subset U_1\cup\cdots\cup U_k$ 成立的最小整数，于是定义

$$A_{i+1}=\overline{U_1\cup\cdots\cup U_k\cup U_{i+1}},$$

有 $A_i\subset \mathrm{Int}A_{i+1}$ 而且 $\bigcup A_i=X$.

令 $\mathscr{V}$ 为任一开覆盖，由作法紧集 $A_{i+1}-\mathrm{Int}A_i$ 包含在开集 $\mathrm{Int}A_{i+2}-A_{i-1}$ 内. 于是取有限个开集 $W_1,\cdots,W_l$ 使得每个 W_j 都在某个 $V\in\mathscr{V}$ 中，而且它们都包含在 $\mathrm{Int}A_{i+2}-A_{i-1}$ 内，且 $W_1\cup\cdots\cup W_l\supset A_{i+1}-\mathrm{Int}A_i$. 所有这些 W 合成为一个开覆盖 $\mathscr{W}$. $\mathscr{W}$ 显然加细 $\mathscr{V}$. 因为一点的任一紧邻域都含在某个 A_i 内，所以对 $j>i+1$，它不会与任意的 $W\subset\mathrm{Int}A_{j+2}-A_{j-1}$ 相交，因此只与有限多个 W 相交.

如果上述 X 是一个光滑流形，只要稍微细心一点就能使每个 W 是一坐标邻域 (W,h) 而且 $h(W)\supset\mathbf{R}^n$ 中的一个半径为3的闭球，而且 $\{h(\text{单位开集})=W'\}$ 仍然覆盖 X.

引理 有一个光滑函数 $\varphi:\mathbf{R}^n\longrightarrow\mathbf{R}$ 存在且使得

(1) $\varphi(x)=1$，当 $|x|\leqslant 1$ 时，

(2) $\varphi(x)=0$，当 $|x|\geqslant 2$ 时，

(3) $0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$.

设引理成立，则对每个 $W\in\mathscr{W}$ 显然有一个光滑函数 $\mu_W:X\longrightarrow\mathbf{R}$ 使得

$$\mathrm{supp}\,\mu_W\subset W,\quad \mu_W|_{W'}=1,\quad 0\leqslant\mu_W\leqslant 1.$$

于是 $\sum\mu_W$ 永不为0，而可作一的分割 $\{\lambda_W\}$ 如下：

$$\lambda_W=\mu_W/\sum\mu_W.$$

证 引理的关键是一个 C^∞ 函数的熟知的例子，它与0有无限阶接触但又不是实解析的. 可以把它简单地明显地写为

$$q(t)=\begin{cases}e^{-1/t}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0.\end{cases}$$

若反复微分 $q(t)$，得

$$e^{-1/t}p(1/t),$$

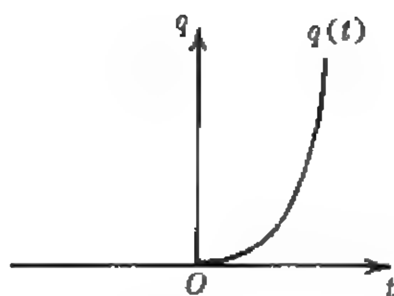


图 3—4

其中 $p(t)$是多项式. 因为对任一正整数,当 $t \longrightarrow 0$时恒有

$$e^{-1/t}/t^k \longrightarrow 0,$$

所以函数 $q(t)$有一切阶导数,它是 C^∞的,$q(t)$显然不可能是实解析的. 因为否则它将在0的一个邻域中恒等于0. 令

$$\psi(t) = \frac{q(t+2)q(2-t)}{q(t+2)q(2-t)+q(t-1)+q(-t-1)}$$

及

$$\varphi(x)=\varphi(x_1,\cdots,x_n)=\psi(x_1)\psi(x_2)\cdots.$$

容易验证一切要求.

我们所能作的最好也只如此. 事实上,在解析情况下永远不会有一的分割,这个事实把光滑的解析的理论区分为完全不同的东西.

第四章　流形上的微分学

§1. 方向导数和矢量场

本书一开始，我们就说过，微分流形是我们可在其上作微积分的拓扑空间．然后用了大部分时间建造为此所需的工具．所以我们现在可以考虑微积分了．

微分学的最基本概念是导数的概念．更精确地说，是方向导数的概念．因为我们是在一般的多元的情况，设在 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的开集 U 上定义函数 f，$f:U\longrightarrow\mathbf{R}$，固定一点 $P\in U$ 以及一个方向 $u\in\mathbf{R}^n$，则有 f 在 P 点的方向 u 的方向导数

$$df(P,u)=\lim_{t\to 0}\frac{f(P+tu)-f(P)}{t}.$$

我们已经知道怎样把它用到一般的流形 M 上去．确定一点 $P\in M$，选一个切矢量 $X_P\in T_P(M)$，然后就可以讨论 f 在 P 点沿方向 X_P 的导数．但是这已经包含在 X_P 的定义中了．X_P 定义的是一个"算子"，而且是取方向导数运算(第二章 §2)．将 X_P 作用于函数 f 就给出一个数 X_Pf，即 f 在点 P 沿 X_P 的导数．这似乎是用方向导数定义方向导数，但是应该看到，这样做是为了保证 X_Pf 独立于任何特定的坐标表示．可是，如果在 P 点附近给出一个坐标 (U,φ)，则 X_Pf 可以如欧氏空间一样地计算出来．再简单地重复一下，函数 f 有一个"表示" $\hat{f}=f\circ\varphi^{-1}$，是定义在开集 $\varphi(U)\subset\mathbf{R}^n$ 上的函数，切空间 $T_P(M)$ 有一个基底 $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{i=1}^n$ 如下：

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f)=\left(\frac{\partial\hat{f}}{\partial x_i}\right)_P.$$

矢量 X_P 在这个基底中表示为

$$X_P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

如果我们令 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = u_P$，则

$$X_P f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}\right)_P.$$

由梯度公式（即链法则），等式右端是 $d\tilde{f}(\varphi(P), u)$. 要点自然在于，如果任取另外一个坐标系 (V, ψ)，还是得出同样的结果. 为了便于思考，下面再说其作法，$\psi(V)$ 中的点用变量 $(y_1, \cdots, y_n)$ 来表示，则我们有坐标变换

$$y_i = y_i(x) = (\psi \circ \varphi^{-1})_i(x_1, \cdots, x_n),$$

而 Jacobi 矩阵是

$$J = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{\varphi(P)}.$$

f 的两个表示间的关系是

$$\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1} = f \circ \psi^{-1} \circ (\psi \circ \varphi^{-1}) = \hat{f} \circ (\psi \circ \varphi^{-1}).$$

于是由链法则有

$$\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}\right) = \sum_i \frac{\partial \hat{f}}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}.$$

同一个矢量 X_P 在基底 $\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)$ 下，还有另一个表示

$$X_P = \sum_k \beta_k \frac{\partial}{\partial y_k},$$

β_k 和 α_i 间的关系是 $\beta_k = \sum_i J_{ki} \alpha_i$. 于是最后有

$$X_P f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} = \sum_{i,k} \alpha_i \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{f}}{\partial y_k} = \sum_k \beta_k \frac{\partial \hat{f}}{\partial y_k} = X_P f.$$

再回到欧氏空间的情况，对于每一点 $P \in U$ 我们自然可以取不同的方向 u_P. 这样方向导数就定义了一个新的导数 $P \longrightarrow df(P, u_P)$，对于每点 $P \in U$ 确定一个方向 $u_P: P \longrightarrow u_P$ 定义了一个"矢量场". 更准确地说，因为我们把矢量 u_P 看作是附属于点 P 的. 所以

应该把矢量场看作一个函数

$$\rho: U \longrightarrow U\times \mathbf{R}^n,\ P \longrightarrow (P,\ u_P),$$

$U\times\mathbf{R}^n = T(U)$是$U$的切丛，其投影映射$\pi: U\times\mathbf{R}^n \longrightarrow U$即是将积集合投影到一个因子上去，所以，一个矢量场就是一个映射$\rho: U \longrightarrow T(U)$，而且$\pi\circ\rho = 1$. 这个概念可以推广到任意矢量丛上去. 令$\pi: E \longrightarrow B$是一个矢量丛，则任一映射$\rho: B \longrightarrow E$，只要适合$\pi\circ\rho = 1$，就称为一个截口. 一个截口可以是连续的、光滑的甚至是全纯的，视丛的范畴而定. 因为我们主要讨论光滑丛，所以绝大多数时间我们将应用光滑截口.

任意矢量丛$E \longrightarrow B$至少有一个截口，即零截口0，即对任一点$b\in B$指定纤维E_b中的零矢量. 一般说来，E之全部截口之集$\Gamma(E)$显然是基域上的矢量空间.

再回到流形M的切丛$T(M)\longrightarrow M$，它的截口X是一个矢量场. 令(U,φ)为任意的局部坐标，则在U上对任一点$P\in U$均有局部基底$\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_P$，$i=1,\ \cdots,\ n$. 这些基底又定义了$n$个截口

$$\frac{\partial}{\partial x_i}: P \longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_P,\quad i = 1,2,\cdots,n.$$

我们可以用这些局部截口将X写成

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$a_i: U \longrightarrow \mathbf{R}$则是定义在$U$上的函数. 容易看到，当且仅当所有这些坐标函数$a_i$均为光滑时，$X$才是光滑的. 若$f$是定义在$U$上的任一光滑函数，则导数$X(f)$定义为

$$X(f)(P) = X_P(f) = \sum_i a_i(P)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_P f$$

$$= \sum_i a_i(P)\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}\right)_P,$$

这里，$\tilde{f} = f\circ\varphi^{-1}$是$f$局部表示. $X(f)$有时也写成(X,f).

我们再介绍一点有用的术语，令$\mathscr{F}(M)$表示M上全体光滑函数的集合. 按矢量场X求导定义一个算子

$$X:\mathscr{F}(M)\longrightarrow\mathscr{F}(M),\quad f\longmapsto X(f),$$

它对加法和乘以纯量是线性算子. 此外，它还服从对于求导极为重要的 Leibnitz 法则

$$X(f\circ g)=[X(f)]\circ g+f\circ[X(g)].$$

任一个定义在一个代数上具有这个性质的线性算子都称为“导算子”. 于是，光滑矢量场 $\Gamma(T(M))$和 $\mathscr{F}(M)$上的导算子 $\mathscr{I}(M)$是相同的.

§2. 矢量场的几何，积分曲线

令 $\alpha:I\longrightarrow M$ 为 M 中的一条曲线（见第二章，§3），$I\subset\mathbb{R}$ 是一个开区间. I 的切丛是 $T(I)=I\times\mathbb{R}$,所以我们有标准的基底截口 $t\longrightarrow(t,1)$. 定义

$$\alpha'(t)=\alpha_*(t,1)=d\alpha(t,1),$$

则 $\alpha'(t)$是 $T_{\alpha(t)}(M)$中一个切矢量. 若 X 是定义在 M 上的一个矢量场，则有

$$\alpha'(t)=X(\alpha(t)),\quad t\in I,\tag{1}$$

即 $X(\alpha(t))$正是曲线 α 在 $\alpha(t)$点处的切矢量. 如果是这样，我们就称 α 为 X 的积分曲线. 当给矢量场 X 时，求这些积分曲线的问题正是求解微分方程(1). 局部地说，这是欧氏空间中的问题，而我们有标准的 Picard 定理.

定理（常微分方程的存在与唯一性定理） 令 X 为流形 M 上的一个矢量场. 对任一固定点 $P_0\in M$ 与一固定点 $t_0\in\mathbb{R}$，必有一个开区间 I t_0与 X 的积分曲线 $\alpha:I\longrightarrow M$ 存在. 使 $\alpha(t_0)=P_0$（初始条件）. 若 α，$\beta:I\longrightarrow M$ 均为 X 之积分曲线，而对某一点 $s_0\in I$ 二者相同，则在 I 上必有 $\alpha=\beta$. 我们将在附录里给出证明的概要.

由此可知，对任一 $P\in M$，有一最大的开区间 I 以及 X 的唯一的积分曲线 $\alpha:I\longrightarrow M$ 适合初始条件 $\alpha(0)=P$. 这个积分曲线记作 $\alpha(P,t)$. α 是 P 与 t 二者的光滑函数，这就是光滑流的存在与唯一

性定理．但是我们将不深入到此．

我们要提醒，积分曲线的最大区间 I 的问题并不是一个烦琐无谓的问题，若是我们对参数做一个微分同胚 $\varphi: J \longrightarrow I$，则对新的曲线 $\beta=\alpha\circ\varphi$ 有

$$\begin{aligned}\beta'(t)&=\alpha'(\varphi(t))\varphi'(t)=\varphi'(t)X(\alpha(\varphi(t)))\\&=\varphi'(t)X(\beta(t)).\end{aligned}$$

因此 β 不再是 X 的积分曲线，除非 $\varphi'(t)=1$，换句话说，$\alpha: I\longrightarrow M$ 必须看做是一个映射，而不是点集 $\alpha(I)\subset M$．

积分曲线的最重要的性质是它的"群性质"，设 $\alpha: I\longrightarrow M$ 是具有初始条件 $\alpha(0)=P$（设$0\in I$）的积分曲线（I 是否为最大区间均可）．设 $t,s\in I$ 而且 $t+s$ 也在 I 中，则

$$\alpha(P,t+s)=\alpha(\alpha(P,t),s). \tag{2}$$

证明是显然的．因为有以下两个映射

$$s\longmapsto\alpha(P,t+s),$$
$$s\longmapsto\alpha(\alpha(P,t),s)$$

都是定义在 $s=0$附近的积分曲线，而且具有相同的初始条件 $\alpha(P,t)$．由于(2)式，$\alpha(P,t)$也称为一个单参数群．我们会看到，这个概念在 Lie 群的讨论中起关键的作用．

若 P 是 M 中使得 $X_P=0$的一点，则显然常值曲线 $\alpha:\mathbb{R}\longrightarrow M$，即对一切 t 均有 $\alpha(P,t)=P$ 的曲线是过 P 的积分曲线．这蜕化的情况自然是没有兴趣的．$\mathbb{R}^n$ 中最简单的非平凡的矢量场可能就是

$$\frac{\partial}{\partial x_1}: P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\longmapsto\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_P.$$

$\frac{\partial}{\partial x_1}$的积分曲线显然就是直线

$$\alpha(P,t)=(x_1(P)+t,x_2(P),\cdots,x_n(P)).$$

虽然简单，但这却是一个通有的 (generic) 情形，更精确地说，设 X 为任一矢量场而 $P_0\in M$ 为一满足 $X(P_0)\neq0$的点，则有一个围绕 P_0的局部坐标邻域 (U,x)，使得在 U 中满足 $X=\frac{\partial}{\partial x_1}$，这是一

个相对说来简单的技术性事实，但它并不是完全平凡的，下面来说明这一点，设 $\alpha: I \longrightarrow M$ 是通过 P_0 点的 X 的积分曲线. 对于 P_0 的任一局部坐标 (U,φ)（不妨设 $\varphi(P_0)=0$）. $f=\varphi\circ\alpha: I\longrightarrow \mathbf{R}^n$ 满足 $f(0)=0$ 且 $df(0)=d\varphi(X(P_0))\neq 0$. 按单射引理，存在一个微分同胚 g，将 $0\in\mathbf{R}^n$ 的一个邻域映成 $0\in\mathbf{R}^n$ 的另一邻域，使得

$$g\circ f(t) = (t,0,\cdots,0).$$

这表明若我们使用坐标 $(U, g\circ\varphi)$，通过 P_0 的积分曲线形如

$$\tilde{\alpha}(t) = g\circ\varphi\circ\alpha(t) = g\circ f(t) = (t,\cdots,0).$$

亦即，是一条通过原点的 x_1 方向的直线. 但这仅仅是直化了一根积分曲线，或等价于找一个坐标系，使之在点 P_0 满足 $X(P_0) = \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_0$. 这并不太满意，为了在 U 中直化一切积分曲线，还需要一点技巧. 因为事情是局部的，可设 X 是定义在 $0\in\mathbf{R}^n$ 的某邻域的矢量场. 令 $(e_1,\cdots,e_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的标准基，$x=\sum_i x_i e_i=(x_1,\cdots,x_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的标准坐标，记

$$X = \sum_i \lambda_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

若 $X(0)\neq 0$，不妨设 $\lambda_1(0)\neq 0$，因而在 0 的一个邻域函数 $\lambda_1(x)$ 不为零. 对任一点 $P=\sum_{j=1}^n P_j e_j$，令 $\overline{P}=\sum_{i=2}^n P_i e_i$ 为 P 到超平面 $x_1=0$ 上的投影，因此 $P=P_1e_1+\overline{P}$. 这一手法包括使用 P_1 作为“时间”且 $\overline{P}$ 作为初始条件. 令 $\alpha(t,P)$ 是 X 的局部流. 由

$$\varphi(P) = \alpha(P_1,\overline{P})$$

定义一个函数 φ，它在 0 的一个邻域上有定义，且

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right|_0 &= \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(te_1)-\varphi(0)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\alpha(t,0)-\alpha(0,0)}{t}\\ &= \left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t=0} = X(0).\end{aligned}$$

另一方面，对于 $t>1$，有

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|_0=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(te_i)-\varphi(0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\alpha(0,te_i)-\alpha(0,0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{te_i}{t}=e_i.$$

由此推出 $d\varphi$ 的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{bmatrix}\lambda_1(0) & \cdots & & \lambda_n(0)\\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1\end{bmatrix}.$$

因此 $\det|d\varphi|_0\neq 0$. 设 $\psi=\varphi^{-1}$ 为 φ 的局部逆，且 $y=\psi(x)$ 为新坐标. 由此坐标，α 的局部流为

$$\tilde{\alpha}(t)=\psi\circ\alpha(t,P),$$

当 $t=0$，满足 $\tilde{\alpha}(0)=\psi(P)$. 同此若取这个初始条件，则

$$\tilde{\alpha}(t,\psi(P))=\psi\circ\alpha(t,P).$$

若记 $Q=\psi(P)$，有 $P=\varphi(Q)$，则得

$$\varphi\tilde{\alpha}(t,Q)=\alpha(t,\varphi(Q))=\alpha(t,\alpha(Q,\overline{Q}))$$

$$=\alpha(t+Q,\overline{Q})=\varphi(Q+te_1),$$

即 $\tilde{\alpha}(t,Q)=Q+te_1$ 为过 Q 点的 y_1 方向的直线.

这提出了一个自然的问题：如果我们有一族向量场 $X_1,\cdots,X_m,m\leqslant n=\dim(M)$，在某点 $P_0\in M$ 不为 0，则能否找到 P_0 的一个坐标邻域 (U,φ) 使各个 X_i 在其中的表示为

$$X_i=\frac{\partial}{\partial x_i},\quad i=1,2,\cdots,m,$$

换言之，能否把所有的积分曲线 α_1，…，α_m 同时拉直？当然，要有一些必要条件. 例如，(X_i) 必须是线性无关的，因为，$\frac{\partial}{\partial x_i}$ 是这样，这是不够的. 有一个涉及二阶导数的新的因素起作用，我们

先讨论这个新问题.

§3. 括弧运算和 Frobenius 定理

因为矢量场可以看作 $\mathscr{F}(M)$上的算子,我们可以反复地运用它们于同一个函数.这样,若已知矢量场 X,Y 和函数 f,有函数 $Y(f)$,且 $X(Y(f))=XY(f)$,这只不过是一个二阶导数.既然如此,就不能设想 XY 仍是导算子,即不能希望 Leibnitz 法则仍然适用.这是一件很容易计算的事.有

$$\begin{aligned}XY(fg)&=X[Y(f)g+fY(g)]\\&=[XY(f)]g+Y(f)X(g)\\&\quad+X(f)Y(g)+f[XY(g)].\end{aligned}$$

中间两项表明与 Leibnitz 公式有差别.这个"误差"项对 X 和 Y 是对称的.因此算子 $XY-YX=[X,Y]$ 将是一个导算子,即是说,尽管表面不同,它将是一个一阶导数,它叫做括弧运算.容易验证所谓的 Jacobi 恒等式

$$[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0.$$

一般地,若在一线性空间上有反对称的双线性运算 [,] 满足 Jacobi 恒等式,这个线性空间就称为 Lie 代数.[,] 看成是一种"乘积"(Lie 乘积),从而使线性空间成为一个"代数".于是,Jacobi 恒等式表明,这个 Lie 乘积一般说来是非结合的,所以实际上我们是在处理一类新的代数.我们将在下一章对这个问题作更系统的讨论.

写出 $[X,Y]$ 的坐标表示是很有意思的.于是设在欧氏空间中,而且

$$X=\sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i},\quad Y=\sum_i \beta_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

α_i,β_i 都是函数.这样

$$XY(f)=X\left(\sum_i \beta_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

$$= \sum_{i,j} \left(\alpha_j \frac{\partial \beta_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \alpha_j \beta_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right).$$

作出 $YX(f)$ 后即知二阶导数项可以消去，余下

$$[X,Y] = \sum_i \sum_j \left(\alpha_j \frac{\partial \beta_i}{\partial x_j} - \beta_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

所以，$XY \neq YX$ 的理由不在于 $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \neq \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}$，由于我们是在处理光滑函数，后者总是相等的，而在于 X 和 Y 中有系数函数 α_i 和 β_i，如果它们是常数，例如 $X = \frac{\partial}{\partial x_i}, Y = \frac{\partial}{\partial x_j}$，则 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 和 $\frac{\partial}{\partial x_j}$ 的可交换性表现为

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0.$$

一个很明显的事实：若 f 是一个函数，则

$$[fX,Y] = f[X,Y] - Y(f)X.$$

我们现在来讨论同时拉直一组积分曲线的问题：令 $X_1, \cdots, X_m$ 为 M 上一组矢量场，$1 \leqslant m \leqslant n = \dim(M)$. 假设在某点 $P_0 \in M$，$X_{1P_0}, \cdots, X_{mP_0}$ 无关（因此，在 P_0 的某个领域中也无关）. 我们是否能找到一个坐标邻域 (U, φ) 使在其中 $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$，$i = 1, 2, \cdots, m$. 从我们已经讲过的可以看到，至少应该假设 $[X_i, Y_j] = 0$，$1 \leqslant i, j \leqslant n$. 这正是我们所需要的，而有以下的

Frobenius 定理　在上述假设下，有 P_0 附近的一个坐标邻域 (U, φ) 使 X_i 在其中成为

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

证　对 i 用归纳法. 在 $i = 1$ 时，这正是对于一个矢量场的积分曲线的情况而我们已经讨论过了. 现在归纳地假设当 $i = 1, \cdots, m-1$ 时，在 P_0 的某个坐标邻域中有

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, m-1,$$

$$X_m = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

a_i 是某些函数，条件

$$0=[X_i,X_m]=\left[\frac{\partial}{\partial x_i},X_m\right]$$

只不过是表示

$$\frac{\partial a_k}{\partial x_i}=0,\ i=1,2,\cdots,m-1.$$

换言之，函数 a_k 只依赖于后 $n-m+1$ 个变量 x_m，…，x_n. 我们把 $\mathbf{R}^n$ 写成 $\mathbf{R}^n=\mathbf{R}^{m-1}\times\mathbf{R}^{n-m+1}$，$\mathbf{R}^{n-m+1}$表示后 $n-m+1$ 个变量，于是

$$Y=\sum_{k\geqslant m}a_k\frac{\partial}{\partial x_k}$$

可以看成 $\mathbf{R}^{n-m+1}$上的矢量场. 注意 $Y_{P_0}\neq0$，否则 $X_{mP_0}\in\langle\frac{\partial}{\partial x_1}$，…，$\frac{\partial}{\partial x_{m-1}}\rangle_P=\langle X_1$，…，$X_{m-1}\rangle_{P_0}$而与线性无关的假设矛盾. 所以我们可以对 Y 应用 $\mathbf{R}^{n-m+1}$中关于一个矢量场的结果，即在 $\mathbf{R}^{n-m+1}$中作变量变换而将 Y 变为$\frac{\partial}{\partial x_m}$，而始终不涉及第一个因子 $\mathbf{R}^{m-1}$. 换言之，条件 $[X_i,X_m]=0$ 使我们能够分离变量. 现在，矢量场 X_i 成为

$$X_i=\frac{\partial}{\partial x_i},\quad i=1,2,\cdots,m-1,$$

$$X_m=\frac{\partial}{\partial x_m}+\sum_{k=1}^{m-1}a_k\frac{\partial}{\partial x_k},$$

而且 a_k 只依赖于 x_m，x_{m+1}，…，x_n. 但是，再作一次变换

$$u_i=x_i-\int a_i dx_m,\ i\leqslant m-1,$$

$$u_i=x_i,\ i\geqslant m,$$

就可以变 X_i 为$\frac{\partial}{\partial u_i}$，$i=1,2,\cdots,m$.

虽然我们是就一组矢量场的表示问题来讲 Frobenius 定理的，必须指出，正如单个矢量场的积分曲线问题是一个常微分方程的问题，“真正的” Frobenius 定理是一个偏微分方程问题如下.

在 $\mathbf{R}^{m+n}=\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n$ 的原点之某个开邻域中，设其坐标是 (x,y)，

$x\in\mathbf{R}^m$，$y\in\mathbf{R}^n$. 给出一个 $n\times m$ 矩阵函数

$$\varphi(x,y)=\{\varphi_{ij}(x,y)\},\quad i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m.$$

考虑偏微分方程

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j}=\varphi_{ij}(x,a),\qquad 1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m,\tag{1}$$

$a=\{a_1(x),\cdots,a_n(x)\}$是 x 的函数. 我们说(1)具有初始条件$(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n$,如果 $a(x_0)=y_0$.

若确实有解 a 存在,对(1)微分，有

$$\frac{\partial^2 a_i}{\partial x_k\partial x_j}=\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial x_k}+\sum_l\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial y_l}\frac{\partial y_l}{\partial x_k}=\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial x_k}+\sum_l\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial y_l}\varphi_{lk}.$$

所以，如果令$\frac{\partial^2 a_i}{\partial x_k\partial x_j}$与$\frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j\partial x_k}$相等，就会有下面的“可积性”条件

$$\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial x_k}+\sum_l\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial y_l}\varphi_{lk}=\frac{\partial\varphi_{ik}}{\partial x_j}+\sum_l\frac{\partial\varphi_{ik}}{\partial y_l}\varphi_{lj},\tag{2}$$

对于所有的 $1\leqslant i\leqslant n$，$1\leqslant j\leqslant m$ 成立. 于是有

Frobenious 定理 方程(1)对任意初始条件(x_0,y_0)在 0 的一个邻域内有解的充分与必要条件为(2)在此邻域内成立. 在这个情况下,解是唯一的.

证 考虑矢量场

$$X_j=\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_i\varphi_{ij}\frac{\partial}{\partial y_i}.$$

用坐标来计算$[X_i,X_j]$,容易看出(2)式即有$[X_i,X_j]=0,1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant m$,于是我们可以找到一个新的坐标系,例如记之为$(u,v)=(u(x,y),v(x,y))$使得

$$X_j=\frac{\partial}{\partial u_j},\quad j=1,2,\cdots,m.$$

令 $J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$是$(x,y)\leftrightarrow(u,v)$的 Jacobi 矩阵,而将它写为

$$J=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}.$$

则对 X_j 作的坐标变换给出

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ \varphi \end{pmatrix}, \tag{3}$$

即

$$\frac{\partial x}{\partial u} = I, \tag{4}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \varphi. \tag{5}$$

(4)表明 $x(u,0)=u$,若我们定义

$$a(x) = y(u,0),$$

则我们通过平移,可使 $a(0)=0$,在$(u,0)$点计算(5)式,得到

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \varphi_{ij}(x(u,0),y(u,0)) = \varphi_{ij}(x,a).$$

例如说在 Pontrijagin 著"连续群"一书中的 Frobenius 定理就是这样陈述的. 用几何学的术语,积分曲线的概念推广为积分流形. 用上面的记号,在 (u, v) 坐标中,我们将矢量场 X_j 表示成

$$X_j = \frac{\partial}{\partial u_j},\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m,$$

方程 $v=0$ 显然定义了一个 m 维子流形 S_0,即 $(X_1,\cdots,X_m)$过 0 的积分子流形,它对于矢量场组$(X_1,\cdots,X_m)$的关系正如同积分曲线之于单个矢量场;在每一点 $P=(u,0)\in S_0$,切空间 $T_P(S_0)$正是由$(X_{1P_0},\cdots,X_{mP_0})$所张成的. 另一方面 S_0 描述了微分方程(1)的解;方程 $v(x,y)=0$ 隐示地定义 y 为 x 的函数. 它们正是(1)的解 $y=a(x)$.

以 $a(0)=0$ 为初始条件的解 $y=a(x)$是唯一的. 因为如果 $y=\beta(x)$是另外一个解,考虑函数 $v(x,\beta(x))$,有

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\varphi.$$

但是,方程(3)的逆为

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

由此得

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\varphi = 0.$$

这样，$v(x,\beta(x)) = c$ 为常量. 如果我们将初始条件带入，得

$$c = v(0,0) = 0.$$

换句话说，$\alpha(x)$和 $\beta(x)$均为 $v(x,y)=0$ 在 $x=0,y=0$ 附近所隐示的函数. 因而，它们是相同的.

从上面的观点看来，有意思的是矢量场 X_j 在各点 P 所张成的矢量空间 $\langle X_1, \cdots, X_m\rangle_P$，而特定的矢量场只不过是对这个空间所选取的基底. 所以，一般的 Frobenius 定理应该是关于"子空间场"的积分子流形之存在性的定理. 这就导致"分布"的概念. 所谓一个"分布"，指的是一个函数 $\mathscr{I}$，它对每一点 $P\in M$ 指定一个子空间 $\mathscr{I}_P\subset T_P(M)$. 如果每一点 P 都有一个邻域 U 及其中一组光滑的矢量场 $X_1, \cdots, X_m$ 使得对一切点 $Q\in U$ 都有 $\mathscr{I}_Q = \langle X_1, \cdots, X_m\rangle_Q$，就是 $\mathscr{I}$ 是光滑的. 若 X 是一个矢量场，而且对每点 $P\in M$ 都有 $X_P\in\mathscr{I}_P$ 就说 $X\in\mathscr{I}$，如果由 $X, Y\in\mathscr{I}$ 必有 $[X, Y]\in\mathscr{I}$，就说 $\mathscr{I}$ 是对合的 (involutive). 给定 $P\in M$，含 P 的子流形 S_P 称为 $\mathscr{I}$ 的积分子流形，如果对于每一点 $Q\in S_P$ 都有 $T_Q(S_P)=\mathscr{I}_Q$，且这积分子流形对每一点 P 都存在，就说 $\mathscr{I}$ 是可积的. 这样，我们就有一般的

Frobenius 定理 光滑分布可积的充分必要条件是它为对合的.

这样，很强的括弧条件 $[X_i, X_j] = 0$ 被代以对合性条件，它只是

$$[X_i, X_j] = \sum_k a_{ij}^k X_k.$$

这看起来是一个更弱的条件，但是说不定我们可以变换基底

而又得回那个更强的条件. 这正是证明中的想法. 于是我们固定一点 $P_0\in M$, 并设取定一组矢量场 $X_1, \cdots, X_m$, 在 P_0 之某个邻域 U 中之每一点 Q 上张成 $\mathscr{I}_Q$, 它们在 U 中线性无关. 在 U 的某个局部坐标之下, 可以找一些函数 a_{ij}而将 X_j 写为

$$X_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i},$$

$(a_{ij})_{P_0}$的秩是 m, 所以我们可以设 (a_{ij}), $1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant m$ 在 U 中非异. 令(β_{ij})为其逆,且定义

$$Y_j=\sum_{k=1}^{m}\beta_{kj}X_k,\quad j=1,2,\cdots,m.$$

则在$\frac{\partial}{\partial x_i}$中有

$$Y_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_{ik}\beta_{kj}\frac{\partial}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_{i>m}\gamma_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i},\tag{6}$$

γ_{ij}是函数. 因为 $\mathscr{I}$ 是对合的, 所以必有某些函数 f_s 使

$$[Y_j,Y_l]=\sum_{s=1}^{m}f_sY_s.$$

计算表明, f_s 正是将 $[Y_j, Y_l]$ 按$\frac{\partial}{\partial x_i}$展开时$\frac{\partial}{\partial x_s}$的系数. 另一方面 (6) 式表明 $[Y_j, Y_l]$ 应该只含$\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i>m$. 若以 $Y_1, \cdots, Y_m$ 为基底, 则我们确实有 $[Y_j, Y_l]=0$, 于是定理归结为前面的特例.

到现在为止, 我们只处理局部的情况, 所以问题是关于欧氏空间的. 我们虽已从定理中明白对合性条件是必要的, 仍然还不完全明白, 为什么积分子流形甚至局部地也不一定存在. 下面是一个简单的例子.

在 $\mathbf{R}^3$ 中, 令

$$X=\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial z},\ Y=\frac{\partial}{\partial y}.$$

这个分布的图象如图 4—1, 在 x 轴上, 平面 $\langle X, Y\rangle$ 是水平的, 当向右边移动时, $\langle X, Y\rangle$ 就会指向后方.

假设有过 0 的积分子流形 N_0 存在. N_0 局部地可以用一个方程 $f(x,y,z)=0$ 来描述. 由 $X(f)=Y(f)=0$, 有

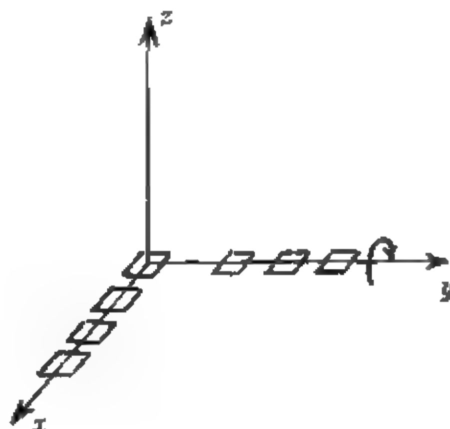


图 4—1

$$\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

特别 f 与 y 无关. 这意味着 N_0 在 y 轴方向上是柱面. 这又意味着当我们在 y 轴上移动时所有切平面都保持平行, 当然我们的分布恰好不是这样.

用微分方程的语言来说, 上面的例子说明偏微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial a(x,y)}{\partial x}=y,\\ \dfrac{\partial a(x,y)}{\partial y}=0\end{cases}$$

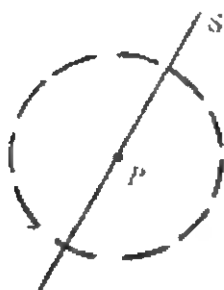


图 4—2

无解. 其理由恰如上面所说, 第二个方程说明 $a(x,y)$ 只是 x 的函数, 但这样一来第一个方程就不会成立了.

现在回到对合分布 $\mathscr{I}$, 我们已经看到, $\mathscr{I}$ 的局部坐标图象是简单的. 在每一点 $P\in M$ 附近, 都有一小块包含 P 的积分子流形 S, 看起来就象一小平板, 既然 S 描述了某个微分方程的解, 它当然是唯一的. 用几何语言说, 这意味着, 如果 R 是 $\mathscr{I}$ 的另一个含 P 的积分子流形, 则 $R\cap S$ 是 R 和 S 二者的开子流形. 我们可以这样把小片的积分子流形连接成最大积分子流形. 这些最大积分子流形是彼此分离的 (不然的话我们就把它们接起来了), 所以成了 M 的一个分割. 这样一个图象叫做"叶层结构" (foliation). 每一个最大积分子流形称为一"叶". 不幸的是这还不完全对, 理由是关于"子流形"

这个词的一个技术上的原因（见附录）．子流形 $S\subset M$，如第一章所定义的形象．每一点 $P\in S$ 都应该有一个邻域 U，使 $U\cap S$ 恰好是一个小平板，到现在为止，我们集中注意到 $U\cap S$ 看来象一片小平板这一事实，但是子流形的定义还包含了这样一个微妙的意思，即 $U\cap S$ 必须只能象一个小平板而不能是别的．对于积分子流形可能就不是这样．最容易的例子是环面 $T=S^1\times S^1$ 上的所谓无理流，对任意点 $P_0=(e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy})\in T$，曲线

$$\alpha(t,P_0)=(e^{2\pi i(t+x_0)},e^{2\pi ik(t+y_0/k)})$$



图 4—3

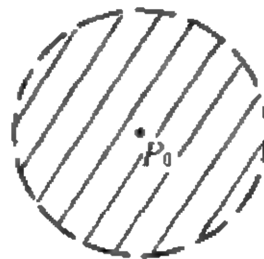


图 4—4

具有群性质以及初始条件 $\alpha(0,P_0)=P_0$，所以它是 T 上一个矢量场的积分曲线．若 $k=p/q$ 是有理数，则 $\alpha(q,P_0)=\alpha(0,P_0)$．所以 α 是周期的且 $\alpha(\mathbb{R})\subset T$ 是一个闭曲线，事实上是一个闭子流形；若 k 是无理数，α 不会封闭，它只会一转又一转地绕而且处处稠密．特别象 $\alpha(\mathbb{R})$ 在 P_0 附近的形象如图 4—4，即 $\alpha(\mathbb{R})\cap U=$ 许多小片之并，因此 $\alpha(\mathbb{R})$ 并不是如同定义所意味的那种子流形．这个例子也指出了麻烦的来源．$\mathbb{R}$ 的两个相距很远的小片被 α 带得很近，即是说，当 $\alpha(\mathbb{R})\subset T$ 接受了相对拓扑以后，$\alpha:\mathbb{R}\longrightarrow\alpha(\mathbb{R})$ 并不是同胚．我们可以把这一点放进流形的定义里去．令 M 为一个流形，所谓 M 的子流形，意味着一个对象 (N,α)，N 是一个流形（就其本身而言，即有自己的拓扑和自己的光滑结构），而 $\alpha:N\longrightarrow M$ 是一个一对一的光滑（即指 $d\alpha:T_p(N)\longrightarrow T_{\alpha(P)}(M)$ 也是一对一的）映射．这样的定义留下一个没有回答的问题，即当 $\alpha(N)\subset M$ 具有相对拓扑时，

$\alpha: N \longrightarrow \alpha(N)$是否同胚，如果是，我们就说 α 是一个嵌入(imbedding)，这时新定义的意义和老定义一样. 为了我们的需要，我们所遇到的子流形都是老的那一类. 所以我们把新的这一类子流形作为广义的来看待. 最大积分子流形可以定义为这种广义的子流形. 而我们关于叶层结构的形象在这样的解释下就正确.

§4. 矢量场的拓扑学

到现在为止，我们都是在给出矢量场以后来研究它们的性质. 矢量场定义为具有某些性质的映射 $X: M \longrightarrow T(M)$，即 $\pi \circ X = 1$，π 为投影映射. 这样就产生了这种映射是否存在的问题. 我们愿先弄清这一点. 矢量场或矢量丛 $E \longrightarrow B$ 的截口是很容易得到的，至少在光滑范畴中是这样，因为 E 局部地和一个乘积 $U \times \mathbf{R}^n$ 一样，而 $U \times \mathbf{R}^n$ 的一个截口只不过是一个函数 $U \longrightarrow \mathbf{R}^n$. 于是我们可以用平凡化邻域$\{U_i\}$覆盖 B，而在 U_i 上任意地作截口 ρ_i，然后把这样局部的东西拼起来，这是毫无问题的. 作附属于$\{U_i\}$的一的分割$\{\varphi_i\}$并定义一个整体截口 ρ 为 $\rho = \sum \varphi_i \rho_i$，即

$$\rho(b) = \sum_i \varphi_i(b) \rho_i(b).$$

截口之容易得到这一点还有另外一种说法，即是说截口的矢量空间 $\Gamma(E)$一般是很大的，肯定是无限维的.

但是说容易做出截口并不意味着容易做出具有指定性质的截口. 例如，我们在第二章中关于 $T(S^2)$的非平凡性的讨论可以这样来说：切丛 $T(S^2)$不容许一个处处不为 0 的截口，在 $\mathbf{R}^2$上作出成百万个处处不为 0 的矢量场绝无问题(因为我们已经说过，这就相当于做出处处不为 0 的函数 $f: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$)，这个现象显然不是局部的，只要对 $\mathbf{R}^2$ 再添上一个点就会出现大怪事. 现在我们还不能解释这个问题，但是我们将提出一些有关的有趣的事实以供后面参考.

回忆一下第一章中的投影定理：若 $f: U\subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ 是定义在0的某个邻域 U 中的光滑映射而且 $f(0)=0$，且 $df(0)$ 是全射（故 $n\geqslant p$），则必有 $0\in\mathbb{R}^n$ 的某个邻域上的微分同胚 h 使得

$$f\circ h(x_1,\cdots,x_n)=(x_{n-p+1},\cdots,x_n).$$

因此原象 $f^{-1}(0)\subset\mathbb{R}^n$ 是一个 $n-p$ 维子流形（在某局部坐标 (x_i) 中定义为 $x_i=0, i>n-p$）. 这一点明显地可以推广到任意流形. 令 $f: M\longrightarrow N$ 是一个光滑映射，一点 $Q\in N$ 是一个"正则值"(regular value)，如果 $P\in f^{-1}(Q)\Rightarrow df: T_P(M)\longrightarrow T_Q(N)$ 是全射，特别是，若 $f^{-1}(Q)=\varnothing$，则 Q 是正则值. 如果 Q 是正则值而 $f^{-1}(Q)$ 非空，则它是 M 的 $n-p$ 维子流形（$n=\dim M$, $p=\dim N$）. 若 $n=p$ 而 Q 为正则值则 $f^{-1}(Q)$ 是 M 的一个零维子流形，即一个离散集. 在 M 为紧的特例中，$f^{-1}(Q)$ 是有限集.

现在考虑 $M=N=S^n$ 的特例. 我们给 $\mathbb{R}^{n+1}$ 固定的定向，例如由有序基底 $e_1,\cdots,e_{n+1}$ 所决定的定向，$e_i=(\overbrace{0,\cdots,0,1}^{i},0,\cdots,0)$. 若 $P\in S^n$，则对 $T_P(S^n)$ 给以这样的定向使得再加上矢量 ρ 以后可得 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的正向. 若 $f: S^n\longrightarrow S^n$ 是一个光滑映射而 $Q\in S^n$ 是一个正则值. 我们对 $P\in f^{-1}(Q)$ 指定一个符号 $\mathscr{E}(P)=\pm1$ 视 $df: T_P(S^n)\longrightarrow T_Q(S^n)$ 是否保持定向而定. 于是我们定义 f 的映射度为

$$\deg(f)=\sum_{P\in f^{-1}(Q)}\mathscr{E}(P),$$

结果总会有正则值存在，而且 $\deg(f)$ 和所取的正则值无关.

现在回到流形 M 上的矢量场问题上来，我们要问，是否一个矢量场 X 一定有零点存在. 假定 X 只有孤立零点，从而当 M 为紧时只有有限多个这种零点. 令 $P_0\in M$ 是其中之一. 在 P_0 的某个坐标邻域 U 中，X 只不过是一个函数 $X: U\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$，而且当 $P\neq 0=P_0$ 时，$X(P)\neq 0$. 令 S^{n-1} 是 U 中一个小球面，考虑函数

$$S^{n-1}\longrightarrow S^{n-1},\quad P\longmapsto X(P)/|X(P)|.$$

定义 P_0 的指标 (index) 即这个映射的映射度. 下图是 $\mathbb{R}^2$ 中的一些例子. 我们又定义 X 的总指标为

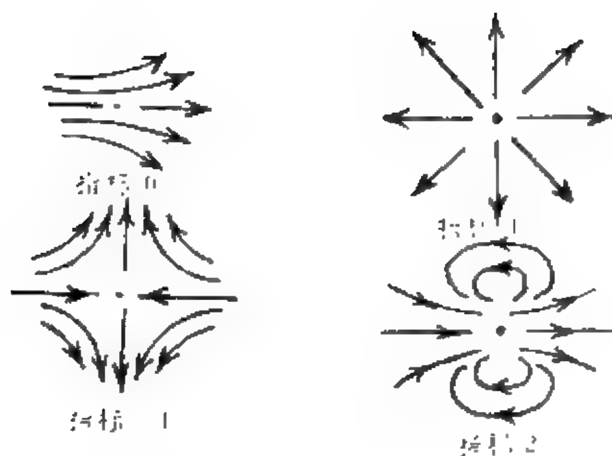


图 4—5

$$\mathrm{Ind}(X) = \sum_P \mathrm{index}(P).$$

于是有以下惊人的事实：Ind(X)与 X 无关，而只决定于流形 M 本身.

这是最古老的拓扑不变量之一，并早由 Euler 所发现. 考虑 S^2 为八个三角形所覆盖的图象：可以数出 6 个顶点(V)，12 个棱(E)和 8 个面(S)，于是

$$V-E+S=6-12+8=2.$$

Euler 定理指出的这个数与 S^2 的剖分方式无关. 例如，再加上一条从北极到南极的子午线，仍然是

$$V-E+S=7-15+10=2.$$

这个整数称为 Euler 示性数，记作 $\chi(S^2)$，一般说来，对所有紧流形均可定义其示性数.

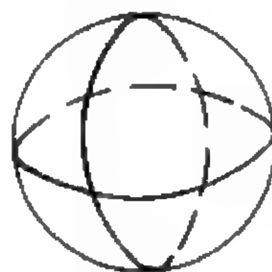


图 4—6

定理 若 X 是紧流形 M 上的仅有孤立零点的矢量场，则 Ind$(X)=\chi(M)$.

这个定理是大范围的拓扑——微分结果中的一个珍品，这里将两个表面上没有关系的对象紧密地联系起来了. 在我们讨论过

程中，将特别着重这种类型的结果，因为如果你精于拓扑学，你可以用它们在分析学中获得很好的结果，反过来也是一样．举例说明，既然我们知道了 $\chi(S^2)=2$，就知道 S^2 上不会有处处不 0 的矢量场．另一方面，我们知道 Lie 群上一定都有处处不为 0 的矢量场（凡有平凡化切丛的流形都如此），所以对所有的 Lie 群 G 必有 $\chi(G)=0$.

我们已经看到，只要有一的分割，作截口就决无问题．所以全纯丛上的全纯截口一定是不相同的．事实上 $\Gamma(E)$ 确实可能是零空间，而且只要 E 是紧的，它一定是有限维的，这与光滑的情况绝然不同．此外，E 的拓扑对 $\Gamma(E)$ 的大小有很深刻的影响，著名的 Riemann-Roch 定理就是有关这种的确切关系的.

§5. 附　录

这一节是补充材料，是讲常微分方程解的存在和唯一性的 Picard 定理和讨论子流形的定义．先讲 Picard 定理，我们只就与时间无关的光滑矢量场这个最简单的情况来讨论．令 $x_0\in\mathbf{R}^n$，$U\ni x_0$ 是 x_0 的紧邻域．$f: U\longrightarrow\mathbf{R}^n$ 是光滑函数，$J\subset\mathbf{R}^1$ 是一个闭区间 $[-\varepsilon,\varepsilon]$，$\varepsilon>0$．我们要求解以下的常微分方程的初值问题

$$\alpha'(t)=f(\alpha(t)),\quad \alpha(0)=x_0,$$

$\alpha: J\longrightarrow U$ 是待求的光滑曲线.

引理（中值定理）　对于 x，$y\in U$，必有某个常数 $k>0$ 使

$$|f(y)-f(x)|\leqslant k|y-x|.$$

证　令 $g(t)=f(x+tu)$，$u=y-x$，则

$$f(y)-f(x)=g(1)-g(0)=\sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{(x+tu)}u_i.$$

由于所有的偏导数都在 U 中有界，故得证.

引理（压缩映象引理）　令 Y 为非空的完备度量空间，$s: Y\longrightarrow Y$ 为压缩映射，即

$$\rho(s(y_1),s(y_2))\leqslant C\rho(y_1,y_2),\quad C<1. \tag{1}$$

则 s 必有唯一的不动点 $y\in Y$，即 $s(y)=y$.

证 由于(1)式，y 显然是唯一的. 为了找到它，从任一点 $y_0\in Y$ 开始，并依次定义

$$y_n=s(y_{n-1}),\quad n\geqslant 1.$$

于是

$$\rho(y_{n+1},y_n)=\rho(s(y_n),s(y_{n-1}))\leqslant C\rho(y_n,y_{n-1}).$$

因此

$$\rho(y_{n+1},y_n)\leqslant C^n\rho(y_1,y_0).$$

这意味着 $\{y_n\}$ 是一个 Cauchy 序列，令 $y=\lim y_n$，则 $s(y)=y$.

令 $Y=C(J,U)=\{\alpha: J\longrightarrow U$ 为连续映射$\}$，并赋以范数

$$\|\alpha\| = \sup_{t\in J}|\alpha(t)|.$$

大家知道，Y 是一个非空的完备度量空间，定义 $s: Y\longrightarrow Y$ 为

$$s(\alpha)(t)=x_0+\int_0^t f(\alpha(u))du.$$

有

$$\begin{aligned}\|s(\alpha)-s(\beta)\| &\leqslant \sup_t \int_0^t |f(\alpha(u))-f(\beta(u))|du\\ &\leqslant \sup_t \int_0^t k|\alpha(u)-\beta(u)|du\\ &\leqslant bk\|\alpha-\beta\|,\quad 0\leqslant t\leqslant b.\end{aligned}$$

所以只要取 b 使 $bk<1$，s 就成了一个压缩映射. 其不动点 $s(\alpha)=\alpha$ 即所求之解.

下面我们较详细地考查子流形的定义. 令 M 为一 n 维流形，我们有两个关于子流形的概念：

旧定义 M 的 k 维子流形即其一个子集 $N\subset M$，它具有以下性质：每一点 $P\in N\subset M$ 都有一个对 M 而言的坐标邻域 (U,φ)，使得 $\varphi(U\cap N)=\varphi(U)\cap(\mathbf{R}^k\times 0^{n-k})\subset\varphi(U)\subset\mathbf{R}^n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个 k 维线性子空间. 如图 4—7.

新定义 M 的 k 维子流形是一对 (N,i)，N 是一个 k 维流形

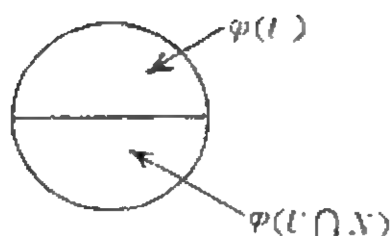


图 4—7

(就其本身而言)，$i: N\longrightarrow M$ 是一个光滑映射，使得

(i) i 是一对一的.

(ii) 对于一切 $P\in N$，微分 $di: T_P(N)\longrightarrow T_{i(P)}(M)$ 也是一对一的.

若 $i: N\longrightarrow M$ 为包含映射，则当 N 是旧定义下的子流形时(i)和(ii)都是成立的，所以这时旧定义⇒新定义. 另一方面只要 i 是一对一的，N 就是 M 的子集(即把 N 和 $i(N)\subset M$ 看成一回事)，以下都如此. 但是在新定义中给了 N 以自身的拓扑和光滑构造. 因为 i 是连续的，N 的拓扑(称为流形拓扑)比之由 M 所诱导的相对拓扑更强，即可能有更多的开集，而这两个拓扑不一定一样. 环面上的无理流说明了这一点. 至于光滑构造，没有什么诱导构造，而只能是老定义，但是形象是相近的. 由单射定理，任一点 $P\in N$ 都有一个在 N 中的邻域 V 以及 P 在 M 中的邻域 U，使得 $i(V)$ 象 U 的线性子空间(图 4—8)，唯一的差别在于 $i(V)$ 不一定是整个 $U\cap N$，它可能含有许多片. 显然，若 $N=i(N)\subset M$ 是局部闭的，两个定义是相同的. 特别，若 $N\subset M$ 是 M 的闭子集，就没有任何区别. 一般说来，单射引理可导出下面的引理.

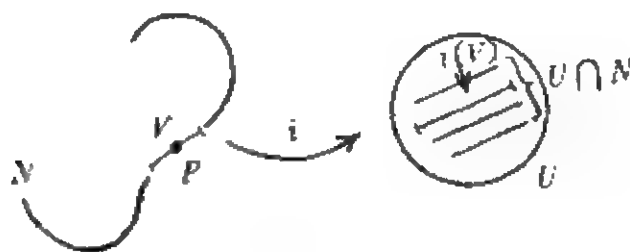


图 4—8

引理(光滑性的判据) 若 $i: N\longrightarrow M$ 是 M 的子流形，L 是任意已知光滑流形，而 $\varphi: L\longrightarrow N$ 是一个映射，则 φ 为光滑当且

仅当 $i\circ\varphi: L\longrightarrow M$ 为光滑.

作为一个应用,我们提出下面的问题.两个子流形 $i_0: N_0\longrightarrow M$ 和 $i_1: N_1\longrightarrow M$,如果存在一个微分同胚 $\varphi: N_0\longrightarrow N_1$ 使 $i_1\circ\varphi=i_0$,则显然这两个子流形应该是"相同的".从上面的引理直接可知(i_0, N_0)和(i_1, N_1)是等价的,当且仅当作为 M 的一个子集有 $i_0(N_0)=i_1(N_1)$.换言之,一个子集 $N\subset M$ 只能以一种方式做成一个子流形.

但是,如果从一个子集 $N\subset M$ 出发,打算把它做成一个子流形,除了 M 的拓扑和光滑构造自然地诱导以外,又从哪里找到 N 的拓扑和光滑构造呢?例如,究竟怎样才能做出一个对合分布的最大积分子流形呢?这里必须考虑以下的一般情况:令 M 为一个集,(U_i),$i\in I$ 是 M 的子集所成的任一覆盖,假设

(i) 每个 U_i 都是一个流形,

(ii) $U_i\cap U_j$ 只要非空必是 U_i 和 U_j 二者的开子流形.

这时,有一个而且也只有一个方法能把 M 造成一个流形而同时使每个 $U_i\subset M$ 都成为 M 的开子流形,这就是,把一切 U_i 的坐标邻域都总和在一起而成为 M 的坐标邻域系.条件(ii)保证了它们是相容的.

现在令 $\mathscr{I}$ 是 n 维流形 M 上的一个对合的 k 维分布.我们已经有了 $\mathscr{I}$ 的积分子流形的概念.记住,$\mathscr{I}$ 的一个积分子流形 S 正是一个旧定义下的子流形 $S\subset M$(在那时我们还没有讲过新意义下的子流形概念),而且 $\mathscr{I}_P=T_P(S)$对一切 $P\in S$ 成立.关于存在性和唯一性的 Frobenius 定理指出,每一点 $P\in M$ 都有一个积分子流形 S 使 $P\in S$.若 $S'\ni P$ 是另外一个积分子流形,则必然还有第三个积分子流形 $S''\ni P$ 使 $S''\subset S\cap S'$.这句话的意思是,上面的条件(i)和(ii)对 $\mathscr{I}$ 的一切积分子流形的集都成立.因此,这个集把 M 变成一个 k 维子流形.一般说来,M 不是连通的.M 的每一个成分称为 $\mathscr{I}$ 的一个最大积分子流形.它显然是原来的 n 维流形 M 的一个新定义下的子流形(是新流形 M 的开子流形).一个

老的 n 维流形变成一个新意义下的 k 维流形，这似乎是令人费解的。这其实并不奇怪，正如一张张的纸可以做成一堆一样，而"叶层结构"的"叶"这名词正是为此而引入的。当然也还有更广泛的类型的叶层结构不是由分布而引起的。

参考文献

[1] Flanders, H., *Differential Forms*, Academic Press.

[2] Spivak, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. I, Publish or Perish Inc., Boston, Ma. U. S. A. 02108.

[3] Pontrjagin, *Topological Groups*. 中译本：邦德里雅金，《连续群》，曹锡华译，科学出版社。

第五章 Lie 群

§1. Lie 群的 Lie 代数

前一章的语言在 Lie 群的理论里得到了最富有成果的应用. 这一章讨论 Lie 群理论的初等的部分.

再一次提一下 Lie 群 G 的形式定义，一个 Lie 群就是

(1) 一个群；

(2) 一个光滑流形；

(3) 群运算 $G\times G\longrightarrow G$, $(g, g')\longmapsto gg'$ 和 $G\longrightarrow G$, $g\longmapsto g^{-1}$ 都是光滑映射.

换句话说，Lie 群是两种构造的自然的结合. 条件 (3) 确切地说明了"自然"的结合是什么意思.

从流形理论的观点来看，Lie 群最显著的特点是它具有许许多多到其自身的微分同胚，乘以元素 g 就是这样的微分同胚. 我们将用 L_g 和 R_g 表示左乘和右乘以 g，令 X 为 G 上一个矢量场，很自然地要看一下 L_g 对它的效应. 具体地说，若 g_0, g_1 是两个点，有 $g_1=g_1g_0^{-1}g_0=L_g(g_0)$, $g=g_1g_0^{-1}$，于是我们可以比较 $X(g_1)$ 和 $dL_gX(g_0)$. 很明显，如果

$$X(g_1)=dL_gX(g_0),\quad g=g_1g_0^{-1},$$

则称 X 是左不变矢量场. dL_g 称为左平移. 当然也能考虑右不变矢量场. 因为用哪一个没有关系，所以我们只讨论左不变的. 令 $\mathscr{T}=L(G)$ 表示一切左不变矢量场的集. 若 $X\in L(G)$，则 X 可以完全由它在单位元 $e\in G$ 上之值完全决定(其实也可由它在任一点上之值完全决定)，因为 $X(g)=dL_gX(e)$. 反过来，若任意给定 $X(e)\in$

$T_e(G)$，则由公式 $X(g)=dL_gX(e)$ 可定义 G 上一个矢量场而且显然是左不变的. 要费一点工夫才能用条件(3)来证明这样定义的 X 是光滑的. 换句话说

$$T_e(G) \longrightarrow L(G),$$
$$X(e) \longmapsto X(g)=dL_gX(e)$$

是单全射. 特别是，$L(G)$ 作为(实域上的)矢量空间，是有限维的，其维数和 G 作为一个流形的维数相同. 我们将一再地用到二者相同，所以我们采用下面的记号. $T_e(G)$ 中的矢量用 X,Y 等等表示，由它们得出的 G 上的矢量场则用 $\widetilde{X},\widetilde{Y}$ 等等表示.

$L(G)$ 作为一个矢量空间虽然和 $T_e(G)$ 相同，但它却不只是一个矢量空间，因为若 $\widetilde{X},\widetilde{Y}\in L(G)$ 可以作括弧集 $[\widetilde{X},\widetilde{Y}]$，如果能证明其不变性，则它也在 $L(G)$ 中，这一点我们要用更一般的方式证明.

令 $\varphi: M \longrightarrow N$ 是任意两个流形间的光滑映射. M 和 N 上的矢量场 X 和 $\widetilde{X}$ 间若有

$$d\varphi(X(P)) = \widetilde{X}(\varphi(P))$$

对一切 $P\in M$ 成立，则称为 φ-相关的. 例如，G 上的左不变矢量场 $\widetilde{X}$ 是对于一切 $g\in G$ 均与其自身 L_g-相关的矢量场.

引理 若 X, $\widetilde{X}$ 和 Y, $\widetilde{Y}$ 各为 φ-相关的，则 $[X, Y]$ 和 $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$ 也是 φ-相关的.

证 对于实值函数 f，有函数 $\langle X,f\rangle(P)=\langle X(P),f\rangle$，所谓 φ-相关是

$$\langle X,f\circ\varphi\rangle = \langle \widetilde{X},f\rangle\circ\varphi.$$

由此容易证明引理.

$L(G)$ 带上这个附加的构造成为一个 Lie 代数，它是相应于 Lie 群 G 的 Lie 代数，而在 $T_e(G)$ 中 $[X,Y]$ 自然就是矢量 Z，使得 $\widetilde{Z}=[\widetilde{X},\widetilde{Y}]$. 把 $L(G)$ 作为一个集来看时，我们可以限于一个切空间 $T_e(G)$，而要求 $[X,Y]$ 时则必须考虑一点的邻域，所以我们不应该把 $L(G)$ 看作是只与一点有关的对象 $T_e(G)$.

$L(G)$ 有一个表示，若 $\widetilde{X}$ 是一个左不变矢量场，则它有一个积

分曲线 $\alpha: J \longrightarrow G$，定义在某个开区间 $J=(-\varepsilon,\varepsilon)$ 上，$\varepsilon>0$，而且 $\alpha(0)=e$，当然，不论 $\widetilde{X}$ 是否左不变，这都是对的. 但若 $\widetilde{X}$ 是左不变的，则 α 实际上是一个群同态，即对充分小的 s 和 t，有

$$\alpha(s+t)=\alpha(s)\alpha(t). \tag{1}$$

现在证明这一点，从一般的类似于群的性质知道 $t \longmapsto \alpha(s+t)$ 是 $\widetilde{X}$ 的一个积分曲线记为 $\beta(t)$，其初始条件是 $\beta(0)=\alpha(s)=g$，令

$$\gamma(t)=\alpha(s)\alpha(t)=L_g\alpha(t).$$

则由链法则有

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= dL_g\alpha'(t)=dL_g\widetilde{X}(\alpha(t)) \\ &= \widetilde{X}(L_g\alpha(t))=\widetilde{X}(\gamma(t)). \text{（由 } \widetilde{X} \text{ 之不变性）}\end{aligned}$$

所以 $\gamma(t)$ 也是 $\widetilde{X}$ 的积分曲线，且有初始条件 $\gamma(0)=\alpha(s)$. 由积分曲线的唯一性即得 $\beta(t)\equiv\gamma(t)$，所以 $\Rightarrow$(1)式.

同态条件(1)表明，最大积分曲线的定义区间是整个 $\mathbf{R}$，因为可以利用(1)将 α 之定义域拓展到 $\mathbf{R}$. 若 $t\in\mathbf{R}$ 是任意的，取某个整数 n 使 $|t/n|<\varepsilon$，从而 $\alpha(t/n)$ 有定义，然后定义

$$\alpha(t)=\left[\alpha\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n,$$

它是适当定义的. 于是我们得到一个映射

$$\alpha: \mathbf{R} \longrightarrow G,$$

它仍然是一个同态. 反过来，任何这样一个同态都给出一个切向量 $\alpha'(0)\in T_e(G)$，由它又可决定一个左不变矢量场 $\widetilde{X}$，其积分曲线就是 α. 一个传统的名词把光滑同态 $\alpha: \mathbf{R} \longrightarrow G$ 叫做一个单参数子群(若 $\alpha'(0)\neq 0$，$(\alpha,\mathbf{R})$ 是 G 的一个在前一章中定义的广义的一维子流形. 此外，$\alpha(\mathbf{R})\subset G$ 自然是一个子群，由此而得以上名词). 因此，$L(G)$ 也可以看作 G 的所有单参数子群之集. 若 $X\in T_e(G)$ 是一个切矢量，则 $\widetilde{X}$ 的积分曲线 $\alpha(t)$，$\alpha(0)=e$ 将记作

$$\alpha(t)=\exp(tX),$$

并称为"指数"映射(这个名称的来源很快就会明白)，这就建立了 Lie 代数 $L(G)$ 和 Lie 群 G 之间的一个联系

$$\exp: L(G) \longrightarrow G, \quad X \longmapsto \exp X = \alpha(1).$$

我们将会看到，这个指数映射在 Lie 群的理论中将起关键的作用.

但是，在作一般为讨论之前，有一个必须了解的例子，因为它是一种"万有"的例子. 令 $G = GL(n,\mathbb{R})$ 为实数元的 $n\times n$ 非异矩阵之群（对复矩阵也有类似结果）. 作为一个集，G 是所有 $n\times n$ 实矩阵集 $E(n,\mathbb{R})$ 之子集. $E(n,\mathbb{R})$ 是 n^2 维矢量空间，子集 $GL(n,\mathbb{R}) \subset E(n,\mathbb{R})$ 是由行列式函数

$$\det: E(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad X \longmapsto \det X$$

不为 0 这个条件所决定的子集，于是 $GL(n,\mathbb{R})$ 是开集，从而变成了 $E(n,\mathbb{R})$ 的开子流形. 因此，$GL(n,\mathbb{R})$ 可以用一个大的坐标邻域 $E(n,\mathbb{R})$ 盖起来. 它的切丛就是积集合

$$T(G) = GL(n,\mathbb{R}) \times E(n,\mathbb{R}).$$

特别是，Lie 代数 $L(G)$ 作为一个矢量空间同构于 $E(n,\mathbb{R})$，为了区别 $E(n,\mathbb{R})$ 和 $GL(n,\mathbb{R})$ 中的矩阵，前者用 X,Y,Z 等表示，后者用 A,B,C 等表示.

第一件要做的事是描述 $E(n,\mathbb{R})$ 中的括弧运算 $[X,Y]$. 令 $x_{ij}: E(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ 是第 (i,j) 个元素函数：

$$x_{ij}(X) = X_{ij}$$

（X_{ij} 表示 X 之第 (i,j) 个元素），这就是 $GL(n,\mathbb{R})$ 上的矢量场 $\widetilde{X}$ 的坐标函数. 另一方向，$\widetilde{X}$ 也是一个函数

$$\widetilde{X}: GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow E(n,\mathbb{R}),$$

即一个矩阵，而其元素为 $GL(n,\mathbb{R})$ 上的函数. $\widetilde{X}$ 又可以写为

$$\widetilde{X} = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}},$$

a_{ij} 是 G 上的函数，二者的关系

$$a_{ij}(A) = \widetilde{X}(A)_{ij} = \langle \widetilde{X}(A), x_{ij} \rangle = \langle \widetilde{X}, x_{ij} \rangle (A).$$

现在令 $X \in E(n,\mathbb{R})$ 为已给，$\widetilde{X}$ 是相应于 X 的左不变矢量场，由定义

$$\langle \widetilde{X}(A), x_{ij} \rangle = \langle dL_A(X), x_{ij} \rangle = \langle X, x_{ij} \circ L_A \rangle,$$

有

$$(x_{ij}\circ L_A)(Y)=x_{ij}(AY)=\sum_k A_{ik}Y_{kj}.$$

这表示，作为一个函数 $x_{ij}\circ L_A=\sum_k A_{ik}x_{kj}$. 所以

$$\begin{aligned}\langle\widetilde{X}(A),x_{ij}\rangle&=\langle X,\sum_k A_{ik}x_{kj}\rangle\\&=\sum_k A_{ik}\langle X,x_{kj}\rangle=\sum_k A_{ik}X_{kj}\\&=(AX)_{ij}=\langle AX,x_{ij}\rangle.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\langle\widetilde{X}\widetilde{Y},x_{ij}\rangle&=\langle\widetilde{X},\langle\widetilde{Y},x_{ij}\rangle\rangle=\langle\widetilde{X},\sum_k x_{ik}Y_{kj}\rangle.\\&=\sum_k\langle\widetilde{X},x_{ik}\rangle Y_{kj}.\end{aligned}$$

由定义

$$\begin{aligned}[X,Y]_{ij}&=\langle\widetilde{X}\widetilde{Y}-\widetilde{Y}\widetilde{X},x_{ij}\rangle(e)\\&=\sum_k(\langle X,x_{ik}\rangle Y_{kj}-\langle Y,x_{ik}\rangle X_{kj})\\&=(XY-YX)_{ij},\end{aligned}$$

换言之 $[X,Y]=XY-YX$. 只不过是矩阵乘法.

在第一章中我们是用显示的式子

$$\exp X=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{X^k}{k!}$$

来定义映射

$$\exp: E(n,\mathbf{R})\longrightarrow GL(n,\mathbf{R})$$

的. 考虑映射 $\alpha:\mathbf{R}\longrightarrow GL(n,\mathbf{R})$,

$$\alpha(t)=\sum\frac{t^kX^k}{k!}=\exp(tX).\tag{1}$$

我们在第一章里已经看到，若 X 和 Y 可换，则

$$\exp(X+Y)=\exp X\cdot\exp Y.$$

特别是，这意味着

$$\alpha(t+s)=\exp(tX+sX)=\exp(tX)\cdot\exp(sX)$$

$$= \alpha(t)\alpha(s).$$

于是 α 是一个同态. 因为幂级数一致且绝对收致，我们可以逐次微分而得到

$$\alpha'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}X^k}{(k-1)!}.$$

所以有 $\alpha'(0)=X$. 这意味着，在 $GL(n,\mathbf{R})$情况下，指数映射

$$\exp : E(n,\mathbf{R}) \longrightarrow GL(n,\mathbf{R})$$

正是由指数幂级数(1)给出的，这说明指数映射这个一般的名词的来源.

另一个简单但很重要的例子是环面群 (torus group) $T^m=S^1\times\cdots\times S^1$. 很清楚，如果 $G=G_1\times G_2$ 是一个乘积群，则

$$L(G) = L(G_1)\times L(G_2) = L(G_1)\oplus L(G_2)$$

正是矢量空间 $L(G_1)$和 $L(G_2)$的直和，面括弧运算可以按各成分来进行，所以只需要考虑特例

$$S^1 = \{z\in\mathbf{C}\mid |z| = 1\}.$$

因为 $\dim S^1=1$，所以作为一个矢量空间 $L(S^1)\cong\mathbf{R}$，但是一维空间只有平凡的括弧积，因为，如果 d 是一个基底矢量，则$[X,Y]=[\lambda d,\mu d]=\lambda\mu[d,d]=0$，这样 $L(S^1)$是平凡的 Lie 代数，类似地 $L(T^m)\cong\mathbf{R}^m$ 也是平凡的 Lie 代数. 为了作指数映射，我们作嵌入 $S^1\subset\mathbf{C}$. 于是 $T_e(S^1)$正是竖的直线，即

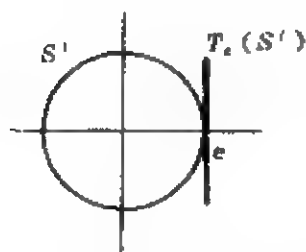


图 5—1

$$T_e(S^1) = \{it\mid t\in\mathbf{R}\}.$$

在这个表示之下，指数映射就是平常的指数函数

$$\exp(it)=e^{it}.$$

显然可以利用 Lie 群 G 及其 Lie 代数之间的指数映射 $\exp : L(G)\longrightarrow G$ 来建立代数问题和拓扑问题之间的关系. 例如，一个 Lie 代数 L 的子代数 $K\subset L$ 是 L 的子空间，而且 $X,Y\ni K\Rightarrow[X,Y]\in K$. Lie 子群 $H\subset G$ 同时是 G 的子群和子流形(在广义意义下)，给出 Lie 子群 $H\subset G$，则由包含映射 $i : H\longrightarrow G$ 的微分之定义 $di : T_e(H)\longrightarrow T_e(G)$是一

个单射. 所以 $L(H)\subset L(G)$ 可以看作一个子空间. 因为光滑同态总是保持括弧积的，所以 $L(H)\subset L(G)$ 又是一个子代数. 反之，从一个子代数 $K\subset L(G)$ 出发，分布 $\mathscr{I}_g=dL_g(K)\subset T_g(G)$ 是对合的. 因为 $\mathscr{I}$ 中的矢量场一定都是这样的形状：$X,Y\in K$，若 $X_1,\cdots,X_l$ 是子空间 K 的基底，而 $\widetilde{X},\widetilde{Y}\in\mathscr{I}$ 是任意的，则

$$[\widetilde{X},\widetilde{Y}]=[\widetilde{X,Y}]=(\widetilde{\sum_i a_iX_i})=\sum_i a_i\widetilde{X}_i.$$

这是因为左平移是保持括弧的积的，令 H 为 $\mathscr{I}$ 的包含单位元的最大积分子流形，则 $H\subset G$ 是一个子流形，它也是 G 的子群，因为若 $h\in H$，则 H 和 hH 二者都是 $\mathscr{I}$ 的包含 h 的最大积分子流形. 故由唯一性有 $H=hH$. 由积分子流形的定义清楚地有 $L(H)=T_e(H)=K$. 这就建立了 G 的 Lie 子群和 $L(G)$ 的子代数的一一对应.

例 设 $O(n)\subset GL(n)$ 是正交群，即

$$O(n)=\{A\subset GL(n)\,|\,AA^t=A^tA=I\},$$

A^t 表示矩阵 A 的转置，在第一章里我们已看到，$O(n)\subset GL(n)$ 是 $GL(n)$ 的子流形. 易证 $O(n)\subset GL(n)$ 是 Lie 子群. 为了辨认出

$$K=L(O(n))\subset L(GL(n))=E(n)=E(n,\mathbf{R}),$$

令 $X\in E(n,\mathbf{R})$ 属于 K，则 $\exp(tX)\in O(n)$，从而

$$(\exp tX)(\exp tX)^t=(\exp tX)(\exp tX^t)=I. \tag{1}$$

对函数 $t\longrightarrow(\exp tX)(\exp tX^t)$ 在 $t=0$ 求导，即有

$$X+X^t=0. \tag{2}$$

反过来，若(2)成立，则 X 和 X^t 可交换，而

$$(\exp tX)(\exp tX^t)=\exp(t(X+X^t))=\exp 0=I.$$

所以

$$L(O(n))=\{X\in E(n)\,|\,X+X^t=0\},$$

即是反对称矩阵的子空间. 作为一个应用，注意到这个子空间的维数是

$$1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2},$$

所以这必定也是子流形 $O(n)$ 的维数.

虽然这里只是重复了第一章中的计算，方法却是很一般的，通过微分定义的关系式(1)来得到(2)式，由于这个原因，(2)时常被称为(1)的无限小条件.

§2. 局部同构，Sophus Lie 的基本定理

Lie 群 G 的 Lie 代数 $L(G)$ 在何种程度上包含了有关 G 的信息？两个 Lie 群具有相同的 Lie 代数，当且仅当它们彼此为局部同构. 首先，我们当然不能期望 $L(G)$ 可以大范围地决定 G，$L(G)=T_e(G)$ 中全是 e 处的方向导数，而为了求方向导数只需要知道 e 附近的情况. 在 $[X,Y]$ 的定义中涉及群乘积. 因为我们用左平移 dL_g 来将 X 铺成一个大范围的矢量场 $\widetilde{X}$，但是为了得到 $[X,Y]$ 其实只需要把 X 铺到 e 的一个邻域中就行了. 所以，我们能够希望的最多就是 $L(G)$ 可以提供局部的信息. Sophus Lie 本人原来的工作肯定了这个事实，后来就称为 Lie 的三个基本定理. 注意，我们虽然用的是现代的大范围的群的语言，问题本质上是关于欧氏空间的. 群乘积及其导数变成微分方程问题. 我们已经给出了关于它的基本定理，即 Frobenius 定理. 下面给一些定义.

两个 Lie 群 G_1 和 G_2 之间的同态 $f: G_1 \longrightarrow G_2$ 是一个群同态，而且同时又是流形间的光滑映射. 令 $\widetilde{X}$ 是 G_1 上的左不变矢量场，则在 G_2 上定义 $\widetilde{Y}$ 如下

$$\widetilde{Y}(Q) = dL_Q(df\widetilde{X}(e)). \tag{1}$$

由定义计算知，$\widetilde{Y}$ 也是左不变的，所以 $\widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ 定义了一个映射

$$f_*: L(G_1) \longrightarrow L(G_2),$$

它显然是矢量空间的线性映射. 此外 $\widetilde{X}$ 和 $\widetilde{Y}$ 是 f-相关的. 因为若 $Q=f(P)$，则

$$\begin{aligned}\widetilde{Y}(f(P)) &= dL_{f(P)} \circ df(\widetilde{X}(e)) = d(L_{f(P)} \circ f)\widetilde{X}(e) \\ &= d(f \circ L_P)\widetilde{X}(e) = df(\widetilde{X}(P)),\end{aligned}$$

这里用到了同态蕴涵 $L_{f(P)} \circ f = f \circ L_P$，所以 f_* 保持括弧运算，因

此是 Lie 代数同态. $f \longrightarrow f_*$ 这种联属关系具有"函子性质"(functorial properties):

(1) 若 $\mathrm{id}: G \longrightarrow G$ 是恒等同态,则 $(\mathrm{id})_* = \mathrm{id}: L(G) \longrightarrow L(G)$ 是恒等映射;

(2) 若 $g: G_2 \longrightarrow G_3$ 也是同态,则 $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. 特别,当 f 是同构时,f_* 也是同构.

如果 $L(G)$ 和 $T_e(G)$ 同构,则很容易看到 f_* 同构于 df. 此外,f_* 与指数映射:

$$\begin{array}{ccc} L(G_1) & \xrightarrow{df} & L(G_2) \\ \downarrow{\scriptstyle \exp} & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G_1 & \xrightarrow[f]{} & G_2 \end{array}$$

是可换的. 回想一下 df 的计算:给出 $X \in L(G_1)$,我们取 G_1 中的曲线 $\alpha(t)$ 使 $\alpha'(0) = X$,令 $\beta = f \circ \alpha$,则 $df(X) = \beta'(0)$. 在我们的情况下,取

$$\alpha(t) = \exp tX.$$

但若 f 是同态,β 就是一个单参数子群. 因此由定义有

$$f(\exp tX) = \beta(t) = \exp(tdf(X)).$$

即令 f 不增大范围的定义,我们仍可得到 f_*,一个局部同态就是一个光滑映射 $f: U_1 \longrightarrow U_2$,$U_1 \subset G_1$ 是单位元 $e \in G_1$ 的一个邻域,而且 f 有以下性质:

(LH):若 $P, Q \in U_1$ 而且 $PQ \in U$,则 $f(PQ) = f(P)f(Q)$.

这个条件不太令人满意. 如果没有能使 $PQ \in U_1$ 的 $P, Q \in U_1$,则 (LH) 仅作为对空集的条件而得到满足. 不用担心,总有一个邻域 $V_1 \subset U_1$ 存在使当 $P, Q \in V_1$ 时,$PQ \in U_1$(这是关于拓扑群的一个初等事实,即群乘积 $G \times G \longrightarrow G$ 在 (e, e) 点连续),所以 (LH) 是有意义的. 而我们象前面那样定义 $\tilde{Y}$ 和 f_*,特别是若 $f: U_1 \longrightarrow U_2$ 是 $e \in G_1$ 的某邻域 U_1 和 $e \in G_2$ 的某邻域 U_2 之间的微分同胚,而且 f 和

f^{-1}都是局部同态，则f称为局部同构. 它显然是一个等价关系. f_*的函子性质说明局部同构的 Lie 群具有相同的 Lie 代数，这就是 Lie 第一基本定理.

更有趣而且显然更实质的问题是它的逆. 若G_1和G_2具有相同的 Lie 代数，它们是否局部同构? Lie 的第二基本定理对此做了肯定的回答. 现在我们来加以证明. 令$\varphi: L(G_1)\longrightarrow L(G_2)$是$G_1$和$G_2$的 Lie 代数间的同构. 我们知道积$L(G_1)\times L(G_2)$是 Lie 群$G_1\times G_2$的 Lie 代数. 在其中考虑

$$K=\{(x,\varphi(x))\mid x\in L(G_1)\},$$

φ为代数同态，因此容易导出K是$L(G_1)\times L(G_2)$的子代数. 所以我们有一个 Lie 子群$H\subset G_1\times G_2$使$L(H)=K$，令$f_1: H\longrightarrow G_1$是包含映射$i: H\longrightarrow G_1\times G_2$后再接上投影$G_1\times G_2\longrightarrow G_1$. 很容易看到$df_1: K\longrightarrow L(G_1)$就是

$$(x,\varphi(x))\longmapsto x.$$

它显然是一个同构，由隐函数定理，f_1是局部微分同胚，于是有e在G_1中的一个邻域U_1和$e\in H$的一个邻域V以及到V上的微分同胚$g: U_1\longrightarrow V$使$f_1g=1_{U_1}, gf_1=1_V$. 因为f_1是同态，这表明g是一个局部同构.

令$f_2: H\longrightarrow G_2$是包含映射$i: H\longrightarrow G_1\times G_2$继以投影$G_1\times G_2\longrightarrow G_2$，于是$df_2$就是

$$(x,\varphi(x))\longmapsto\varphi(x),$$

因为φ是一个同构，所以它也是一个同构. 于是f_2是一个局部微分同胚，从而也是局部同构. 所求的G_1和G_2之间的局部同构f可由组合g与f_2而得. 注意，按我们的作法$df=\varphi$，所以我们实际上已证明了在 Lie 群的局部同构和 Lie 代数的代数同构之间有一个一一对应. 还要注意，H的存在是 Frobenius 定理的一个推论，所以上述定理实际上是一个微分方程的定理.

作为应用，讨论如下情况，令V为实域上的矢量空间，在矢量的加法运算下，V显然是 Lie 群. 因此，可以确定它的 Lie 代数

$L(V)$. 早就知道作为矢量空间,$L(V)=V$ 恰为 V 本身,为了算出括弧运算,先写出切丛 $T(V)=V\times V$. 设 $X\in L(V)=0\times V$ 为 $L(V)$的一个元,则左不变矢量场 $\tilde{X}$ 显然由下式给出

$$\tilde{X}(x) = dL_x(X) = (x,X).$$

由此推知$(\tilde{X}f)(x)=D_Xf(x)$恰为在 x 点处沿着 X 的方向导数. 设 $e_1,\cdots,e_n$ 为 V 的一组基,则

$$X = \sum_i \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

其中系数 λ_i 均为常数,则$\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_i}$推知$[X,Y]=0$. 一个 Lie 代数 L,若对任何 $X,Y\in L$ 均满足$[X,Y]=0$,则称为平凡 Lie 代数,设 G 为 Lie 群,且 $L(G)$是平凡的,则根据 Lie 群的定理,群 G 局部同构于某个矢量群 $V(\dim V=\dim G)$. 由于 V 的运算是可交换的,故在 $e\in G$ 的某邻域 U 内群的乘法运算也是可交换的,若再设 G 是连通的,则熟知 U 生成 G,故 G 为可交换的. 因此具有平凡 Lie 代数的连通 Lie 群 G 为 Abel 群.

上述结果的逆也是对的. 从下述的一般考察开始,设 α,β 为 G 中两 曲线,满足 $\alpha(0)=\beta(0)=e$ 且具有 初始方向 $X,Y\in L(G)$,则 $\gamma(t)=\alpha(t)\beta(t)$ 也满足 $\gamma(0)=e$ 的曲线,问题是如何计算初始方向 $\gamma'(0)$? 令 $m: G\times G\longrightarrow G$ 为乘法映射,则 γ 是复合映射:

$$\mathbf{R}\xrightarrow{(\alpha,\beta)} G\times G\xrightarrow{m} G.$$

故得

$$\gamma'(0) = dm(d(\alpha,\beta)) = dm(X,Y).$$

注意 $T_e(G\times G)=T_e(G)\times T_e(G)$,故

$$(X,Y) = (X,0) + (0,Y).$$

由于 dm 是线性的,故只须算出 $dm(X,0)$和 $dm(0,Y)$就足够了. 对于 $Y=0$,可取 $\beta(t)=e$ 为常值曲线,这时 $\gamma(t)=\alpha(t)\beta(t)=\alpha(t)e=\alpha(t)$. 由此推知

$$dm(X,0) = X.$$

类似地 $dm(0,Y)=Y$. 因此对于通过恒等元 e 的两曲线之积 $\gamma(t)=\alpha(t)\beta(t)$ 得

$$\gamma'(0)=\alpha'(0)+\beta'(0),$$

即恰为初始矢量之和.

将上述结果应用于 $X,Y\in L(G)$ 以及 $\alpha(t)=\exp tX,\beta(t)=\exp tY$, 即知 $X+Y$ 为曲线

$$\gamma(t)=\exp tX\cdot\exp tY$$

的初始矢量,遗憾的是因为 $\exp tX,\exp tY$ 可能不是彼此可交换的,$\gamma(t)$ 一般并不是单参数子群,矢量 $X+Y$ 是对应于一路径的单参数子群,但它可能不易于表示出来. 然而,若 G 恰为可交换的,则 γ 确为单参数子群,这就得到

$$\exp tX\cdot\exp tY=\exp t(X+Y).$$

因此 $\exp:L(G)\longrightarrow G$ 是矢量群 $L(G)$ 和 G 之间的同态映射,在下一节中将证明 exp 为一局部同胚映射,再次由 Lie 氏定理推知 G 和 $L(G)$ 有相同的 Lie 代数 $L(G)\simeq L(L(G))$. 因为 $L(L(G))$ 是平凡的,故 $L(G)$ 也是平凡的,因此,有以下定理.

定理 一个连通 Lie 群 G 是可换的充分必要条件是它的 Lie 代数是平凡的.

具体地说,设 G 连通且可交换的,已知

$$\exp:L(G)\longrightarrow G$$

为一同态映射,其中 $L(G)$ 是矢量群. 由于 exp 覆盖了一个 e 在 G 中生成的 G 的邻域,故知它为满映射,因此作为群有 $G=L(G)/K$,其中

$$K=\ker\exp\subset L(G)$$

为一子群,由于 $0\in K$ 为孤立点,故 K 中任一点均为孤立点或者说 K 为 $L(G)$ 的离散子群. 令 $U=\langle K\rangle$ 为 K 所生成的矢量子空间,且设 V 为满足 $L(G)=U\oplus V$ 的 U 的补空间. 显然 $\exp|_V$ 为一对一的,因此

$$G=U/K\times V,$$

群 V 确为另一个矢量群，商 U/K 为一个环面群，这是熟知的，这个论证由如下引理进行.

引理 设 $n=\dim U$，存在 n 个线性无关的元 $(k_1,\cdots,k_n)\subset K$ 满足 $K=\langle\langle k_1,\cdots,k_n\rangle\rangle$，即 K 是由 $k_1,\cdots,k_n$ 生成的子群.

证 对 n 作归纳证明. 若 $\dim U=1$. 令 $e\in U$ 为一基，考虑

$$\lambda_0=\inf\{\lambda\,|\,\lambda>0,\lambda e\in K\}.$$

由于 K 是离散且闭的，故 $\lambda_0>0$ 且 $k_0=\lambda_0 e\in K$. 若 $k=\lambda e\in K$，则

$$|\lambda|=n\lambda_0+\mu,\quad \mu<\lambda_0, n \text{ 为整数}.$$

由于 $\mu e=|\lambda|e-n\lambda_0 e\in K$，所以 $\mu=0$，即得 $K=\langle\langle k_0\rangle\rangle$.

在一般情形，设 $k_1\in K$ 为 K 的一个非可除元，即 k_1 不能写成 $k_1=nk_2$，其中 $k_2\in K$ 且 $n>1$. 由于 K 是离散的，如此的 k_1 一定存在，可得如下的正合序列

$$0\longrightarrow\langle k_1\rangle\longrightarrow K\longrightarrow K/\langle\langle k_1\rangle\rangle\longrightarrow 0.$$

作为 R 上矢量空间的加法群的子群 $\langle\langle k_1\rangle\rangle$ 和 K 都是无挠(torsion free)的. 而 k_1 的非可除性使得 $K_1=K/\langle\langle k_1\rangle\rangle$ 也是自由的. 根据初等代数的熟知事实知，$K\simeq\langle\langle k_1\rangle\rangle\oplus K_1$ 分裂成直和. 显然在这样的 U 上并作归纳就完成了证明，因此得到如下定理.

定理 一个连通交换 Lie 群 G 同构于群 $\mathbb{R}^m\times T^n$，其中 $\mathbb{R}^m$ 为加法矢量群而 T^n 为环面群. 特别，一个连通紧的交换 Lie 群 G 同构于环面群 T^n.

现在只剩下一个问题，即存在定理. 是否每个 Lie 代数 L 都是一个 Lie 群 G 的 Lie 代数?这就是 Lie 的第三基本定理. 实际上，Lie 并没有大范围地回答按上面方式提出的问题. 他所做的只是局部的. 如果这样的 Lie 群存在，必须能构造欧氏空间中的乘积函数来作出所需的 Lie 代数 L，这里所应适合的条件又是一个微分方程，它的求解要求可积性条件：还是 Frobenius 定理. 结果是，给一个 Lie 代数正是给一个所需的可积性条件. 关于群运算通常所需的结合性条件等等，都可以从唯一性得出. 所有这一切在 Pontrjagin 的“连续群”一书中都有完全的讨论，所以我们不再去讲了. 我们同

这样一个问题：一个局部同构“好”到什么程度．若 $f:U_1\longrightarrow V_1$ 是 G_1 与 G_2 间的一个局部同构，f 何时可以扩充为一个大范围的同构？或至少扩充成一个大范围的同态？现在我们还不能充分地回答这些问题，但是我们要指出，从这一点开始，问题完全是一个大范围的拓扑学问题，而要用到基本群的概念．我们将在关于技巧性材料的各节中讲到其中的一部分．

§3. 指数映射，较深的结果

以上我们所建立的只是 Lie 群理论的初等部分，用到的还只有 Lie 代数的存在和 Frobenius 定理．现在我们已经可以进入更实质性的理论了．关键在于对指数映射 $\exp: L(G)\longrightarrow G$ 作更仔细的考查．我们把它写成

$$\mathbf{R}\times L(G)\longrightarrow G,\ (t,X)\longmapsto \exp tX,$$

以强调 $\exp tX$ 是两个变元 t 和 X 的函数．我们知道，对于固定的 X，$\exp tX$ 是 t 的光滑函数．这可由 Picard 关于微分方程的定理得知．但是，至少是搞分析的人，都知道一个更细微的结果，即常微分方程的解还光滑地依赖于初始条件，只要矢量场是光滑的．现在就是这种情况．于是 $\exp tX$ 对 t 和 X 都是光滑的．承认这一点以后，我们就可以在 $0\in L(G)$ 点来计算 $\exp: L(G)\longrightarrow G$ 的导数．我们知道 $T_0(L(G))=L(G)$，

$$T_{\exp(0)}(G)=T_e(G)=L(G).$$

引理 $d\exp=1: L(G)\longrightarrow L(G)$ 是恒等映射．

证明是很容易的，为了在 $X\in L(G)$ 处计算 $(d\exp)(X)$，在流形 $L(G)$ 上选一过0的曲线 $\gamma(t)$，使它在起点 $t=0$ 处的方向是 $\gamma'(0)=X$，于是 $d\exp(X)=\frac{d}{dt}(\exp\gamma(t))_{t=0}$，但在我们的情况，可以取 $\gamma(t)=tX$，然后由定义

$$\frac{d}{dt}(\exp\gamma(t))_{t=0}=\frac{d}{dt}(\exp tX)_{t=0}=X.$$

这样一来，由隐函数定理 exp 在 $0\in L(G)$ 的某个邻域 V 中

就是一个微分同胚，将 V 映到 G 的某个邻域 U 上；exp 其局部逆 $\exp^{-1}:U\longrightarrow V\subset L(G)$ 可以用作 G 的光滑构造的局部坐标. 这个坐标自然地称作对数函数 $\log=\exp^{-1}$（在 Pontrjagin 书中称为第一类标准坐标）.

作为一个应用，我们回到前面讨论过 的一种情况. 令 $K\subset L(G)$ 是一个子代数. 于是我们知道有一个 Lie 子群 $H\subset G$ 使 $K=L(H)$，H 被抽象地描述作一个分布的最大积分子流形. 现在我们可以更具体地讲 H. 显然 H 包含了集 $\exp K=\{\exp X\mid X\in K\}$. H 是连通群. 由此，$\exp K$ 包含 $e\in H$ 的一个邻域. 任一个连通的拓扑群都是由单位元的某个邻域所生成的，这是拓扑群的一个初等的事实. 所以 H 是由 $\exp K$ 按抽象群的意义所生成的，即 H 中每个元都可写成一个有限积 $\prod \exp X_i$，这里 $X_i\in K$. 一个连通 Lie 群的同态 $f:G_1\longrightarrow G_2$ 完全由其诱导映射 $f_*:L(G_1)\longrightarrow L(G_2)$ 所决定.

为了一个更加重要的应用，我们将讨论 Abelian Lie 群的构造.

设 $m:G\times G\longrightarrow G$ 为乘积映射，则有导数

$$dm:T_e(G\times G)=T_e(G)\times T_e(G)\longrightarrow T_e(G).$$

对矢量 $(X,Y)\in T_e(G)\times T_e(G)$，计算 $dm(X,Y)$. 注意，因为 $(X,Y)=(X,0)+(0,Y)$，所以由线性性质我们只需计算 $dm(X,0)$ 和 $dm(0,Y)$. 如果 $\alpha:\mathbf{R}\longrightarrow G$ 是 G 中的单参数子群且 $\alpha'(0)=X$，则

$$\bar{\alpha}:\mathbf{R}\longrightarrow G\times G,\quad t\longmapsto(\alpha(t),e)$$

显然是 $G\times G$ 中一条曲线，使得 $\bar{\alpha}(0)=e\times e$ 且 $\bar{\alpha}'(0)=(X,0)$. 于是由定义

$$dm(X,0)=(m\circ\bar{\alpha})'(0),$$

$m\circ\bar{\alpha}=\alpha$，从而有 $dm(X,0)=X$. 于是算出

$$dm(X,Y)=X+Y.$$

设 V 是 $\mathbf{R}$ 上的矢量空间，$\dim V=n$. 则 V 在矢量加法下为一个 Lie 群. Lie 代数 $L(V)$ 作为一个矢量空间 $L(V)=V$. 如果我们赋与 V 一个整体的坐标系 $(x_1,\cdots,x_n)$（即选择 V 的一组基底），则矢量场 $\frac{\partial}{\partial x_i}$

$(i=1,2,\cdots,n)$显然是左不变的. 这仅是一个简单的事实,即

$$(dL_a \frac{\partial}{\partial x_i})f = \frac{\partial}{\partial x_i}[f(a+x)] = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{a+x}.$$

现在,$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, i=1,2,\cdots,n\right)$构成了 Lie 代数 $L(V)$的一个基底. 因为

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0,$$

则对所有的 $X, Y \in L(V)$有$[X,Y]=0$,即 $L(V)$是平凡的 Lie 代数.

设 G 是一个 Lie 群且 $X, Y \in L(G)$. 考虑曲线

$$\gamma(t) = (\exp tX)(\exp tY).$$

如果 G 不是 Abel 群,则一般来说 γ 不是一个同态. 但它仍是一条曲线,那么 $\gamma'(0)$是什么?按照上面一般的讨论,有

$$\gamma'(0) = X + Y.$$

如果 G 是 Abel 群,则 γ 是同态且有

$$\exp(X+Y) = \exp X \cdot \exp Y.$$

这意味着当 $L(G)=V$ 是矢量加法下的 Lie 群时

$$\exp: L(G) \longrightarrow G$$

是一个群同态. 因为我们刚刚看到 exp 也是一个局部微分同胚,于是得出结论:$L(G)$和 G 是局部同构的,因而有相同的 Lie 代数,即

$$L(G) \simeq L(L(G)) = L(V)$$

是平凡的. 反之,如果 $L(G)$是平凡的,则

$$d(\exp) = \mathrm{id}: L(L(G)) = L(V) \longrightarrow L(G)$$

是一个 Lie 代数同构,因而 V 和 G 一定是局部同构的,特别 G 是局部 Abel 群. 如果再加上 G 是连通的,则 G 是整体 Abel 群. 在这种情况下,我们还知道

$$\exp: L(G) \longrightarrow G$$

是一个同态而且是映上的,因而 $G=L(G)/\ker(\exp)$. 这样我们证明了下面的定理.

定理 一个连通 Lie 群 G 是 Abel 群当且仅当 $L(G)$是平凡的. 在这个情况下,$G=\mathbb{R}^s \times T^t$ 与矢量群 $\mathbb{R}^s$ 和环面 T^t 的乘积同构. 特

别，一个连通的紧的 Abelian Lie 群 G 是一个环面.

这个定理不仅就其本身而言是有用的，而且它也为括弧运算 $[X,Y]$ 提供了一些新的意义. 其非平凡性正是 G 的非可换性的度量.

定理（光滑构造的唯一性） Lie 群 G_1 到 Lie 群 G_2 的连续同态 $f:G_1\longrightarrow G_2$ 一定自动地是光滑同态.

如果把这个定理中的同态和 Lie 群换成连续映射和流形，得到的结论自然是荒唐透顶的. 所以这个定理对于 Lie 群可以成立实在是 Lie 群的十分独特之处. 特别是，它说明对于 G 上的一个已给的拓扑，至多有一种方式使 G 成为 Lie 群. 这就使我们可以讨论，一个已知的拓扑群 G 是否是 Lie 群而不必指明这个 Lie 群有什么样的光滑构造（但必须事先给定拓扑，这是很重要的，例如实数轴如果赋以离散拓扑和通常的拓扑就可以两种不同的方式做成 Lie 群）.

如果这个定理成立，那么它对 $G_1=\mathbf{R}$（实数轴）这个特例也应成立.

定理 实轴 $\mathbf{R}$ 到 Lie 群 G 的连续同态 $\alpha:\mathbf{R}\longrightarrow G$ 一定是光滑的.

证 令 G 的 Lie 代数为 $L(G)$，而 $\exp:L(G)\longrightarrow G$ 是指数映射. 令 V 为 $0\in L(G)$ 的一个邻域而且 $\exp:V\longrightarrow U$ 是 V 到 $e\in G$ 的某个邻域 U 上的微分同胚. $\log:U\longrightarrow V$ 是对数映射. 取 $0\in L(G)$ 的邻域 $W\subset V$ 使 $X,Y\in W\Rightarrow X+Y\in V$. 由连续性，可以取 $\varepsilon>0$ 使当 $|t|<\varepsilon$ 时 $\alpha(t)\in\widetilde{U}=\exp W\subset U$，再令

$$\beta:(-\varepsilon,\varepsilon)\longrightarrow L(G)$$

是映射 $\beta(t)=\log\alpha(t)$. 设 $|t|<\varepsilon$，l,k 是正整数，且 $l\leqslant k$，有

$$\begin{aligned}\exp(l\beta(t/k)) &= [\exp\beta(t/k)]^l=\left[\alpha\left(\frac{t}{k}\right)\right]^l\\&=\alpha\left(\frac{lt}{k}\right)=\exp\beta\left(\frac{lt}{k}\right).\end{aligned}$$

于是

$$l\beta\left(\frac{t}{k}\right)=\beta\left(\frac{lt}{k}\right) \tag{*}$$

这表示，对于一切$|\gamma|<1$有$\beta(\gamma t)=\gamma\beta(t)$，大家知道，能适合这个关系的连续函数只能是

$$\beta(t)=ct,$$

c是常数，这样β是光滑的．所以$\alpha=\exp\circ\beta$也是光滑的．

上面的讨论还不完全．对于（*）式，只有当我们知道$\beta\left(\frac{l}{k}t\right)$和$l\beta\left(\frac{t}{k}\right)$都在$V$中时，（*）式才能成立，因为我们只知道在$V$中exp是一对一的．既然已有$|lt/k|<\varepsilon$，我们知道$\beta(lt/k)\in V$．事实上我们甚至有$\beta(lt/k)\in W\subset V$．所以问题是在于$l\beta(t/k)$，就我们所知它还不一定恒在$V$内．我们将要证明它不会在$V$外，因为如果对于某个整数$l$，$l\beta(t/k)$在$V$外，取$l$为这种整数中最小的一个．因$|t/k|\leqslant|t|<\varepsilon$，故有$l>1$．由定义，$(l-1)\beta(t/k)\in V$，所以对$(l-1)$，（*）式成立，而

$$(l-1)\beta(t/k)=\beta\left(\frac{l-1}{k}t\right),$$

这时得到更强的结论，即$(l-1)\beta(t/k)\in W$，因为$\beta\left(\frac{l-1}{k}t\right)\in W$，又因$\beta(t/k)\in W$，故

$$l\beta\left(\frac{t}{k}\right)=(l-1)\beta\left(\frac{t}{k}\right)+\beta\left(\frac{t}{k}\right)\in W+W\subset V.$$

为了得到一般的定理，我们需要一个引理．

引理 令$L(G)=V_1\oplus V_2$，将$L(G)$分为两个矢量空间，于是映射

$$\varphi:L(G)\longrightarrow G,\quad (v_1,v_2)\longmapsto \exp v_1\cdot\exp v_2$$

在0点是局部微分同胚．*

证 φ是以下的复合

---

* cf. P. Tondeur, *Introduction to Lie groups and transformation groups*, p. 113, Lemma 6. 3. 2.

$$V_1 \oplus V_2 \xrightarrow{\exp \times \exp} G \times G \xrightarrow{\mu} G,$$

μ 表示乘积. 利用 $\mu(p,e)=\mu(e,p)=p$,很容易计算出 $d\varphi=\mathrm{id}$.

作为一个系,令$(X_1,\cdots,X_n)$是 $L(G)$的矢量空间基底. 于是

$$\varphi: L(G) \longrightarrow G,$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_i X_i \longmapsto \prod_{i=1}^{n} \exp(t_i X_i)$$

是局部微分同胚,它的逆叫做第二类标准坐标.

现在令 $f: G_1 \longrightarrow G_2$为连续同态,$(X_1,\cdots,X_n)$是 $L(G_1)$的基底. 于是对于每个$1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\beta_i(t) = f(\exp tX_i)$$

都是 G_2的单参数子群,因此也是光滑子群,于是映射

$$f \circ \varphi: L(G_1) \longrightarrow G_2,$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_i X_i \longmapsto f\left(\prod_{i=1}^{n} \exp(t_i X_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \beta_i(t_i)$$

也是光滑的. 这说明 f 在点 $e \in G_1$是光滑的. 但是很容易推论出,在 e 光滑的同态一定处处光滑.

解决了唯一性问题后,余下的是存在问题. 每一个拓扑群都能做成 Lie 群吗?显然需要一些限制,Lie 群至少是一个拓扑流形,即为局部欧几里德,能否给 G 加上一个光滑构造使成为 Lie 群?这就是 Hilbert 在1900年国际数学会上提出的 Hilbert 第五问题(在这次会上,他提出了各个领域中二十三个大问题). 在50年代,Montgomerry 和 Zippin 终于做出了肯定的回答,成了 Lie 群理论中的一个重要高潮.

§4. Lie 群上的 Taylor 级数展开式, 更多的应用

上一节的结果建筑在一件事实之上,即指数映射 $\exp: L(G) \longrightarrow G$ 是原点$0 \in L(G)$的一个邻域中的局部微分同胚,因此给出了

微分流形 G 的一个局部坐标系(即对数). 自然地要问 exp 怎样把 $L(G)$中的代数运算和 G 中的群运算联系起来，这一节的中心问题就是探讨这个关系. 我们将会看到，这里又有许多意料之外的问题.

G 中的基本运算是乘法和逆. 令 $X,Y\in L(G)$，考虑

$$\alpha(t) = (\exp tX)(\exp tY),$$
$$\beta(t) = (\exp tX)^{-1},$$

$\alpha(t)$不是一个单参数子群但仍是一条曲线. 所以我们可以计算 $\alpha'(t)$. 下面再讲乘法运算

$$\mu: G\times G \longrightarrow G.$$

有导数

$$d\mu: L(G)\times L(G) \longrightarrow L(G).$$

由线性关系

$$d\mu(X,Y) = d\mu(X,0) + d\mu(0,Y),$$

$G\times G$ 中过(e,e)点的方向为$(X,0)$的曲线是 $\gamma(t)=(\exp tX, e)$. 因此 $\mu\gamma(t)=\exp tX$，从面

$$d\mu(X,0) = (\mu\gamma)'(0) = X.$$

于是有 $d\mu(X,Y)=X+Y$. α 是以下映射的复合

$$\mathbf{R} \xrightarrow{\exp\times\exp} G\times G \xrightarrow{\mu} G.$$

因此

$$\alpha'(0) = d\mu(X,Y) = X + Y. \tag{1}$$

与此相似，有

$$\beta'(0) = -X. \tag{2}$$

对这些计算可以解释如下：若 t 充分小，则

$$\alpha(t) = (\exp tX)(\exp tY) = \exp\varphi(t,X,Y),$$

这里 $\varphi(t,X,Y)$是点$(\exp tX)(\exp tY)$的对数坐标，且有

$$\varphi(0,X,Y) = 0.$$

因为 $d\exp=\mathrm{id}$，故

$$\alpha'(0) = d\exp(\varphi(0,X,Y)) = \varphi'(0,X,Y).$$

故(1)式表明 $\varphi'(0,X,Y)=X+Y$.

$\varphi(t,X,Y)$是一个 C^∞函数,所以可以考虑它的 Taylor 展开式

$$\varphi(t,X,Y) \sim \sum \varphi^{(k)}(0,X,Y)\frac{t^k}{k!}$$

(这里~只表示对应关系而不表示右方收敛). 而上面所述只涉及到前两项,因此,$L(G)$中的矢量空间运算 $X+Y$ 和 $-X$ 只是群 G 中群运算求积和求逆的一阶近似. 既然如此,它们当然只是粗略而不精确的. 例如,$X+Y$ 是可换的而 G 中的乘法一般却不是. 最后,希望能得到 φ 的完全的展开式. 我们要指出,甚至这种简单的一阶的结果也会有未曾预料到的很强的结果,这就是 E. Cartan 定理.

定理(E. Cartan)　Lie 群 G 的任意闭子群都是 Lie 子群.

我们需要证明 $H\subset G$ 是一个子流形(不论是哪一种意义的),为此要有下面三个引理.

引理1　设$\{X_n\}$是 $L(G)$中一串非0矢量,而且

(i)　$X_n \longrightarrow 0$;

(ii)　$\exp X_n \in H$ 对一切 n 均成立;

(iii)　$X_n/|X_n| \longrightarrow Y$,$Y$ 是 $L(G)$中一个元,

则对一切 $t\in\mathbb{R}$ 有 $\exp(tY)\in H$.

证　设已知$0\neq t\in\mathbb{R}$,则$|X_n|/t \longrightarrow 0$,对每一个 n,取使得$1/p_n<|X_n|/t$ 的最小的整数 p_n,于是有

$$\frac{1}{p_n} < \frac{|X_n|}{t} \leqslant \frac{1}{p_n-1},$$

即

$$1 < \frac{p_n|X_n|}{t} \leqslant 1+\frac{1}{p_n-1}.$$

所以 $p_n|X_n| \longrightarrow t$,从而

$$\exp(p_nX_n) \longrightarrow \exp\left(p_n|X_n|\frac{X_n}{|X_n|}\right) \longrightarrow \exp tY.$$

但是$\exp(p_nX_n)=(\exp X_n)^{p_n}\in H$,因为 H 是闭子群,故知 $\exp(tY)\in H$

$(t\neq 0)$. $t=0$时结果是明显的.

令 $K=\{Y\in L(G)\mid \exp tY\in H$ 对一切 $t\in\mathbb{R}$ 成立$\}$.

引理2 $K\subset L(G)$是一个子空间.

证 设 $Y_1, Y_2\in K$ 且 $Y_1+Y_2\neq 0$, 对于小的 t, 记

$$(\exp tY_1)(\exp tY_2) = \exp f(t).$$

由前面的计算知 $f(0)=0$, $f'(0)=Y_1+Y_2$, 即是说 $f(t)/t\longrightarrow Y_1+Y_2$, 令 $X_n=f(1/n)$, 则(i), (ii), (iii)都成立, 而(iii)中的 $Y=(Y_1+Y_2)/|Y_1+Y_2|$. 所以

$$Y_1+Y_2=|Y_1+Y_2|Y\in K.$$

引理3 $\exp K$ 是 e 在 H 中的一个邻域.

证 记 $L(G)=K\oplus K'$, 我们知道

$$\varphi: L(G)\longrightarrow G,\ (Y, Y')\longmapsto (\exp Y)(\exp Y')$$

是$0\in L(G)$附近的局部微分同胚. 设这引理不真. 于是有一串(Y_n, Y_n')使得$(\exp Y_n)(\exp Y_n')\in H$, $(\exp Y_n)(\exp Y_n')\longrightarrow e$ 而 $Y_n'\neq 0$, 于是对于一切 n 有 $\exp Y_n'\in H$, 可以找到一个子序列 Y'_{n_i} 使得 $Y'_{n_i}/|Y'_{n_i}|\longrightarrow Y'$, 由引理1得 $Y'\in K\cap K'$. 这是矛盾的, 因为 $|Y'|=1$.

Cartan 定理和前面关于光滑构造唯一性的结果提供了寻找 Lie 群有用的办法. Lie 群的每一个闭子群 H 本身也是 Lie 群. 此外, 上面的证明也断定了它的 Lie 代数.

$$L(H)=\{Y\in L(G)\mid \exp tY\in H \text{ 对一切 } t \text{ 成立}\}$$

中所包含的矢量正是相联的单参数子群全在 H 中的矢量.

按照 Cartan 的定理, 前面证明了的子群—子代数对应关系中还有一个欠缺, 即需要对子代数 $K\subset L(G)$作一个代数的刻画使得相应的子代数为闭, 我们所知道的只是 H 由集$\{\exp Y\mid Y\in K\}$所生成的. 可以取 H 的闭包 $\overline{H}$, 由 Cartan 定理, $\overline{H}$ 是 Lie 子群, 可能会有 $L(\overline{H})$大于 K 的情况, 事实上, 对于环面上的无理流就发生了这样的事.

我们再举几个例子. 在第一章里指出了正交群 $O(n)\subset GL(n)$ 是一个子流形. 读者可以看到, 那个证明是 Cartan 定理的特例. 事

实上，Cartan 定理就是由 von Neumann 对于 $GL(n,\mathbf{R})$的闭子群证的.

例1 $n\times n$ 非异复矩阵(即非异复线性变换)之群 $GL(n,\mathbf{C})$，和实的情况一样，也是一个 Lie 群(但实维数为$2n^2$)，而它的 Lie 代数是一切 $n\times n$ 复矩阵之矢量空间 $E(n,\mathbf{C})$.

$GL(n,\mathbf{C})$有一个子群即酉群 $U(n)$，即保持 $\mathbf{C}^n$ 中之内积的线性变换之群，用矩阵表示

$$U(n) = \{A \in GL(n,\mathbf{C}) \mid AA^* = A^*A = I\},$$

$A^*=(\overline{A}^t)$是共轭转置. 显然 $U(n)\subset GL(n,\mathbf{C})$是一个闭子群. 利用无穷小条件，容易看到，它的 Lie 代数由反 Hermit 对称矩阵(或称反共轭矩阵)组成：

$$L(U(n)) = \{X \in E(n,\mathbf{C}) \mid X + X^* = 0\}.$$

由此，很容易算出，$U(n)$的(实)维数是

$$\dim U(n) = 2\sum_{i=1}^{n-1} i + n = n(n-1) + n = n^2.$$

注意，$GL(n,\mathbf{R})\subset GL(n,\mathbf{C})$以自然的方式形成一个闭子群，而且

$$U(n) \cap GL(n,\mathbf{R}) = O(n).$$

例2 令 $SL(n,\mathbf{C})\subset GL(n,\mathbf{C})$是么模(unimodular)矩阵子群

$$SL(n,\mathbf{C}) = \{A \in GL(n,\mathbf{C}) \mid \det A = 1\}.$$

这显然是 $GL(n,\mathbf{C})$的一个闭子群. 为了决定 $L(SL(n,\mathbf{C}))$，我们要注意，若 λ 是矩阵 X 的固有值，而相应的固有矢量是 v，则由 $Xv=\lambda v$ 得到

$$(\exp X)v = \sum_k X^k v/k! = \left(\sum_k \lambda^k/k!\right)v = e^\lambda v.$$

由此容易得出，若$(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$是 X 的全部固有值组(各按其重数计)，则$(e^{\lambda_1},\cdots,e^{\lambda_n})$是 $\exp X$ 的全部固有值组，特别是

$$\det(\exp X) = e^{\mathrm{Tr}(X)},$$

$\mathrm{Tr}(X) = \sum_i \lambda_i$ 是 X 的迹(trace). 由此，再用无穷小条件，有

$$L(SL(n,\mathbf{C})) = \{X \in E(n,\mathbf{C}) \mid \mathrm{Tr}(X) = 0\}.$$

类似地，可以定义 $SL(n,\mathbb{R})=SL(n,\mathbb{C})\cap GL(n,\mathbb{R})$，而且

$$L(SL(n,\mathbb{R}))=\{X\in E(n,\mathbb{R})\,|\,\mathrm{Tr}X=0\}.$$

例3 $SL(n,\mathbb{C})\cap U(n)=SU(n)$，$SL(n,\mathbb{R})\cap O(n)=SO(n)$.

现在我们再回到一般的讨论，回忆一下，若已知 $X,Y\in L(G)$，并对小的 t 记

$$(\exp tX)(\exp tY)=\exp\varphi(t,X,Y),$$

我们已经证明了

$$\varphi(0,X,Y)=0,\quad \varphi'(0,X,Y)=X+Y.$$

现在求 φ 的高阶导数. 为此，回到一些基本的考虑，令 $X\in T_e(G)$，$\widetilde{X}$ 则是与 X 相联的不变矢量场，对于一个光滑函数 f，我们有函数 $\widetilde{X}(f)$，若 $g\in G$ 是一个点，我们有

$$(\widetilde{X}f)(g)=\langle\widetilde{X}(g),f\rangle=\langle dL_gX,f\rangle$$

$$=\langle X,f\circ L_g\rangle=\frac{d}{dt}f(g\exp tX)\big|_{t=0}.$$

引理 $(\widetilde{X}^kf)(g)=\frac{d^k}{dt^k}f(g\exp tX)\big|_{t=0}$.

证 因

$$(\widetilde{X}f)(g\exp sX)=\frac{d}{dt}f(g\exp sX\cdot\exp tX)\big|_{t=0}$$

$$=\frac{d}{dt}f(g\exp(t+s)X)\big|_{t=0}=\frac{d}{ds}f(g\exp sX),$$

于是由归纳法有

$$(\widetilde{X}^mf)(g\exp sX)=\frac{d^m}{ds^m}f(g\exp sX).$$

而引理只是 $s=0$时的特例. 还有更一般的结果

$$[(\widetilde{X}_1\widetilde{X}_2\cdots\widetilde{X}_l)f](g)$$

$$=\frac{\partial^l}{\partial t_1\cdots\partial t_l}f(g\exp t_1X_1\cdot\exp t_2X_2\cdot\cdots\cdot\exp t_lX_l)\big|_{t_1=\cdots=t_l=0}. \qquad (*)$$

我们希望应用(*)式于一个特殊的函数 f，即对数坐标函数，首先注意，虽然(*)是对实值函数 $f:G\longrightarrow\mathbb{R}$ 建立的，它不难推广到矢量值函数. 对数坐标函数就正是这样一个函数. 回忆一下，在

$e\in G$ 的一个邻域 U,它的定义如下:

$$f:U \longrightarrow L(G), \quad \exp Y \longmapsto Y.$$

具体地说,给定 $X\in L(G)$,则

$$f(\exp tX) = tX, \quad \text{对于小的 } t.$$

这个函数特别的好处在于它是关于 t 的线性函数,这便于使用 Taylor 展开式(*).例如在(*)中若取 $X_1=X_2=\cdots=X_l=X$,且 $g=e$,则得

$$(\widetilde{X}^l f)(e) = \frac{\partial^l}{\partial t_1\cdots\partial t_l} f(\exp t_1X\cdot\exp t_2X\cdot\cdots\cdot \exp t_lX)\Big|_{t_1=\cdots=t_l=0}.$$

根据定义

$$\begin{aligned} f(\exp t_1X\cdot\cdots\cdot\exp t_lX) &= f(\exp(t_1+\cdots+t_l)X) \\ &= (t_1+\cdots+t_l)X. \end{aligned}$$

显然,当对它们作用$\frac{\partial^l}{\partial t_1\cdots\partial t_l}$时,有

$$(\widetilde{X}^l f)(e) = \begin{cases} X, & l=1, \\ 0, & l>1. \end{cases}$$

这表明当我们在 e 点处应用(*)式于对数坐标函数 f 时,能去掉形如 $\widetilde{X}^l(l>1)$的一切单项式,例如说,在 $f(\exp t_1X_1\cdot\exp t_2X_2)$中二阶项为(注意,现在 $X_1\neq X_2$)

$$(\widetilde{X}_1^2 f)(e) = \frac{\partial^2 f}{\partial t_1^2}\Big|_0 = 0,$$

$$(\widetilde{X}_2^2 f)(e) = \frac{\partial^2 f}{\partial t_2^2}\Big|_0 = 0,$$

$$(\widetilde{X}_1\widetilde{X}_2 f)(e) = \frac{\partial^2 f}{\partial t_1\partial t_2}\Big|_0.$$

因此,全部二次项为

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t_1^2}\Big|_0 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t_2^2}\Big|_0 + \frac{\partial^2 f}{\partial t_1\partial t_2}\Big|_0 \\ &= \left\{\left[\frac{1}{2}(\widetilde{X}_1^2+\widetilde{X}_2^2)+\widetilde{X}_1\widetilde{X}_2\right]f\right\}(e). \end{aligned}$$

因为 $\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2$ 一般是不可换的，故有

$$(\widetilde{X}_1 + \widetilde{X}_2)^2 = \widetilde{X}_1^2 + \widetilde{X}_2^2 + \widetilde{X}_1\widetilde{X}_2 + \widetilde{X}_2\widetilde{X}_1.$$

因而

$$\frac{1}{2}(\widetilde{X}_1^2 + \widetilde{X}_2^2) + \widetilde{X}_1\widetilde{X}_2 = \frac{1}{2}(\widetilde{X}_1 + \widetilde{X}_2)^2 + \frac{1}{2}(\widetilde{X}_1\widetilde{X}_2 - \widetilde{X}_2\widetilde{X}_1).$$

然而，上述第一项作用于 f 并在 e 取值得零，这是因为它是平方，第二项按定义得

$$\left[\frac{1}{2}(\widetilde{X}_1\widetilde{X}_2 - \widetilde{X}_2\widetilde{X}_1)f\right](e) = \frac{1}{2}[X_1, X_2].$$

因此得展到二阶项的 Taylor 展开式

$$\exp(tX_1)\exp(tX_2) = \exp((X_1+X_2)t + \frac{1}{2}[X_1, X_2]t^2 + O(t^3)).$$

这个公式提供了括弧运算 $[X_1, X_2]$ 的群论解释：它是测量 $(\exp tX_1)$ 和 $(\exp tX_2)$ 非交换性的二阶项，就此而论，它是一个比我们以前学到的更为精确的结果，已知对一切 s 与 t，$\exp tX_1$ 与 $\exp sX_2$ 可换，则 $[X_1, X_2]=0$.

下面再作一些计算，以便对括弧运算提供另一种看法，对任一 $g\in G$，有左、右平移 L_g 与 R_g. 在前面的讨论中，它们虽然是基本的但并不是群的同态映射，由于这个原因，它们本身不容易适应据 Lie 氏定理所建立的群——代数关系. 然而，可以把它们合在一起得到一个群同态映射，即"内自同构"映射 $I_g = L_g \circ R_g^{-1}$，即

$$I_g: G \longrightarrow G,\ x \longmapsto gxg^{-1}.$$

I_g 显然是群同态且光滑的映射，因此，对它微分得到 $L(G)$ 上的线性映射 dI_g，这个线性映射称为 g 的"共轭"并用 $\mathrm{Ad}(g)$ 表示，例如，为了对 $Y\in L(G)$ 计算 $\mathrm{Ad}(g)Y$，取曲线 $\exp tY$. 构造函数

$$\mathbb{R} \longrightarrow G,\quad t \longmapsto g(\exp tY)g^{-1}.$$

因之

$$\mathrm{Ad}(g)Y = \frac{d}{dt}(g(\exp tY)g^{-1})\big|_{t=0},$$

虽然我们并没有一个公式来作右方的计算，但仍可能作出一些简

易的结论．例如$t \longmapsto g(\exp tX)g^{-1}$显然是一个单参数子群，它的初矢量按定义为$\mathrm{Ad}(g)Y$．因此$\mathrm{Ad}(g)Y=Y$的充分必要条件是$g(\exp tX)g^{-1}=\exp tX$ 或者说 g 同单参数子群 $\exp tX$ 可交换．

为了得到较好的结论，进一步讨论，对于任意 $g\in G$，$\mathrm{Ad}(g)$是非奇异的，确实，由于对 $g,g_1\in G$ 成立 $I_{gg_1}=I_g\circ I_{g_1}$，故得

$$\mathrm{Ad}(gg_1)=\mathrm{Ad}(g)\mathrm{Ad}(g_1),$$

以及 $\mathrm{Ad}(g)^{-1}=\mathrm{Ad}(g^{-1})$．最终

$$\mathrm{Ad}:G\longrightarrow GL(L(G)),g\longmapsto \mathrm{Ad}(g)$$

为一群同态映射并称为“共轭表示”．因为 $GL(L(G))$为一 Lie 群，它的 Lie 代数 $E(L(G))=L(G)$的自同态代数．由于 Ad 是同态映射，对之微分即得线性映射 ad，满足

$$\begin{array}{ccc} L(G) & \xrightarrow{\mathrm{ad}} & E(L(G)) \\ \downarrow{\scriptstyle\exp} & & \downarrow{\scriptstyle\exp} \\ G & \xrightarrow{\mathrm{Ad}} & GL(L(G)) \end{array}$$

现在计算 ad．对于 $X\in L(G)$，$\mathrm{ad}(X)\in E(L(G))$为线性映射．为了确定它，取 $\exp tX$ 并在 $GL(L(G))$中构造曲线 $\mathrm{Ad}(\exp tX)$，对它关于 t 微分，然后令 $t=0$，因此，设 $Y\in L(G)$为一矢量，由如下公式计算矢量 $\mathrm{ad}(X)Y$：

$$\mathrm{ad}(X)Y=\left\{\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(\exp tX)\Big|_{t=0}\right\}(Y)$$

$$=\frac{d}{dt}\{\mathrm{Ad}(\exp tX)Y\}_{t=0}.$$

我们恰好看到

$$\mathrm{Ad}(\exp tX)Y=\frac{d}{ds}(I_{\exp(tX)}(\exp sY))\big|_{s=0}.$$

因此

$$\mathrm{ad}(X)Y=\frac{d}{dt}\frac{d}{ds}(\exp tX)(\exp sY)(\exp(-t)X)\big|_{t=0,s=0},$$

这正是(*)式说明如何进行的那类计算. 在 $f(\exp t_1X)(\exp t_2X)(\exp t_3X)$($f$ 是对数坐标函数)中略去平方项 t_1^2,t_2^2和 t_3^2,则二阶项为

$$[(\widetilde{X}\widetilde{Y})f](e)t_1t_2 + [\widetilde{X}^2f](e)t_1t_3 + [(\widetilde{X}\widetilde{Y})f](e)t_2t_3.$$

然后置 $t_1=t, t_2=s$ 且 $t_3=-t$ 并再略去平方项,最后得

$$(\widetilde{X}\widetilde{Y}f)(e)\,ts - ((\widetilde{Y}\widetilde{X})f)(e)\,ts = [X,Y]\,ts,$$

即 $\mathrm{ad}(X)Y=[X,Y]$,这只不过是括弧运算.

总之,现在我们已经决定了在对数坐标

$$(\exp tX)(\exp tY) = \exp f(t,X,Y)$$

中 f 的 Taylor 展开式的头三项为

$$f(0) = 0, f'(0) = X + Y, f''(0) = [X,Y].$$

它纯粹利用 $L(G)$的局部结构,问题是:关于高阶项情况如何?若计算出它的一切项,f 的 Taylor 级数收敛于 f 吗?亦即,函数 f 是解析的吗?关于第一个问题,就我们从 Lie 氏定理早就学到的知识而言,$L(G)$局部地决定了 G,所有的项均由 $L(G)$决定,虽然如何用显式方式写出他们是另一个问题. 至于第二个问题,我们还没有根据对它下结论,虽然这个答案实际上是肯定的,它表示了 Lie 群论的另一惊人之处. 在我们说明它以前,让我们首先解释一下它的含义.

对一个光滑流形 M,它的任意两个坐标(U_i,φ_i)和(U_j,φ_j)之间的转移函数 $\varphi_{ij}=\varphi_i\circ\varphi_j^{-1}$ 是光滑函数,可能找到一个坐标系$\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$,使得 φ_{ij}不仅是光滑的,而且甚至是解析的. 也可能找到多于一个这样的坐标系,它们不是解析等价的(当然,是光滑等价的). 换句话说,有一个在给定的光滑结构内解析结构的存在性和唯一性问题,设可以找到一个 $e\in G$ 的局部坐标系(U,φ)使得在表示 $\varphi(U)$上的乘法函数 m 是解析的,即(取 $U, U\subset U, U^{-1}\subset U$)

$$\begin{array}{ccc} U\times U & \xrightarrow{m} & U \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi\times\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ \varphi(U)\times\varphi(U) & \xrightarrow[f]{} & \varphi(U) \end{array}$$

中 f 是解析的,则可用平移$(L_g(U),\varphi\circ L_g)_{g\in G}$来覆盖 G,这样我们就得到一个解析结构,因为,若取两个这样的$\varphi\circ L_g$,$\varphi\circ L_{g'}$且设$L_g(U)\cap L_{g'}(U)\neq\varnothing$,这表示 $k=gg'^{-1}\in U$. 故

$$(\varphi\circ L_g)\circ(\varphi\circ L_{g'})^{-1}=\varphi\circ L_k\circ\varphi^{-1}.$$

即对 $x\in\varphi(U)$,

$$(\varphi\circ L_k\circ\varphi^{-1})(x)=\varphi(k\varphi^{-1}(x))=f(\varphi(k)x)$$

是关于 x 的解析函数.

至于唯一性,若取 (U,φ) 为对数坐标,则我们可简单地逐字重复在证明光滑结构唯一性(见§3)时所作的论证,即可对解析结构得到同样的结果. 所以我们的结论是每一个 Lie 群有唯一的解析结构.

§5. 解析结构和存在性定理

为了证明由

$$\exp X\cdot\exp Y=\exp f(X,Y)$$

定义的函数 $f(X,Y)$是解析的,我们再一次依赖微分方程理论. 想法如下,由于 f 描述了 Lie 群的乘法,它必须满足某些条件,例如结合律,可逆等等. 这些条件表示为 f 必须满足的微分方程,当我们将这些方程化成最简形式时,我们确认这是一些常系数常微分方程. 而微分方程中的定理(Cauchy-Kowalewski 定理)断定它们的解必为解析函数. 这些方程的导出完全是简单的,在 Pontrjagin 的书[3] §55—§56中详细地写出来了. 因此,我们将采用该书的记号. 选取 $L(G)$ 的任一组基 $X_1,\cdots,X_n$,把 $X=\sum x_iX_i\in L(G)$ 与欧氏点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 等同起来. 函数 $f(x,y)=x*y$ 是作乘法 $*$. 定义线性变换 $v(x)$ 或矩阵函数$(v_{ij}(x))$:

$$v(x)(h)=\lim_{t\to0}\frac{f(x+th,x^{-1})-f(x,x^{-1})}{t},$$

即 $v(x)(h)=D_1f(x,x^{-1})$为 f 在点$(x,y)=(x,x^{-1})$处关于变量 x 的

方向导数. 因此,我们有 Taylor 展开式

$$(x+h)*x^{-1}=v(x)(h)+O(h^2).$$

令$\frac{\partial f}{\partial x}$为矩阵$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$,有通常的 Taylor 展开式

$$f(x+h,y)-f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(h)+O(h^2).$$

记 $\delta f=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(h)$,有

$$\begin{aligned}(f+\delta f)*f^{-1}&=(x+h)*y*y^{-1}*x^{-1}\\&=(x+h)*x^{-1}=v(x)(h)+O(h^2).\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}(f+\delta f)*f^{-1}&=v(f)(\delta f)+O(\delta f^2)\\&=v(f)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(h)+O(h^2),\end{aligned}$$

得

$$v(f)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=v(x). \tag{1}$$

由于$v(0)=I$,故当x很小时,$v(x)$是非奇异的. 因此若记$u(f)=v(f)^{-1}$,则(1)式可改写成

$$\frac{\partial f}{\partial x}=u(f)v(x).$$

这实际上是一个偏微分方程组,按支量它可写为.

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x,y)=\sum_k u_{ik}(f(x,y))v_{kj}(x), \tag{1$'$}$$

f 还满足初始条件

$$f(0,y)=y.$$

由前面证的 Cauchy-Kowalewski 定理推知,当"系数"函数 v 是解析的时,则 f 将是唯一的并且是解析的.

截至目前为此,我们仅使用了乘法 $*$ 的一般性质. 因此形如(1)的方程在任何坐标系中成立. 以下特指对数坐标. 若$x(t)=\exp tX$ 为具有初始方向 X 单参数子群,取 $h=sx$,则得

$$(x+h)*x^{-1}=f(\exp sx)=sx,$$

或

$$v(x)x = x. \tag{2}$$

最终对于固定的 x，由 $w(t)=tv(tx)$ 定义一个矩阵函数 $w(t)$. w 必须满足条件：

$$w(0) = 0, \quad w(1) = v(x).$$

方和(1)或(1)′正是第4章(§3)描述过的那种类型的方程. 因此它必须满足按 Frobenius 定理所要求的可积性条件. 计算得这些条件：

$$\sum_{\alpha,\beta}\left(\frac{\partial v_{\gamma\beta}(x)}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial v_{\gamma\alpha}(x)}{\partial x_\beta}\right)u_{\alpha s}(x)u_{\beta t}(x)$$

$$= \sum_{\alpha,\beta}\left(\frac{\partial v_{\gamma\beta}(f)}{\partial f_\alpha} - \frac{\partial v_{\gamma\alpha}(f)}{\partial f_\beta}\right)u_{\alpha s}(f)u_{\beta t}(f)$$

对一切 x 与 f 成立. 由于变量 x 与 f 已经分离，故每一边均必为常数 c^{γ}_{st}，因此得到条件

$$\frac{\partial v_{ik}(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial v_{ij}(x)}{\partial x_k} = \sum_{\alpha,\beta} c^{i}_{\alpha\beta}v_{\alpha j}(x)v_{\beta k}(x). \tag{3}$$

这些常数 $c^{i}_{\alpha\beta}$ 有简单的含义，令 $x=0$，则得

$$c^{i}_{jk} = \frac{\partial v_{ik}(0)}{\partial x_j} - \frac{\partial v_{ij}(0)}{\partial x_k}.$$

在方程(1)中，令 $x=0$，可得

$$v(y)\,\frac{\partial f(0,y)}{\partial x} = I \quad (I\text{ 表单位阵}).$$

对 y 微分，得

$$\sum_{\alpha}\left(\frac{\partial v_{i\alpha}(y)}{\partial y_k}\frac{\partial f_\alpha(0,y)}{\partial x_j} + v_{i\alpha}(y)\,\frac{\partial^2 f_\alpha(0,y)}{\partial x_j\partial y_k}\right) = 0.$$

令 $y=0$，即得

$$\frac{\partial v_{ij}(0)}{\partial y_k} = -\frac{\partial^2 f_i(0,0)}{\partial x_j\partial x_k}.$$

但是，右边的含义是熟知的，它就是括弧运算 $[X_j, X_k]$ 的第 i 个支量(回忆一下 $X_1,\cdots,X_n$ 是我们在 $L(G)$ 中选的一组基)，亦即

$$[X_j, X_k] = \sum_i a^i_{jk} X_i.$$

因此 $c^i_{jk} = a^i_{jk} - a^i_{kj}$是由 Lie 代数 $L(G)$的结构所完全确定的一组常数.

现在由微分(2)式得

$$\sum_k \frac{\partial v_{ik}(x)}{\partial x_j} x_k + v_{ij}(x) = \delta_{ij}.$$

利用(3)式,得

$$\sum_k \left(\frac{\partial v_{ik}(x)}{\partial x_j} x_k - \frac{\partial v_{ij}(x)}{\partial x_k} x_k \right) = - \sum_{\alpha,\beta} c^i_{\alpha\beta} x_\alpha v_{\beta j}(x).$$

由此可知

$$\sum_k \frac{\partial v_{ij}(x)}{\partial x_k} x_k + v_{ij}(x) = \delta_{ij} + \sum c^i_{\alpha\beta} x_\alpha v_{\beta j}(x).$$

而上式可以改写为

$$\frac{dw_{ij}(t)}{dt} = \delta_{ij} + \sum_{\alpha,\beta} c^i_{\alpha\beta} x_\alpha w_{\beta j}(t), \tag{4}$$

且满足

$$w(0) = 0, \quad w(1) = v(x).$$

因此,对于给定的 $x, y \in L(G)$,由(4)式以及初始条件 $w(0) = 0$可以解出 w;由 $v(x) = w(1)$得到解析函数 $v(x)$. 再次利用 Cauchy-Kowalewski 定理即得 f 解析性.

同样的作法也可部分地回答下述存在性问题:即给定任一 Lie 代数 L,是否能找到Lie 群 G 满足 $L = L(G)$?从 L 开始,先建立方程(4),由于这是线性常微分方程组,总是有解 $v(x)$(并且是解析的). 结果建立的方程(1)自动满足条件(3). 根据 Frobenius 定理,我们得到的 f 定义了一个乘法 $*$,事实上,必须核对群的公理满足. 例如,仔细的计算表明 $*$ 的结合性是 L 中 Jacobi 恒等式的一个推论. 遗憾的是当我们这样作了以后,我们并未完全得到一个群,$*$ 可能仅仅定义在0的某邻域 U 的某一子集 V 上. 因此这是所谓的局部群,关于是否存在一个真正的群 G 满足 $L(G) = L$ 问题仍未回答,

并且它还不能用局部理论来加以回答.

§6. 单连通 Lie 群

由 Lie 的基本定理,我们知道两个具有相同的 Lie 代数的 Lie 群是局部同构的. 本节我们将更仔细地讨论局部同构的概念. 令 G_1,G_2为 Lie 群, $f:U_1\longrightarrow U_2$是 $e\in G_1$的一个邻域 U_1到 $e\in G_2$的一个邻域 U_2上的局部同构. 一个自然的问题是: f 什么时候可以拓展为一个大范围同构 $\bar{f}:G_1\longrightarrow G_2$? 一般说来, f 不一定能拓展. 即令可以, 拓展后也不一定同构. 我们先看第二点. 为简单起见, 假设我们讨论的是连通 Lie 群, 这时, $\bar{f}$ 是全射. 因为 U_2生成 G_2, 于是有 $G_2=G_1/\ker\bar{f}$, 说 f 是单全射 $U_1\longrightarrow U_2$表示 $U_1\cap\ker\bar{f}=e$ 即 $e\in\ker\bar{f}$ 是孤立点, 换句话说, $\ker\bar{f}\subset G_1$是离散子群. 这意味着 $\ker\bar{f}$ 不太复杂, 至少从 Lie 群的观点看来是如此, 因为它是0维的 (例如, 当 G_1为紧时, $\ker\bar{f}$ 必是有限的). 所以 $\bar{f}:G_1\longrightarrow G_2$的几何形象就容易设想了: 对每个 $g_2\in G_2$, $\bar{f}^{-1}(g_2)$是离散集. 对不同的 g_2, $f^{-1}(g_2)$有相同的个数, 因为它们恰是 $\ker\bar{f}$ 的傍系 (cosets). 事实上还可以得到更多的结论. $\ker\bar{f}\subset G_1$是正规子群 (normal subgroup), 任意连通拓扑群 G_1的正规子群一定包含在中心子群 (center) 中. 特别, $\ker\bar{f}$ 是 Abel 群.

这正是我们希望看到的情况. 所以我们给出一个形式的定义: 两个连通 Lie 群中的同态 $f:G_1\longrightarrow G_2$称为覆盖同态 (covering homomorphism), 如果 $\ker f\subset G_1$是离散的. 这就等价于说 f 是局部同构. 我们要说明, 虽然我们讨论的是 Lie 群, 其光滑构造在这里不起什么作用. 容易看到, 如果我们只假设一个群是 Lie 群, 因 f 之为局部同构将使另一个群也成 Lie 群, 而且 f 成为光滑的.

现在固定一个 Lie 群 G 并看它的一切覆盖群. 我们将说一个覆盖群 (G_1, f_1) "大于" ($>$) 另一个覆盖群 (G_2, f_2), 如果存在一个覆盖同态 $f:G_1\longrightarrow G_2$使以下的图式为可换的

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{f} & G_2 \\ & f_1\searrow \quad \swarrow f_2 & \\ & G & \end{array}$$

这样，G 的全部覆盖群之集 $\{CG\}$ 成为偏序集（partially ordered）。覆盖群 $f_0:G_0\longrightarrow G$ 称为万有的，如果它是这个偏序集中的绝对最大元（如果它存在，则必是唯一的）。一个 Lie 群 G，如果是它自身的万有覆盖群，则称为单连通的。每一个 Lie 群 G 都有一个万有覆盖群 $f_0:G_0\longrightarrow G$。（Abel）群 $\ker f_0$ 定义为 G 的基本群，记作 $\pi_1(G)$。我们说 G 为单连通的，当且仅当 $\pi_1(G)=\{0\}$。

我们很容易证明下面的定理。

定理 令 G_1,G_2 是两个连通 Lie 群，$f:U_1\longrightarrow U_2$ 是局部同构。若 G_1 是单连通的，则 f 可以拓展为一覆盖同态 $\bar{f}:G_1\longrightarrow G_2$，特别是，若 G_2 也是单连通的，则 $\bar{f}$ 为大范围同构。

作为一个系，我们可以用大范围的语言来重述 Lie 的基本定理。

定理（Lie 的基本定理） Lie 代数和单连通 Lie 群间有一个一一对应。

证 f 定义一个同构 $f_*:L(G_1)\longrightarrow L(G_2)$ 以及一个子代数

$$K=\{(x,f(x))\,|\,x\in L(G_1)\}\subset L(G_1)\times L(G_2),$$

令 $H\subset G_1\times G_2$ 是 K 所决定的子群。我们知道 $H\longrightarrow G_1\times G_2\longrightarrow G_1$ 是局部同构，因此是一个覆盖映射，因为 G_1 是单连通的，它必定是大范围同构。

单连通的定义正是为了使这个定理成立。所以真正的要点在于怎样决定一个群什么时候才是单连通的，或者更为广泛的问题是，怎样计算 $\pi_1(G)$。回想小段积分曲线是怎样拓展到整个 R 上的，那么正是由于 R 是单连通的，从而 $\pi_1(S^1)=Z$（更一般地说，R^n 是单连通的，而 $\pi(T^n)=Z^n$）。我们以后将会看到，整个这一切都是一个广泛得多的问题的特例。我们最后将会知道怎样去计算 Lie 群的基本群 $\pi_1(G)$。

参 考 文 献

[1] Adams, J. Frank, *Lectures on Lie Groups*, Benjamin, 1969.

[2] Chevalley, C., *Theory of Lie Groups*, Princeton U. Press, 1946.

[3] Pontrjagin, *Topological Groups*. 中译本：邦德列雅金，《连续群》，曹锡华译，科学出版社.

[4] Montgomery, D. and Zippin, L., *Topological Transformation Groups*, Interscience Publishers, 1955.

[5] Varadarajan, V. S., *Lie Groups, Lie Algebras, and their Representations*, Prentice-Hall, 1974.

第六章　微分形式

§1. 引　言

读者们都知道，初等微积分有两个主要部分：微分和积分. 这两部分由微积分的基本定理连接起来. 流形上的微积分也是按这个程序，所以在讨论怎样做微分以后，我们现在进而在流形上建立积分理论. 读者都知道，有好几种“积分理论”. 例如，Lebesgue 积分等等. 也有好几种处理方法，例如用测度理论或泛函分析等. 我们不去管这些“神奇”的理论，我们要介绍的积分就是老的 Riemann 积分. 并不是不能在流形上建立更一般的积分，而是由于在绝大多数时间，我们的讨论的对象都是光滑的，至少是连续的，所以用不到 Riemann 积分以外的积分. 主要之点不在于用什么理论，而在于什么是被积者，什么是积分区域?例如说，如果是在 $\mathbb{R}^n$ 上，当然是积分一个 n 元函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$，并且是在 $\mathbb{R}^n$ 的某个区域. 例如 n 维立方体 C 上求积分. 这个积分记作

$$I = \int_C f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

我们也知道，在这个记号里“微分” $dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ 其实不代表什么，而只不过是一个形式的记号，它告诉我们链法则，也就是换元法则在积分中的用法. 设有变量变换

$$x_i = x_i(y_1, \cdots, y_n) = x_i(y), \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

要记住，我们不仅要把函数 f 换成

$$\tilde{f}(y_1, \cdots, y_n) = f(x_1(y), x_2(y), \cdots, x_n(y)),$$

而且必须按行列式法则变换微分部分，从而得到

$$I = \int_{C} \tilde{f}(y_1, \cdots, y_n) \left| \frac{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{D(y_1, y_2, \cdots, y_n)} \right| dy_1 dy_2 \cdots dy_n,$$

这里 $\left| \frac{D(x_1, \cdots, x_n)}{D(y_1, \cdots, y_n)} \right|$ 是 Jacobian，时常记作 $\left| \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right|$.

在流形上总是要做变量变换．这不过是从一个坐标邻域变到另一个坐标邻域．$f(x_1, \cdots, x_n)$ 和 $\tilde{f}(y_1, \cdots, y_n)$ 是定义在流形上的同一个函数的不同表示．从上面的讨论看到，我们不能只是积分一个函数而是要积分这样一个对象，它会在变量变换时自动地考虑到行列式法则．行列式的基本特征是：如果两行或两列对换时，它会变号，即是说它是反对称的．处理反对称性的代数就是外代数，我们将要用到它．

在求积 $\int f(x)dx$ 时最简单的情况就是 $f(x)=F'(x)$，即 $f(x)$ 是某个函数的导函数，这时有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b \frac{dF}{dx}dx$$
$$= \int_a^b dF = F(b) - F(a).$$

这当然就是微积分的基本定理，在一元的情况下它总是成立的，任一个连续函数 $f(x)$ 都可以写成 $f(x)=F'(x)$（$F(x)$ 正是 $f(x)$ 的原函数）．在多元情况下，我们就要看沿着某个曲线 γ 从 $\gamma(0)$ 到 $\gamma(1)$ 的线积分

$$\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

现在我们需要知道，若 $(P(x,y), Q(x,y))$ 是某个函数 $\varphi(x,y)$ 的梯度 $\left(\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\right)$．或者换个说法，说微分形式

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

是函数 φ 的“全微分”

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy.$$

这样就有

$$\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \varphi(\gamma(1)) - \varphi(\gamma(0)).$$

能够考虑到微分在积分下的行为以及在变量变换时的行列式法则的形式语言叫做外微分形式，我们将在本章讨论它.

§2. 函数的微分与一次微分形式

令 M 为一流形，$P\in M$ 为一点，$T_P(M)$为 P 点的切空间，对于矢量 $X\in T_P(M)$和定义在 P 附近的函数 f，有沿 X 方向求导数这个基本运算，记作

$$X(f)=\langle X,f\rangle\in\mathbb{R}.$$

采用 $\langle X,f\rangle$ 这种记号是为了暗示这是一个双线性运算，即可以关注于两个变元中的任何一个. 在作微分时，固定 X 而讨论 f 的变动，并且得到如 Leibnitz 法则这样的基本事实

$$X(fg)=X(f)g(P)+f(P)X(g).$$

从另一个观点来看它，即固定 f，得到映射

$$\langle\cdot,f\rangle:T_P(M)\longrightarrow\mathbb{R},\quad X\longmapsto\langle X,f\rangle.$$

这个映射显然是线性的，即$\langle\cdot,f\rangle$是 $T_P(M)$的对偶空间 $T_P^*(M)$中

我们把它叫作 f 在 P 的微分，并记作 df_P，或简记为 df，如果 P 点是意会了的话. 因此就有一个二而一的关系式

$$X(f)=\langle X,f\rangle=df(X).$$

对偶空间 $T_P^*(M)$叫做 P 点处的余切空间.

这样，对于每个函数 f，有微分 $df\in T_P^*(M)$. $T_P^*(M)$是 $n=\dim M$ 维矢量空间. 我们要证明函数的微分可以扩张它. 事实上，我们可以证到更多的东西. 令(U,φ)为 P 附近的一个坐标系，若 $Q\in U$，我们记

$$\varphi(Q)=(q_1,q_2,\cdots,q_n),$$

第 i 个坐标函数记作

$$x_i:U\longrightarrow\mathbb{R},\quad Q\longmapsto q_i$$

(以后记 φ 为 $\varphi=(x_1,\cdots,x_n)$)，因它们的微分则记作$(dx_1,\cdots,dx_n)$.

另一方面有切矢量$\frac{\partial}{\partial x_i}$. 而且$\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$是$T_P(M)$的一个基底. 已知一个定义在$U$上的函数$f$后，就有它的定义在$\mathbb{R}^n$上的表示$\tilde{f}(x_1, x_2,\cdots,x_n)=f\circ\varphi$.

命题 $(dx_1,\cdots,dx_n)$是$T_P^*(M)$的基底，它是$T_P(M)$之基底$\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$的对偶基底. 已知任一函数$f$，则有

$$df=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x_i}\right)_P dx_i. \tag{1}$$

证 由定义

$$dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=\left\langle\frac{\partial}{\partial x_j},x_i\right\rangle=\delta_{ij}.$$

故若$\sum_i a_i dx_i=0$，等式两边作用以$\frac{\partial}{\partial x_j}$，得

$$0=\left(\sum_i a_i dx_i\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=a_j.$$

若$\varphi\in T_P^*(M)$是任一线性泛函，令$a_i=\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$，则$\varphi$将由这些$a_i$所唯一决定，记

$$\alpha=\sum_i a_i dx_i.$$

则因$\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=a_i$，所以$\alpha=\varphi$，即$\varphi$可以写成$dx_i$的线性组合

$$\varphi=\sum_i a_i dx_i.$$

对任意函数f，必有一组常数a_i使$df=\sum_i a_i dx_i$，

$$a_i=df\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=\left\langle\frac{\partial}{\partial x_i},f\right\rangle=\left(\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x_i}\right)_P.$$

(1) 式告诉我们df确实是f的“全微分”. 所以我们所作的是正确的. 至此为止，我们只是在一个点P进行微分. 如果考虑所有的$T_P^*(M)$，就会得到一个M上的矢量丛$T^*(M)=\bigcup_P T_P^*(M)$，即切丛$T(M)$的对偶丛(自然叫做$M$的余切丛). 若$f$是定义在某

个开集 U 上的函数，则对每点 $P\in U$，有 $df_P\in T_P^*(M)$，这就定义了一个截口

$$df:U\longrightarrow T^*(M),\quad P\longmapsto df_P,$$

仍然称为 f 的微分. 若 X 是 U 上的一个矢量场，我们将会有一个函数 $\langle X, f\rangle$ 以及一个二而一的关系式

$$X_P(f)=\langle X,f\rangle(P)=df_P(X_P),$$

也可记作

$$X(f)=\langle X,f\rangle=df(X).$$

只说 $T^*(M)$是合并一切 $T_P^*(M)$而成不足以说明 $T^*(M)$是矢量丛. 必需要找出迁移函数. 回忆第三章中讲的一般的理论：设 $E\longrightarrow B$ 是一个矢量丛，有局部坐标(U_i,φ_i)，$i=1,2$和迁移函数

$$g_{1,2}:U_1\cap U_2\longrightarrow GL(n,\mathbf{R}),$$

则对偶丛应有迁移函数

$$h_{1,2}=(g_{1,2}^{-1})^t$$

($h_{1,2}$和 $g_{1,2}$都表示矩阵而不是矩阵的元，A^t 表示 A 的转置). 对于切丛 $T(M)\longrightarrow M$，我们知道它的局部坐标可以从流形 M 的局部坐标得出；流形 M 的每一个局部坐标 $(U,(x_1,\cdots,x_n))$ 都定义了切丛的局部坐标

$$U\times\mathbf{R}^n\longrightarrow T(M),\ (P,(a_i))\longmapsto\sum_i a_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_P,$$

而 $(U,(x_1,\cdots,x_n))$ 和 $(V,(y_1,\cdots,y_n))$ 间的迁移矩阵是

$$(A_{ij})=\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right).$$

命题 对于 M 的每个局部坐标 $(U,(x_1,\cdots,x_n))$ 映射

$$U\times\mathbf{R}^n\longrightarrow T^*(M),\ (P,(a_i))\longmapsto\sum_i a_i dx_i$$

定义了 $T^*(M)$的一个局部坐标. 也就定义了 $T^*(M)$为 $T(M)$的对偶丛.

证 迁移矩阵 B 之元 B_{ij}由定义应该由下式决定

$$dx_i=\sum_j B_{ij}dy_j.$$

从而

$$B_{ij}=dx_i\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)=\frac{\partial x_i}{\partial y_j}.$$

于是 $B=(A^{-1})^t$，因为$\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}$与$\frac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}$互为逆矩阵.

现在我们确实有了一个丛 $T^*(M)\longrightarrow M$，而每一个光滑函数 f 都定义此丛的一个光滑截口 df（由其局部表示公式可以知它是光滑截口）. 且 $T^*(M)$还有其它的截口 ω 不一定是 df 形状. 一般说，任一个这样的截口 ω 都称为一个一次微分形式（简称1-形式）. 它可以是连续的、光滑的等等，我们今后考虑的截口至少都是连续的，所以我们恒假设我们讨论的截口是连续的. 1-形式和矢量场是对偶的对象，这不仅由于它们被定义为互为对偶的空间的元，更重要的是它们在坐标变换下变化的方式不同，即是说，$T(M)$和 $T^*(M)$作为丛也是对偶的. 这与古典的微分几何中一些名词有关，回忆一下，在坐标变换下$\frac{\partial}{\partial x_i}$按以下规则变化

$$\frac{\partial}{\partial x_i}=\sum_j\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial y_j}. \tag{1}$$

而微分 dx_i 则服从另一个规则

$$dx_i=\sum_j\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)dy_j \tag{2}$$

（这就是我们已经得到的关系式 $B=(A^{-1})^t$. 传统上，凡按(1)式变化的东西均称为“逆变的”，按(2)式变化的则称为“协变的”. 这个区别是很重要的，在一维流形上考虑一个1-形式 ω，若

$$\omega=\widetilde{\omega}(x)dx=\hat{\omega}(y)dy,$$

则

$$\widetilde{\omega}(x)dx=\left(\hat{\omega}(y)\frac{dy}{dx}\right)dx=(\widetilde{\omega}(x(y))dy)\frac{dx}{dy}.$$

正是积分号下作变量变换的方式，这样我们就更信服至今为止我们作的都是对的：一维（线）积分的被积表达式是1-形式. 对于高维的多重积分，需要把1-形式概念推广为高次形式，使它们按行列式

法则变换坐标. 但在这以前需要先说明两件事.

1-形式按协变方式变化,有一个容易的但极重要的关于在映射下的行为的结论,比它作为矢量场的对偶这个概念有用得多. 令 $f:M\longrightarrow N$ 是两个流形间的映射,若有切矢量 $X_P\in T_P(M)$,我们可以用微分 df 将它推前成为 N 上之切矢量 $Y_Q\in T_Q(N)$,$Q=f(P)$,即定义 Y_Q 为 $Y_Q=df(X_P)$,但是,若有一个 N 上的矢量场 Y,一般地却不能给出 M 上一个适当定义的矢量场 X. 但若有一个 N 上的1-形式 ω,则我们可以把它按

$$\tilde{\omega}(X_P)=\omega(df(X_P))$$

这个公式拉回为 M 上一个1-形式 $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}$ 就叫做 ω 被 f 的"拉回"并记作 $f^*\omega$. 以后我们会看到,可以被"拉回"正是一切被标为"协变"的对象的特有的性质.

第二件是属于技术性的,在构造一个微分形式时十分有用. 设 ω 是 M 上的一个1-形式, X 是 M 上一个矢量场, 则有一个函数 $\langle\omega, X\rangle$ 定义为

$$\langle\omega,X\rangle(P)=\omega(X_P).$$

让我们稍微形式化一点. 令 $\mathscr{X}(M)$ 表示 M 上一切矢量场之集, $A^0(M)$ 为 M 上一切光滑实值函数之集, 则 $A^0(M)$ 是一个环,而 $\mathscr{X}(M)$ 是 $A^0(M)$ 上的一个模. 于是一个1-形式 ω 定义了一个映射

$$\omega:\mathscr{X}(M)\longrightarrow A^0(M),\quad X\longmapsto\langle\omega,X\rangle,$$

它显然是加法的. 但也是一个 $A^0(M)$-模映射:

$$\langle\omega,fX\rangle=f\langle\omega,X\rangle,\ f\in A^0(M),$$

即

$$\begin{aligned}\langle\omega,fX\rangle(P)&=\langle\omega,(fX)(P)\rangle=\langle\omega,f(P)X(P)\rangle\\&=f(P)\langle\omega,X_P\rangle=f(P)(\langle\omega,X\rangle(P))\\&=[f\langle\omega,X\rangle](P).\end{aligned}$$

反过来, 有

命题 (关于微分形式的判据)　一个映射

$$\omega: \mathscr{J}(M) \longrightarrow A^0(M)$$
是一个1-形式当且仅当它是一个 $A^0(M)$-模映射，即它是可加的，且 $\omega(fX)=f\omega(X)$，$f\in A^0(M)$，这里 Leibnitz 法则不成立.

证 令 $P\in M$，$X_P\in T_P(M)$，我们要定义 $\omega(X_P)$，一个不费思索的办法即将 X_P 拓展成一个 P 附近的矢量场 X（这总是可能的），然后就有一个函数 $\langle\omega, X\rangle$，可以定义为

$$\omega(X_P) = \langle\omega, X\rangle(P).$$

当然问题在于这是不是适当的定义，这就相当于问，如果一个矢量场 X 使 $X_P=0$，那么是否一定有 $\langle\omega,X\rangle(P)=0$？令 $(U, (x_1, \cdots, x_n))$ 为 P 附近的一个局部坐标，则 X 一定可以写成

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

a_i 是 x 的某些函数. 所以若 ω 是一个 $A^0(M)$-模映射，我们有

$$\langle\omega, X\rangle = \sum_i a_i \langle\omega, \frac{\partial}{\partial x_i}\rangle.$$

但因 $X(P)=0$ 即 $a_i(P)=0$，所以即可得到命题.

§3. 外代数的概述

我们已经提到，讨论反对称对象的代数就是外代数，在第三章中已经简单地讨论过它. 作一个更详细概述是有用的. 反对称基本上说的就是当次序改变时应该变号，比方说 $xy=-yx$，这也可以改一个说法，因为

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + xy + yx,$$

所以说对于一切 x 有 $x^2=0$ 和说 $xy=-yx$ 是一回事. 在代数中时常是这样，如果你需要一个什么，你可以简单地希望你所需要的是一种“万有性质”. 具体到我们的情况，我们从一个矢量空间 V（不论是 $\mathbb{R}$ 上的或 $\mathbb{C}$ 上的或别的特征 $\neq 2$ 域上的）开始. 设 A 是一个代数（和 V 具有相同的基域），$\varphi: V \longrightarrow A$ 是一个线性空间的线

性映射．我们称 φ 为外映射，如果 $\varphi(x)^2=0$，对一切 $x\in V$ 成立（在这里引入了 A 中的乘积）．V 上的外代数就是由一个代数 A 和一个外映射

$$i:V\longrightarrow A$$

所组成的一对 (A, i)，而且 i 对于这个性质是万有的，即若 B 是一个代数，$\varphi:V\longrightarrow B$ 是另一个外映射，则必有唯一的代数间的映射 $\tilde{\varphi}$ 存在使得下面的图式是可换的

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i} & A \\ & \varphi\searrow \quad \swarrow\tilde{\varphi} & \\ & B & \end{array}$$

任一个按这种方式成为万有的东西必然是唯一的（最多相差一个同构）．但除非证明了外代数确实存在，以上所述虽然好也是没有用处的．令 $T(V)=\sum_{k=0}^{\infty}T^k(V)$ 是 V 上的张量代数．在 $T(V)$ 中考虑由所有 $\{x\otimes x\,|\,x\in V\}$ 形状的元所生成的理想（ideal）I，于是我们就有一个代数 $A=T(V)/I$ 及一个映射：

$$i:V\longrightarrow T(V)/I.$$

很容易计算，(A,i) 满足万有性质．这个代数 A 通常记作 $\Lambda(V)$，若 $x_1\otimes x_2\otimes\cdots\otimes x_k$ 是在 $T^k(V)$ 中，它在 $\Lambda(V)$ 中的象记作 $x_1\wedge x_2\wedge\cdots\wedge x_k$．由定义，$\Lambda(V)$ 中的元就是这种形状的式子的线性组合．但是这样的表达式决非唯一，比方说，我们有

$$x\wedge y=-y\wedge x,\quad x,y\in V$$

（否则我们就不会讨论它了）．这说明若希望在 $\Lambda(V)$ 上定义某种映射 φ，我们不能简单地规定 $\varphi(x_1\wedge\cdots\wedge x_k)$，必须要检查它是否有外性质．以后，如果我们确实通过给定 $\varphi(x_1\wedge\cdots\wedge x_k)$ 之值而定义了 φ，这都意味着 φ 的合法性已经弄清楚了．

代数 $\Lambda(V)$ 是分次代数（graded algebra），其原因在于：(1) $T(V)=\sum_k T^k(V)$ 是分次的；(2) 理想 $I\subset T(V)$ 是齐次的，因为它是由齐次的元素 $x\otimes x$ 所生成的．于是有

$$A(V)=\sum_k A^k(V),$$

$A^k(V)$是$T^k(V)$的象，即$x_1\wedge x_2\wedge\cdots\wedge x_k$这种东西的组合. 很显然有

$$A^k(V)\wedge A^l(V)\subset A^{k+l}(V),$$

$$a\wedge b=(-1)^{kl}b\wedge a,\quad a\in A^k, b\in A^l.$$

具有上述性质的分次代数有时称为在分次意义下是可换的.

矢量空间$A^k(V)\subset A(V)$也可以用万有性质来定义（见第三章）：任一反对称k-线性映射$\varphi: V\times\cdots\times V\longrightarrow W$都诱导线性映射$\tilde{\varphi}: A(V)\longrightarrow W$.

还要注意，因为理想I中没有低于二次的东西. 映射$\iota: V\longrightarrow A(V)$是单射. 即可将$V$与$A^1(V)\subset A(V)$看成相同的，$A(V)$即由$A^1(V)$生成.

设$\dim V=n$，$(x_1,\cdots,x_n)$是V的一个基底. 显然，形状为$x_{i_1}\wedge\cdots\wedge x_{i_k}$的元生成$A^k(V)$，又因为改变$x_i$的次序只导致变号，所以在以上的那些元中我们只需要一定次序. 例如取$i_1<\cdots<i_k$. 特别是，当$k>n$时$A^k(V)=0$. 集$\{x_{i_1}\wedge x_{i_2}\cdots\wedge x_{i_k}\mid i_1<i_2<\cdots<i_k, k=0,1,2,\cdots\}$是$A(V)$的一个基底. 这可以直接验证，但是更好的办法是回到万有性质如下：

令A，B是两个分次代数，可以把它们的张量积变成一个代数，即定义其乘法为

$$(a\otimes b)\cdot(a_1\otimes b_1)=(-1)^{kl}aa_1\otimes bb_1,$$

这里$b\in A^k$，$a_1\in B^l$. 这里有一个符号因子，看来奇怪，其实它保证了若A和B是分次意义下可换的，则$A\otimes B$也是.

设有两个矢量空间V和W，考虑映射

$$\iota: V\oplus W\longrightarrow A(V)\otimes A(W),$$

$$x+y=(x,y)\longmapsto(x\otimes 1)+(1\otimes y),$$

有

$$(x\otimes 1+1\otimes y)^2=(x\otimes 1)(x\otimes 1)+(x\otimes 1)(1\otimes y)$$
$$+(1\otimes y)(x\otimes 1)+(1\otimes y)(1\otimes y)$$

$$=(x\wedge x)\otimes 1+x\otimes y-x\otimes y+1\otimes(y\wedge y)$$
$$=0$$

这里就用了那个看来奇怪的符号规定，所以 i 是外映射，而且它也有万有性质．由此可知 $\Lambda(V\oplus W)=\Lambda(V)\otimes\Lambda(W)$或者确切些说，$i$ 诱出一个同构

$$i:\Lambda(V\oplus W)\longrightarrow\Lambda(V)\otimes\Lambda(W).$$

设 $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_n$，其中 $V_i=\langle x_i\rangle$．我们有

$$\Lambda(V)\cong\Lambda(V_1)\otimes\Lambda(V_2)\otimes\cdots\otimes\Lambda(V_n). \qquad (*)$$

但是 $\Lambda(V_i)$ 的基底是 $\{1, x_i\}$，用（*）式即可计算 $\Lambda(V)$的维数，特别

$$\dim\Lambda^k(V)=\binom{n}{k},$$

所以 $\dim\Lambda(V)=\sum_k\binom{n}{k}=2^n$.

最后一个外积 $\Lambda^n(V)$的维数是$\binom{n}{n}=1$，基底只有一个元素 $\omega=x_1\wedge x_2\wedge\cdots\wedge x_n$，注意 ω 不只依赖于集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，而且还依赖于其次序，即是说，$\Lambda^n(V)$之基底元素依赖于 V 之有序基底 $\{x_1, \cdots, x_n\}$.

若 $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 是 V 中任意的有序集，作 $y_1\wedge y_2\wedge\cdots\wedge y_n\in\Lambda^n(V)$，于是有

$$y_1\wedge y_2\wedge\cdots\wedge y_n=Ax_1\wedge x_2\wedge\cdots\wedge x_n,$$

A 是一个常数，它定义为有序 n 元组 $\{y_1, \cdots, y_n\}$ 对有序基底 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 的行列式 $\det\{y_1, \cdots, y_n\}$．它就是原来定义的行列式，因为若

$$y_i=\sum_j A_{ij}x_j,$$

则知 $A=\det(A_{ij})$，例如 $n=2$时，有

$$y_1\wedge y_2=(A_{11}x_1+A_{12}x_2)\wedge(A_{21}x_1+A_{22}x_2)$$
$$=A_{11}A_{22}x_1\wedge x_2-A_{12}A_{21}x_1\wedge x_2$$

$$= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} x_1 \wedge x_2.$$

所以毫无疑问，我们所做的是对的.

如果 $\{y_1, \cdots, y_n\}$ 也是一个有序基底，则 $\det\{y_1, \cdots, y_n\} \neq 0$，若它$>0$，我们就说$\{y_1, \cdots, y_n\}$与$\{x_1, \cdots, x_n\}$是等价的（当然基域是实的），这样形成的等价类记作$[x_1, \cdots, x_n]$称为 V 的定向，V 有两个可能的定向.

还要讲一点，在我们的应用中，矢量空间 V 将是切空间 $T_p(M)$，1-形式则是在对偶空间 $V^* = T_p^*(M)$中，所以高次微分形式是在 $A(V^*)$中，不论是否对偶，V^*总是一个矢量空间，所以我们知道怎样按以上方法讲 $A(V^*)$；另一方面我们又知道，万有性质使我们能以其它方式来讲 $A(V^*)$. 我们将给出 $A(V^*)$的一种讲法，而对我们是有用的. 回想一下，我们称重线性映射.

$$f: \overbrace{V \times \cdots \times V}^{k次} \longrightarrow W$$

称为交代的，如果当两个坐标交换时它会变号. 若 W 是基域，这个特例下的 f 称为交代的重线性泛函. 它们的集记作 $A^k(V)$，$A^k(V)$显然是矢量空间. 例如 $A^1(V) = V^*$就是 V 的对偶空间.

令 $A(V) = \sum_k A^k(V)$ 是直和，我们想通过直接描述其乘法而使它成为一个代数. 若 $\varphi \in A^k(V)$，$\psi \in A^l(V)$，定义

$$(\varphi \wedge \psi)(x_1, \cdots, x_{k+l})$$
$$= \frac{1}{k!\,l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \varepsilon(\sigma) \varphi(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(k)}) \psi(x_{\sigma(k+1)}, \cdots, x_{\sigma(k+l)}), \qquad (*)$$

S_{k+l}是 $k+l$ 个文字的置换群(permutation group)，$\varepsilon(\sigma) = \pm 1$视 σ 为偶或奇而定. 显然 $\varphi \wedge \psi \in A^{k+l}(V)$，作组合计算即知$\frac{1}{k!\,l!}$使这个乘法成为结合的（没有它不行）. 于是我们有了一个代数.

考虑包含映射

$$i: V^* = A^1(V) \longrightarrow A(V).$$

由 $A(V)$中乘法的定义，有

$$(\varphi \wedge \varphi)(x_1,x_2) = \varphi(x_1)\varphi(x_2) - \varphi(x_2)\varphi(x_1) = 0.$$

所以 ι 诱出一个代数的映射

$$\iota: A(V^*) \longrightarrow A(V).$$

ι 是一个同构，这只需直接写出 ι^{-1} 就可以看到. 令 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 V 的基底，$(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)$ 是它在 V^* 的对偶基底. 若 $\varphi \in A^k(V)$ 则

$$\iota^{-1}(\varphi) = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} \varphi(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k})\varphi_{i_1} \wedge \varphi_{i_2} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_k}.$$

这样，代数 $A(V)$ 就是 $A(V^*)$ 的另一种描述. 在下一节里，两种描述都要用到.

注 乘法公式（*）还有一些问题. 在有的文献中，（*）被写成

$$(\varphi \wedge \psi)(x_1,x_2,\cdots,x_{k+l})$$

$$= \frac{1}{(k+l)!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}}\varepsilon(\sigma)\varphi(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(k)})\psi(x_{\sigma(k+1)},\cdots,x_{\sigma(k+l)}), \quad (**)$$

求和部分是标准的，处处都一样，它使 $\varphi\wedge\psi$ 成为反对称的. 但是前面的系数有不同的取法，只要使结合律成立就行了. 很容易看到，可以用别的系数，例如 $\frac{1}{A(k,l)}$，只要

$$A(k,0) = k!, \quad A(k,l) = A(l,k),$$

$$\frac{(k+l)!}{A(k+l,m)A(k,l)} = \frac{(l+m)!}{A(k,l+m)A(l,m)}.$$

这三个式子可以递推地决定 $A(k,l)$，但 $A(k,1)$ 可任意决定，对于（*）式，$A(k,1)=k!$. 对于（**），$A(k,1)=(k+1)!$.

§4. 高次微分形式

现在可以定义流形上的高次微分形式了. 令 M 为一个 n 维流形，$T^*(M)$ 是它的余切丛. 我们可以作出 $T^*(M)$ 的 k 次外乘积丛 $A^k(T^*(M))$. 这是 M 上的一个丛，各点 $P\in M$ 处的纤维是外乘积 $A^k(T_P^*(M))$. 更加重要的是，它的迁移函数可以由 $T^*(M)$ 自然地

导出(见第三章). k 次微分形式(简称为 k-形式)ω 就是 $\Lambda^k(T^*(M))$ 的截口. 在绝大多数情况下, 我们只讨论光滑的微分形式. 虽然 ω 也可能只是连续的, 甚至是一般的映射而不一定连续. ω 可以定义在整个 M 或其部分上. 从上一节里已经讲过的, 可以用以下的两种方式来讲 k-形式 ω.

(1) 若 $(U, (x_1, x_2, \cdots, x_n))$ 是一个局部坐标, 则 ω 在 U 上可以写作

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} a_{i_1, i_2, \cdots, i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

$a_{i_1, i_2, \cdots, i_k}$是 U 上的函数. 这是 ω 的坐标表示, 用这种讲法, 必须注意. 同一个形式 ω 在不同的标系中有不同的表示, 例如一个 n-形式 ω 在两个坐标系 (U, x), (V, y) 中的关系, 可以从下式得出

$$\omega = \alpha(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n = \beta(y) dy_1 \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_n.$$

现在 $y = y(x), dy_i = \sum_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j} dx_j$, 我们知道

$$dy_1 \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_n = \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

所以

$$\alpha(x) = \beta(y(x)) \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right),$$

这正是行列式法则, 而我们这一套代数工具正是设计来保证它成立的.

(2) ω 也可以看成是:对每一点 P 和 $T_P(M)$中 k 个切矢量 X_{1P}, X_{2P}, $\cdots$, X_{kP}都对应一个实数

$$\langle \omega_P, X_{1P}, X_{2P}, \cdots, X_{kP} \rangle,$$

而且这个对应是交代的, k 重线性的. 于是 ω 对于矢量场的 k 元组 $(X_1, X_2, \cdots, X_k)$ 对应一个函数 $\langle \omega, X_1, X_2, \cdots, X_k \rangle$, 它是交代的, k 重线性的 (对函数关系而言). 用这种讲法, 就有关于推广微分形式的判据: ω 是一个 k-形式当且仅当 $\langle \omega, X_1, \cdots, X_k \rangle$ 是交代的, 而且对于函数关系是 k 重线性的.

在应用中，这两种讲法可以根据方便而自由换用．在上一节里就已讲了为何互换．例如，我们有

$$\langle dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}, X_1,\cdots,X_k\rangle=\sum_{\sigma\in S_k}\varepsilon(\sigma)\langle X_{\sigma(1)},x_{i_1}\rangle\cdots\langle X_{\sigma(k)},x_{i_k}\rangle.$$

和1-形式一样，高次微分形式也有拉回，例如，若 $f:M\longrightarrow N$ 是光滑映射而 ω 是 N 上的一个 k-形式，则 $f^*\omega$ 是 M 上的一个 k-形式如下：

$$\langle (f^*\omega)_P, X_{1P},\cdots,X_{kP}\rangle=\langle \omega_Q, df(X_{1Q}),\cdots,df(X_{kQ})\rangle,$$
$$Q=f(P).$$

到此为止，我们只是给出了微分形式的语言．要记住，微分形式是准备作为被积表达式用的．那么，从积分的观点来看，有些1-形式比其它的更好．这就是那些 ω，它们是某个函数 f 的微分 df（一个专门的名词是：ω 称为 f 的梯度形式）．因为若 $\omega=df$，则线积分为

$$\int_\gamma\omega=\int_\gamma\sum_i\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i=\int_0^1\sum_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}dt$$
$$=\int_0^1\frac{df}{dt}dt=f(\gamma(1))-f(\gamma(0)).$$

在我们的程序中，函数 f 就是一个0-形式（因为 k-形式之集记作 $A^k(M)$，所以也用 $A^0(M)$表示函数之集）．一个0-形式可以在0维区域上“积分”，即在点上求值．所以微积分的基本定理可以解释为：如果1-形式 ω 是一个0-形式 f 的微分 df，则 ω 的一维积分也可以化为 f 的0维积分．我们当然也希望对于高维的形式也有同样的情况，但是现在这样说还没有意义，因为对于微分形式 ω 还没有定义 $d\omega$．我们需要这样来定义：$d\omega$ 使得积分的化约成为可能．如何来定义是有一些线索的，因为我们对于积分知道一些化约的定理．回忆一下 Green 定理

$$\int_\gamma Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

D 是 $\mathbb{R}^2$中一个区域，$\gamma=\partial D$ 是 D 的边缘．对于什么样的区域 D 才能

用这个定理有一些条件.但是对于图6—1中简单的矩形区域. Green 定理就是微积分的基本定理,因为我们有

$$\int \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \int_0^1 [Q(1,y) - Q(0,y)]dy,$$

$$\int \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_0^1 [P(x,1) - P(x,0)]dx.$$

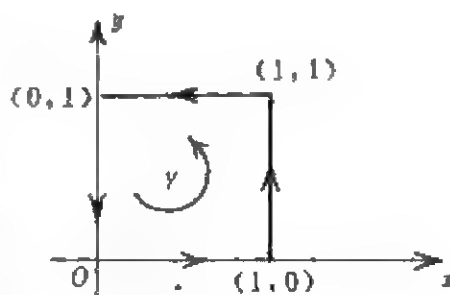


图 6—1

上两式的右方在适当调动符号之后就是所需的线积分.不必担心怎样把它推广到一般区域上去.对于我们,重要的是知道 Green 定理启发我们这样定义 $d\omega$ 使

$$d(Pdx + Qdy) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

但通过形式的计算很容易达到这一点,因为

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy,$$

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy,$$

所以只需这样"d"就行

$$\begin{aligned} d(Pdx + Qdy) &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right) \wedge dy \\ &= \frac{\partial Q}{\partial x}dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial y}dy \wedge dx = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy. \end{aligned}$$

于是对于函数,我们定义"d"就是普通的微分,对于微分形式 $\omega = Pdx$,定义 $d\omega = dP \wedge dx$.特别是对于 $\omega = dx$,我们有 $d\omega = 0$.对于符号应该小心,因为在外代数中 $Pdx = dx \cdot P$ ($\deg P = 0, \deg dx = 1$),所以可能误会 $d(dx \cdot P) = dx \wedge dP = -dP \wedge dx$,即是说应该规定会自动地变动符号.在作了这样一组规定之后,就能用任一个 ω 的局部表示来计算 $d\omega$ 了,这在形式上就成为下面的定理.

定理 在 $A(M) = \sum_k A^k(M)$ 中,存在唯一的算子

$$d: A^k(M) \longrightarrow A^{k+1}(M)$$

具有以下性质

(1)　d 是线性算子（对常数而言）；

(2)　$dd=0$；

(3)　$d(\omega\wedge\mu)=d\omega\wedge\mu+(-1)^k\omega\wedge d\mu$，$k=\deg\omega$；

(4)　对于函数 $f\in A^0(M)$，df 就是前面定义了的 f 的微分.

证　这些规则已经定义了 d. 若 $\omega=a dx_1\wedge\cdots\wedge dx_k$，有

$$d\omega = da\wedge dx_1\wedge\cdots\wedge dx_k. \qquad (*)$$

但是我们不能说（*）式是 d 的定义，因为我们必须证明 d 是与坐标无关的. 凡用坐标方法，总是有这种头疼的事. 直接验证虽然不难，但是下面的作法却更好（用与坐标无关的方法总是比较好，但这种好处几乎总是事后之见）. 取一个1-形式，例如 $\omega=a dx_1$，于是 $d\omega$ 是一个2-形式：

$$\begin{aligned}\langle d\omega, X_1, X_2\rangle &= \langle da\wedge dx_1, X_1, X_2\rangle \\ &= \langle X_1, a\rangle\langle X_2, x_1\rangle - \langle X_1, x_1\rangle\langle X_2, a\rangle,\end{aligned}$$

但有

$$\begin{aligned}\langle X_1, a\rangle\langle X_2, x_1\rangle &= \langle X_1, a\langle X_2, x_1\rangle\rangle - a\langle X_1, \langle X_2, x_1\rangle\rangle \\ &= \langle X_1, \langle a dx_1, X_2\rangle\rangle - a\langle X_1, \langle X_2, x_1\rangle\rangle \\ &= \langle X_1, \langle\omega, X_2\rangle\rangle - a\langle X_1, \langle X_2, x_1\rangle\rangle.\end{aligned}$$

同理

$$\langle X_2, a\rangle\langle X_1, x_1\rangle = \langle X_2, \langle\omega, X_1\rangle\rangle - a\langle X_2, \langle X_1, x_1\rangle\rangle.$$

所以

$$\begin{aligned}\langle d\omega, X_1, X_2\rangle &= \langle X_1, \langle\omega, X_2\rangle\rangle - \langle X_2, \langle\omega, X_1\rangle\rangle \\ &\quad - a\langle [X_1, X_2], x_1\rangle \\ &= \langle X_1, \langle\omega, X_2\rangle\rangle - \langle X_2, \langle\omega, X_1\rangle\rangle - \\ &\quad \langle\omega, [X_1, X_2]\rangle,\end{aligned}$$

这里已不再有坐标出现，所以 $d\omega$ 已适当定义. 如果作组合计算，就可以对 k-形式得到一般公式

$$\langle d\omega, X_0, X_1, \cdots, X_k\rangle$$

$$= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i X_i\langle\omega,(X_0,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_k)\rangle$$

$$+ \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\langle\omega,[X_i,X_j],X_0,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_k\rangle, \qquad (**)$$

上加$\hat{}$就表示这个元素应该除去.

算子d称为外微分. 它只是求导在微分形式中的形式推广，所以，它自身并没有重大的意义. 我们把一些熟知的问题用如下语言来叙述，或者可以得到更好的看法.

在初等的三维矢量分析中，我们学过矢量的两种"积"，内积$A\cdot B$是一个数

$$A\cdot B = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3.$$

"叉"积$A\times B$是一个矢量，而可以用行列式写成

$$A\times B = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = (A_2B_3 - A_3B_2)e_1$$

$$+ (A_3B_1 - A_1B_3)e_2 + (A_1B_2 - A_2B_1)e_3,$$

(e_1, e_2, e_3)是$\mathbf{R}^3$中的标准基底. 内积可以推广到任意维欧氏空间去. 但是叉积就不能推广. 因为$A\times B$不应该是一个矢量，而应该是$\Lambda^2(\mathbf{R}^3)$中的一个2-矢量

$$\begin{aligned} A\wedge B &= (A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3)\wedge(B_1e_1 + B_2e_2 + B_3e_3) \\ &= (A_2B_3 - A_3B_2)e_2\wedge e_3 + (A_3B_1 - A_1B_3)e_3\wedge e_1 \\ &\quad + (A_1B_2 - A_2B_1)e_1\wedge e_2. \end{aligned}$$

在$\mathbf{R}^3$中碰巧又有$\dim\Lambda^2(\mathbf{R}^3) = \dim\Lambda^1(\mathbf{R}^3) = \dim\mathbf{R}^3 = 3$，于是就可以把$\Lambda^2(\mathbf{R}^3)$和$\Lambda^1(\mathbf{R}^3)$看成相同，且把$A\wedge B$看成一个"矢量". 而在其它空间就不能这样.

类似地，在典型的高等微积分的课程里，我们还学到

(1)　对一个纯量（或标量 scalar）函数$f=f(x,y,z)$，其梯度是一个矢量函数$\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$，它相当于一个微分形式

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

(2) 对一个矢量函数 $f=(f_1, f_2, f_3)$，我们有矢量函数

$$\operatorname{curl} f=\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right),$$

以及纯量函数

$$\operatorname{div} f=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}.$$

它们应该分别相当于一个1-形式

$$\omega=f_1 dx+f_2 dy+f_3 dz$$

和一个2-形式

$$\mu=f_1 dy \wedge dz+f_2 dz \wedge dx+f_3 dx \wedge dy$$

的外微分，即

$$d\omega=\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right) dy \wedge dz+\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right) dz \wedge dx$$
$$+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx \wedge dy,$$
$$d\mu=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

而通常的恒等式

$$\operatorname{curl}(\operatorname{grad} f)=0, \quad \operatorname{div}(\operatorname{curl} f)=0$$

正是 $d^2=0$.

从实用的观点来看，这些想法都不太重要．但是，把事物放在一定的联系之中，时常会给出新的见解和较深的理解．如关于电磁场的经典的 Maxwell 方程，用通常的矢量语言，它们是

1) $\operatorname{curl} E=-\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}$,

2) $\operatorname{curl} H=\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}$,

3) $\operatorname{div} E=0$,

4) $\operatorname{div} H=0$,

E，H 是电磁场和磁场矢量函数（依赖于空间变量 x，y，z 和时间变量 t）．为简单计，假设电磁场中没有源．在四维时空中引入两

个2-形式

$$\omega = (E_1dx + E_2dy + E_3dz) \wedge cdt + H_1dy \wedge dz + H_2dz \wedge dx + H_3dx \wedge dy,$$

$$^*\omega = -(H_1dx + H_2dy + H_3dz) \wedge cdt + E_1dy \wedge dz + E_2dz \wedge dx + E_3dx \wedge dy$$

(称为 Faraday 形式及其对偶)，容易看到 Maxwell 方程化为

$$d\omega = d^*\omega = 0.$$

大家知道，认识到 Maxwell 方程在牛顿坐标变换（或称伽里略变换 $x'=x+v_1t$，$y'=y+v_2t$，$z'=z+v_3t$）下并不变，由此终于导致了特殊相对论，且 Maxwell 方程可以在四维空间中表示，却为陈述相对论提供了一个数学的框架.

现在再回到一般的理论. 我们知道，最好的一类微分形式就是作为微分的那一类，即 $\omega=d\mu$ 称为"恰当的". 什么时候会是这样呢?因为 $d^2=0$，所以一个必要条件应是 $d\omega=0$，我们也给满足这一条件的微分形式一个名称，称之为"闭"的 (closed). 所以恰当形式一定是闭的，而其逆不一定真. 我们更仔细地考查一下. 最简单的情况是 $\mathbb{R}^1$ 上的形式. 那里只有1-形式又都是恰当的. 这正是微积分的基本定理. 但是即令是一维的情况也有复杂性. 在一维球 S^1 上就有不恰当的1-形式. 例如 $\omega=\cos^2t\,dt$. 因为如果它是，则必有定义在 S^1 上的函数 f 使 $\omega=df$，这时因为所谓 f 是 S^1 上的函数，意味着 $f(2\pi)=f(0)$，所以

$$\int_0^{2\pi} \cos^2t\,dt = f(2\pi) - f(0) = 0,$$

这当然是不对的. 另一方面，若将 ω 限制在 S^1 的一部分上，则它是恰当的. 函数 f 就是通常的原函数

$$f = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}.$$

由于出现 $t/2$，f 不是周期的，因而不能作为整个 S^1 上的函数. 这个例子说明，问题与其说是在分析方面，宁可说在流形的拓扑方

面．在二维的情况也有类似之处．$\mathbb{R}^2$中的1-形式的形状是

$$\omega = Pdx + Qdy.$$

$d\omega=0$意味着

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (*)$$

为使 $\omega=df$，意味着求解一组方程

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q. \qquad (**)$$

但若回顾 Frobenius 定理，就知（*）式正是使（**）式可解的可积性条件．事实上，这时可直接求 f，令

$$g(x,y) = \int_0^x P(t,y)dt,$$

则

$$\frac{\partial g}{\partial x} = P(x,y),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \int_0^x \frac{\partial P(t,y)}{\partial y}dt = \int_0^x \frac{\partial Q}{\partial t}(t,y)dt$$

$$= Q(x,y) - Q(0,y).$$

求 $F(y)$使 $F'(y)=Q(0,y)$并令 $f(x,y) = g(x,y) + F(y)$，则有

$$\frac{\partial f}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = P.$$

以上的证明依赖于可以从原点到任何一点（x，y）积分，即是说，区域中没有"洞"挡路．如果有洞，就会出现麻烦．考虑定义在 $\mathbb{R}^2-\{0\}$ 上的微分形式

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

因为0被除去了，我们可以用极坐标（y，θ）．为使 θ 有确定值，再除去正实轴 $L=\{(x,0)|x\geqslant 0\}$，于是

$$\theta: \mathbb{R}^2 - L \longrightarrow (0,2\pi).$$

当然有 $\theta(x,y)=\tan^{-1}(y/x)$，而且 $\omega=d\theta$ 于 $\mathbb{R}^2-L$ 上．但是不可能有一个 f 使在 $\mathbb{R}^2-\{0\}$ 上 $\omega=df$．因为这时将会使 $d(\theta-f)=0$

于 $\mathbf{R}^2-L$ 上，从而

$$f=\theta+\text{const},\quad 在\ \mathbf{R}^2-L\ 上.$$

但是这样的 f 不可能连续拓展到 $\mathbf{R}^2-\{0\}$虽然 ω 不是恰当的. 但直接计算可知它在 $\mathbf{R}^2-\{0\}$上是闭的.

因此闭形式和恰当形式的关系涉及到拓扑学的考虑. 局部地，确有肯定的回答. 不幸的是，我们对$\mathbf{R}^2$上的1-形式所给的证明并未含有普遍到足以应付一般情况的思想. 这个思想应该基于同伦的构造. 既然不能从上述特例把这个思想逐步诱导出来，不如就直接说明它. 考虑$0\in\mathbf{R}^n$ 的一个邻域 U. 若 $x\in U\Rightarrow tx\in U$, $0\leqslant t\leqslant 1$，就说 U 对于原点是“星形的”.

Poincaré 引理 定义在星形邻域 $U\subset\mathbf{R}^n$ 上的闭形式 ω 必为恰当的.

证 令 $I=[0,1]$ 为单位区间，定义两个包含映射 $U\longrightarrow I\times U$,

$$i_0:x\longmapsto(0,x),\quad i_1:x\longmapsto(1,x).$$

因 U 为星形，所以能定义一个同伦

$$H:I\times U\longrightarrow U,\qquad (t,x)\longmapsto tx,$$

注意 $H_1=\text{id}$ 而 $H_0=$常值映射. 在 U 上给定一个 k-形式 ω, 则有它在 $I\times U$ 上的拉回 $H^*\omega$（严格说，它不完全对，因为 $I\times U$ 不是一个流形，但这只是一个技术细节，H 显然对 t 和 x 都光滑）. 为了证明 ω 为恰当，我们需要一个 U 上的 $(k-1)$-形式. 其方法是通过对 t 积分在 $H^*\omega$ 中除去一个变元. 令 $T=\dfrac{\partial}{\partial t}$为 $\mathbf{R}$ 上标准的矢量场，在 U 上定义一个 $(k-1)$-形式 $I\omega$ 如下

$$\langle I\omega,v_1,\cdots,v_{k-1}\rangle(x)=\int_0^1\langle H^*\omega,T,v_1,\cdots,v_{k-1}\rangle(t,x)dt.\quad(*)$$

我们有

$$\langle dI\omega,v_1,\cdots,v_k\rangle=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}D_{v_i}\langle I\omega,v_1,\cdots,\hat{v}_i,\cdots,v_k\rangle$$

（因为我们是在 $\mathbf{R}^n$ 中，所以没有 $[v_i,v_j]=0$项）

$$= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}D_{v_i}\int_0^1\langle H^*\omega, T, v_1, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, v_k\rangle dt,$$

且

$$\langle Id\omega, v_1, \cdots, v_k\rangle = \int_0^1\langle H^* d\omega, T, v_1, \cdots, v_k\rangle dt$$

$$= \int_0^1\langle dH^*\omega, T, v_1, \cdots, v_k\rangle dt$$

$$= \int_0^1 D_T\langle H^*\omega, v_1, \cdots, v_k\rangle dt + \sum_{i=1}^{k}\int_0^1(-1)^i D_{v_i}\langle H^*\omega, T, v_1, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, v_k\rangle dt$$

$$= \int_0^1 D_T\langle H^*\omega, v_1, \cdots, v_k\rangle dt - \langle dI\omega, v_1, \cdots, v_k\rangle.$$

但是

$$\int_0^1 D_T\langle H^*\omega, v_1, \cdots, v_k\rangle dt$$
$$= \langle H^*\omega, v_1, \cdots, v_k\rangle(1, x) - \langle H^*\omega, v_1, \cdots, v_k\rangle(0, x)$$
$$= \langle \omega, v_1, \cdots, v_k\rangle(x) - 0,$$

这意味着

$$\omega = dI\omega + Id\omega, \qquad (**)$$

所以，当 $d\omega=0$时，$\omega=dI\omega$ 是恰当的.

同样的计算可以推广到以下情况，流形之间的光滑映射 $f, g: M \longrightarrow N$ 称为同伦的，若存在一个光滑映射

$$H: I \times M \longrightarrow N,$$

使得 $H(0,P)=f(P), H(1,P)=g(P)$，对 N 上任一形式 ω，仍用同样的方程(*)在 M 上定义一个$(k-1)$-形式，对同样的计算加以修正，即加上$[v_i, v_j]$项以及考虑$[T, v_i]=0$表明，方程(**)成为

$$g^*\omega - f^*\omega = dI\omega + Id\omega.$$

下一章将用到这个关系式.

Poincaré 引理一般是不真的. 为了衡量其不真的程度，引入以下的上同调的形式语言：可以用外微分运算 d 把 k-形式空间串起来成为一个"复形"(complex)

$$0 \longrightarrow A^0(M) \xrightarrow{d} A^1(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} A^k(M) \xrightarrow{d} A^{k+1}(M) \longrightarrow \cdots.$$

它有时也记作

$$A^*(M) = \sum_k A^k(M),$$

称为 de Rham 复形. 任意象这样一串空间和映射 d, 只要适合 $d^2 = 0$也都称为一个复形. 这时，定义

$$Z^k(M) = \ker(A^k(M) \longrightarrow A^{k+1}(M)),$$

$$B^k(M) = \operatorname{Im}(A^{k-1}(M) \longrightarrow A^k(M))$$

为"循环"(cycle) 和"边缘"(boundary). 在我们的情况下，它们各是闭形式和恰当形式的空间. 作一个复形，意味着

$$B^k(M) \subset Z^k(M).$$

而定义第 k 个上同调空间为

$$H^k_R(M) = \frac{Z^k(M)}{B^k(M)},$$

称为 de Rham 上同调. Poincaré 引理只不过是说 $H^k_R(U) = 0$, $k > 0$, 只要 $U \subset \mathbf{R}^n$ 是星形的. 所以在一般情况下，空间 $H^k_R(M)$越大（它们是 $\mathbf{R}$ 上的矢量空间）Poincaré 引理不真越严重. 根据我们所已经了解的，$H^k_R(M)$ 十分地依赖于 M 的拓扑. 著名的 de Rham 定理则进一步断定，它只依赖于 M 的拓扑. 我们正在一步步向这个定理深入. 但是在一段时间之内还到不了这个定理. 在结束本章之前再弄清几个问题.

§ 5. 其它问题

回想一下，外代数的要点在于它考虑到次序. 我们也曾用次序来定义矢量空间 V 的定向：两个有序基底 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 和 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 定义 V 的同一个定向，如果在以下变换式

$$e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n = A d_1 \wedge d_2 \wedge \cdots \wedge d_n$$

中系数为正，A 恰好是联系基底的矩阵 (A_{ij}) 的行列式，这里

$$e_i = \sum_j A_{ij} d_j.$$

就单个矢量空间 V 来说，这是很简单的. V 有两个可能的定向，但是对于矢量丛 $E \longrightarrow B$，定向就比较复杂. 希望能给 E 的每一个纤维 E_b 以定向，而使得在某种意义上，所有纤维都有相同的定向. 这件事很容易陈述如下：令 (U_α) 是 E 的一族平凡化邻域. 我们知道，给一个局部坐标 $\varphi_\alpha: U_\alpha \times V \longrightarrow E$ 相当于给出一组定义在 U_α 上的局部截口 $\rho_\alpha = (\rho_{\alpha_1}, \rho_{\alpha_2}, \cdots, \rho_{\alpha_n})$. 对这样一组截口赋以次序就叫做一个局部标架 (frame). 一个局部标架 ρ_α 对于每一点 $b \in U_\alpha$ 给出一个有序基底 $\rho_\alpha(b) = (\rho_{\alpha_1}(b), \rho_{\alpha_2}(b), \cdots, \rho_{\alpha_n}(b))$. 如果 $b \in U_\alpha \cap U_\beta$，$\rho_\alpha(b)$ 和 $\rho_\beta(b)$ 之间关系如何？如果能找到这样一族局部标架 (ρ_α) 使得 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ 时，ρ_α 和 ρ_β 给出相同定向，就说 E 是可定向的. 若底空间 B 是连通的，(ρ_α) 称为 E 的大范围定向. 可定向丛 $E \longrightarrow B$ 有两个可能的定向. 可定向性相当于说所有迁移矩阵 $(g_{\alpha\beta})$ 都有正的行列式. 另一个说法如下：考虑最高次外形式丛 $\Lambda^n(E) \longrightarrow B$，它是一个线丛，是否为平凡视它是否有一个大范围的处处不为0的截口而定. 所以 E 是可定向的当且仅当 $\Lambda^n(E)$ 为平凡的，$\Lambda^n(E)$ 的一个处处不为0的大范围截口就定义了 E 的一个定向. 不可定向丛的最简单的例子就是 Möbius 带亦即在 $\mathbf{P}^1 = S^1$ 上的典则线丛 $\gamma(\mathbf{P}^1)$. Möbius 带沿中线剪开后仍是一个整体，这说明 $\gamma(\mathbf{P}^1) = \Lambda^1(\gamma(\mathbf{P}^1))$ 是非平凡的. 如果流形 M 的切丛 $T(M) \longrightarrow M$ 是可定向的，就说 M 是可定向的，即这时可以找到一族局部坐标系 (U_α, x_α) 使得所有的 Jacobian 矩阵 $(\partial x_\alpha / \partial x_\beta)$ 都有正行列式. 因为当且仅当 $T^*(M)$ 为可定向时，$T(M)$ 才是可定向的，所以 $T(M)$ 可定向当且仅当存在一个大范围的处处不为0的 n-形式 ($n = \dim M$). 任一个这样的形式 ω 在 M 上定义一个定向. 最简单的不可定向流形是射影平面 $\mathbf{P}^2$. 回忆一下，$\mathbf{P}^2$ 是从球面 S^2 将 x 点与 $-x$ 点视为相同得出的. 我们有以下图示

$$\begin{array}{ccc} T(S^2) & \xrightarrow{d\pi} & T(\mathbf{P}^2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^2 & \xrightarrow[\pi]{} & \mathbf{P}^2 \end{array}$$

因为 π 是局部微分同胚，故在每个纤维上 $d\pi$ 都是同构. 从这里可以看到 $T(\mathbf{P}^2)$ 可描述如下：记住

$$T(S^2) = \{(x,y) \mid x \in S^2, y \in \mathbf{R}^3, \langle x,y \rangle = 0\},$$

把 (x, y) 与 $(-x, -y)$ 视为相同，所得的商空间就是 $T(\mathbf{P}^2)$，对于一点 $b = [x] \in \mathbf{P}^2$，$\Lambda^2(T_b(\mathbf{P}^2))$ 中的元是以下形式的对象之线性组合

$$[x, y_1] \wedge [x, y_2].$$

若将 x 换成 $-x$，y_1，y_2 都要变号而 $y_1 \wedge y_2$ 不变. 把 $y_1 \wedge y_2$ 与 $y_1 \times y_2$ 看成相同，因为 y_1，y_2 都与 x 正交，$y_1 \times y_2$ 应与 x 平行. 这意味着若 $\mathbf{P}^2$ 可定向，可得到一个函数 $\rho: \mathbf{P}^2 \longrightarrow S^2$ 使 $\pi\rho = 1$，即得覆盖映射 $S^2 \xrightarrow{\pi} \mathbf{P}^2$ 的一个截口，这是不可能的. 因为如果这样一个 ρ 存在，$-\rho$ 也将是一个截口. 这时，$S^2 = \operatorname{Im}\rho \cup \operatorname{Im}(-\rho)$，且 $\operatorname{Im}\rho \cap \operatorname{Im}(-\rho) = \varnothing$，这是不可能的，因为 S^2 是连通的.

必须看到，可定向性的定义只是给出了一个概念. 定义本身并不包含判断是否可定向的有效办法. 不论如何，一个矢量丛有许许多多局部标架. 有更有效的办法能从这里而找出一个大范围的定向，或者证明找不到这个定向，后而我们会讲到这一点.

应该指出，可定向性完全是一个"实"丛的问题. 我们讲到了正行列式. 若 V 是一个复矢量空间，它当然也是一个实空间，因此有两个可能的定向. 因 V 是一个复空间使我们能作一个确定的选择. 令 V 作为一个复矢量空间有一个基底 $(e)_{i=1}^{n}$（这样写法表示我们不管 e_i 的次序）. 于是 V 作为实域上的矢量空间，有基底 $(e_i, \sqrt{-1}e_i)$. 现在按下面的规则排列这个基底

$$(e_1, \sqrt{-1}e_1, e_2, \sqrt{-1}e_2, \cdots, e_n, \sqrt{-1}e_n),$$

即 e_i 后面紧接着 $\sqrt{-1}e_i$.

引理 上述定向与 $(e_i)_{i=1}^n$ 的选择无关.

证 令 $(d_i)_{i=1}^n$ 是另一个复基底,我们需要比较 $(d_1,\sqrt{-1}d_1,\cdots,d_n,\sqrt{-1}d_n)$ 和 $(e_1,\sqrt{-1}e_1,\cdots,e_n,\sqrt{-1}e_n)$. 因为它们是从一个已定的次序开始再作同样的排列,所以原来的次序显然没有关系. 事实上,作为复矢量空间我们有一个复数 C 使得

$$d_1\wedge\cdots\wedge d_n=Ce_1\wedge\cdots\wedge e_n.$$

令 $C=A+\sqrt{-1}B$, A 和 B 是实的,所以

$$d_1\wedge\cdots\wedge d_n=Ae_1\wedge\cdots\wedge e_n+B(\sqrt{-1}e_1)\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_n.$$

与此相似有

$$\begin{aligned}(\sqrt{-1}d_1)\wedge\cdots\wedge(\sqrt{-1}d_n)&=A(\sqrt{-1}e_1)\wedge\cdots\wedge(\sqrt{-1}e_n)\\&\quad-Be_1\wedge(\sqrt{-1}e_2)\wedge\cdots\wedge(\sqrt{-1}e_n).\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&d_1\wedge\cdots\wedge d_n\wedge(\sqrt{-1}d_1)\wedge\cdots\wedge(\sqrt{-1}d_n)\\&=A^2e_1\wedge\cdots\wedge e_n\wedge(\sqrt{-1}e_1)\wedge\cdots\wedge(\sqrt{-1}e_n)\\&-B^2(\sqrt{-1}e_1)\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_n\wedge e_1\wedge(\sqrt{-1}e_2)\wedge\\&\cdots\wedge(\sqrt{-1}e_n).\end{aligned}$$

把右方第二项中的 $\sqrt{-1}e_1$ 与 e_1 对换,将要变号 $n+(n-1)=2n-1$ 次,所以

$$\begin{aligned}&d_1\wedge\cdots\wedge d_n\wedge(\sqrt{-1}d_1)\wedge\cdots\wedge(\sqrt{-1}d_n)\\&=|C|^2e_1\wedge\cdots\wedge e_n\wedge(\sqrt{-1}e_1)\wedge\cdots\wedge(\sqrt{-1}e_n).\end{aligned}$$

注 定向 $(e_1,\sqrt{-1}e_1,e_2,\sqrt{-1}e_2,\cdots,e_n,\sqrt{-1}e_n)$ 是一个固定的但任选的定向,也可以选用另外的定向如 $(e_1,e_2,\cdots,e_n,\sqrt{-1}e_1,\sqrt{-1}e_2,\cdots,\sqrt{-1}e_n)$,有的文献上确实也是这样用的. 但我们的选法有特殊的理由,与 Lie 群有关. 令

$$d_i=\sum_j C_{ij}e_j,$$

$C_{ij}=A_{ij}+\sqrt{-1}B_{ij}$，而 $\widetilde{C}_{ij}$ 表示 2×2 实矩阵

$$\widetilde{C}_{ij}=\begin{pmatrix} A_{ij} & -B_{ij} \\ B_{ij} & A_{ij} \end{pmatrix}.$$

很容易看到，$(d_1,\sqrt{-1}d_1,\cdots,d_n,\sqrt{-1}d_n)$ 和 $(e_1,\sqrt{-1}e_1,\cdots,e_n,\sqrt{-1}e_n)$ 之间的矩阵是 $(\widetilde{C}_{ij})$，这样我们就得到了一个嵌入

$$GL(n,\mathbf{C})\longrightarrow GL(2n,\mathbf{R}),\quad (C_{ij})\longmapsto(\widetilde{C}_{ij}),$$

从而使 $GL(n,\mathbf{C})$ 成为 $GL(2n,\mathbf{R})$ 的一个子群，我们需要的就是这个特定的嵌入.

令 $E\longrightarrow B$ 是一个复矢量丛，和一个单个矢量空间一样，它也是一个实矢量丛. 利用局部复标架，我们可以如上面一样在每个纤维上给以定向. 上述引理说明，这个定向是适当定义的，即将每个复矢量丛做为实矢量丛来看，都是可定向的，而我们所采用的规定就选定了一个定向. 特别是，每个复流形都是可定向的，从而有确定的定向.

微分形式是矢量场的对偶概念. 因此，关于矢量场的许多定理对于微分形式有对偶的定理. 如 Frobenius 定理.

令 $\mathscr{I}$ 为流形上的一个 k-维分布. 记

$$I(\mathscr{I})=\{\omega\in A(M)\,|\,\omega(X_1,\cdots,X_l)=0,X_1,\cdots,X_l\in\mathscr{I}\},$$

显然 $I(\mathscr{I})\subset A(M)$ 是一个理想.

定理（Frobenius 定理） 分布 $\mathscr{I}$ 是对合的当且仅当 $d(I(\mathscr{I}))\subset I(\mathscr{I})$.

证 取一个点 $P_0\in M$. 我们可以局部地找到矢量场 $X_1,\cdots,X_n$ $(n=\dim M)$ 使 $(X_1,\cdots,X_k)$ 对于 P_0 之一个邻域 U 中的任何一点 P 都是 $\mathscr{I}_P$ 的基底. 令 $(\omega_1,\cdots,\omega_n)$ 是 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的对偶1-形式，即有

$$\omega_i(X_j)=\delta_{ij}.$$

于是 $(\omega_{k+1},\cdots,\omega_n)\subset I(\mathscr{I})$，而且事实上生成 $I(\mathscr{I})$，由定义有

$$d\omega_a(X_i,X_j)=X_i(\langle\omega_a,X_j\rangle)-X_j(\langle\omega_a,X_i\rangle)-\langle\omega_a,[X_i,X_j]\rangle.$$

若 $i, j\leqslant k, \alpha>k$，前两项都为0，而有

$$d\omega_\alpha(X_i, X_j) = -\langle\omega_\alpha, [X_i, X_j]\rangle.$$

很明显当且仅当 $[X_i, X_j]\in\mathscr{I}$ 时 $d\omega_\alpha(X_i, X_j)=0$，定理得证.

参 考 文 献

[1] Flanders, H., *Differential Forms*. Academic Press.

[2] Spivak, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. 1. Publish or Perish, Berkeley, 1979.

第七章 积　　分

§1. 引　言

上一章我们建立了微分形式的语言. 微分形式是打算用作积分的被积式的. 因为我们要做的积分是 Riemann 积分，所以没有什么读者不知道的本质上的新东西. 问题在于找一个比较好的讲法，使得在流形情况下的要点讲得最清楚. 第一个也是最重要点是不变性，即积分在坐标变换下的性态. 第二是化约，即微积分的基本定理，它将以 Stokes 定理的形式出现. 我们想表明，如果表述适当，这两点都在本质上是初等的事实，而且就包含在理论自身之中. 为此目的，我们不打算按通常教科书上讲流形上的积分的讲法，而是按 H. Whitney "Geometry Integration Theory"（几何积分理论）一书，讲法如下.

当然我们将在 k 维区域上求积 k-形式，区域被分成小块，积分是 Riemann 和的极限. 但是我们不是分成小矩形，最基本的小块我们将采用三角形. 或者一般就说是单形（simplex）. 这种作法全是技巧上的理由. 因为有一些组合学的考虑使单形比矩形用起来更方便. 但是不论是矩形还是三角形，在流形上统统没有. 但在坐标邻域中总有扭曲的三角形. 所以只要积分在变量变换下行为规矩，我们就能用小块上的积分建立大范围的积分.

§2. 单　形

令 V 为矢量空间，线性子空间 $W\subset V$. 所谓 V 的仿射（affine）

子空间就是一个子集 $A\subset V$，其形状如下

$$A=x_0+W,$$

$x_0\in V$，即是说 A 是由子空间 W 经过下面的平移而得

$$T_{x_0}: V\longrightarrow V,\quad x\longmapsto x+x_0.$$

A 的维数定义为 W 的维数.

一般说来，只要在矢量空间中作平移，就从矢量范畴进入仿射范畴. 从几何观点看，仿射对象更为自然（为什么只考虑过原点的直线呢?）. 但从代数观点看，矢量运算更为容易. 要搞仿射对这些代数的计算就必须加以修正. 例如，令 $(w_1, \cdots, w_k)$ 是 W 的一个基底. 令 $x_i=x_0+w_i$. 线性表达式 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i w_i$ 变成

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i w_i=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(x_i-x_0)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i+\lambda_0 x_0,$$

其中 $\lambda_0=-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i$. 因此，$(\omega_i)_{i=1}^{k}$线性无关就相当于 $(x_i)_{i=1}^{k}$仿射无关，仿射无关的定义是 $\sum_{i=0}^{k}\lambda_i x_i=0$，同时

$$\sum_{i=0}^{k}\lambda_i=0\Rightarrow\lambda_i=0,\quad i=0,1,\cdots,k.$$

一个 $x\in A$ 可以表示为“仿射基底”$(x_0, x_1, \cdots, x_k)$ 的“仿射组合).

$$x=x_0+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i w_i=x_0+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(x_i-x_0)$$
$$=\sum_{i=0}^{k}\lambda_i x_i,\quad \left(\lambda_0=1-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)$$

而 $\sum_{i=0}^{k}\lambda_i=1$. 例如，当 $x_0\neq x_1$时 (x_0, x_1) 是仿射无关的，这时，过 x_0，x_1的仿射直线或简单说就是直线，正是

$$L=\{\lambda_0 x_0+(1-\lambda_0)x_1\mid\lambda_0\in\mathbb{R}\}.$$

如果我们只需要线段$\overline{x_0x_1}$，可以限制 λ_0在0，1之间：$0\leqslant\lambda_0\leqslant 1$. 更

一般地，我们有

定义 V 中的 k 维单形，简记为 k-单形，即一个子集

$$\sigma=\langle x_0, x_1, \cdots, x_k\rangle=\left\{\sum_{i=0}^{k}\lambda_i x_i \,\middle|\, \sum_{i=0}^{k}\lambda_i=1,\ 0\leqslant\lambda_i\leqslant 1\right\},$$

$(x_0, x_1, \cdots, x_k)$ 是仿射无关的．这些点称为单形的顶点．

由于仿射无关性，对于一个点 $x\in\sigma$，表达式

$$x=\sum_{i=0}^{k}\lambda_i x_i,\quad 0\leqslant\lambda_i\leqslant 1,\quad \sum_{i=0}^{k}\lambda_i=1$$

是唯一的．$(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_k)$（服从 $\sum_{i=0}^{k}\lambda_i=1$ 的限制）称为 x 的重心坐标（barycentric coordinate）$b_i(x)=\lambda_i$．上面的式子称为"凸组合"．

0-单形就是一个点，1-单形是一个区间，2-单形是一个三角形等等．求积分时必须考虑定向．所以，记 $\sigma=\langle x_0, x_1, \cdots, x_k\rangle$，理解为其顶点即按此次序排列（或者说，基底按 $(w_1, \cdots, w_k)$ 次序排列），σ 称为有向单形．这样我们就有如下的图形：

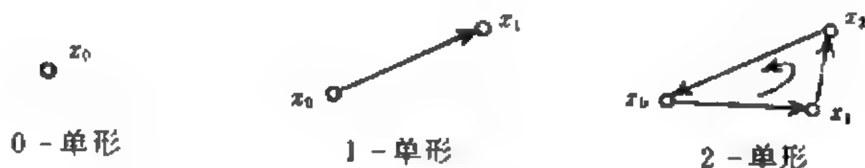


图 7 1

在作积分时，我们希望能在同一单形上按各种定向积分若干次，或者在好几个单形上积分．所以考虑"链"（chain）

$$\sum n_i\sigma_i（有限多个 \sigma_i），$$

这里 n_i 是整数，σ_i 是单形，我们约定，当 $\sigma_i\in S_{k+1}$时

$$\langle x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(k)}\rangle=\varepsilon(\sigma)\langle x_0, x_1, \cdots, x_k\rangle. \qquad (*)$$

处理这类问题有一种形式的方法．因为以后要多次用到它，所以在这里我们一次讲完．

令 R 是具有单位元1的可换环，A 是任一个集，由 A 生成的 R-

自由模（free module）即集合

$$F(A)=\{\varphi:A\longrightarrow R\,|\,\varphi(a)\neq 0\text{只对有限多个 } a\in A \text{ 成立}\}.$$

它与上面"链"的定义关系如下

$$\bar{a}:A\longrightarrow R,\qquad \bar{a}(x)=\begin{cases}1, & x=a,\\ 0, & x\neq a,\end{cases}$$

显然 $\bar{a}\in F(A)$. 这样可将 A 与 $F(A)$ 的一个子集恒同起来，即 $A\longrightarrow F(A)$, $a\longmapsto\bar{a}$. 若 $\varphi\in F(A)$，且 $\varphi(a_i)=\lambda_i\neq 0$, $i=1, 2, \cdots, k$, 则易见

$$\varphi=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\bar{a}_i.$$

在我们的情况下，$R=\mathbf{Z}$ 为整数（这时 F 实际上是自由 Abel 群），$S=V$ 中的一切单形之集．这时 $F(S)$ 称为链群．

$$F(S)=\sum_k F(S_k)=\sum_k F_k(S),$$

$$F(S_k)=k\text{ 维链群}=\text{由 } k\text{- 单形生成的自由群}.$$

令 I 为 $F(S)$ 中由关系式(＊)生成的子群，商群 $\tilde{F}(S)=F(S)/I$ 称为有向链群. 不难证明(虽然并不显然)$\tilde{F}(S)$ 仍是自由的，而且由有向单形的等价类所生成.

化约定理把 σ 上的积分和其边缘上的积分连接起来，所以需要单形 σ 之边缘的定义，其形式定义是：令 $\sigma=\langle x_0, x_1, \cdots, x_k\rangle$ 为一个 k-单形．对每一个 $0\leqslant i\leqslant k$，除去 x_i 所得的（$k-1$）-单形 $\sigma_i=\langle x_0, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_k\rangle$ 称为相对于 x_i 的（$k-1$）-面，它也是一个单形，所以自己也有面，仿此以往，所有各维的面均称为 σ 的面．定义 σ 之边缘 $\partial\sigma$ 为链

$$\partial\sigma=\sum_{i=1}^{k}(-1)^i\sigma_i.$$

我们说过，采用单形方法有一些组合学的理论，其中之一如下：边缘 ∂ 定义了一个线性映射

$$\partial:F(S_k)\longrightarrow F(S_{k-1}).$$

命题 (F, ∂)：$\cdots\xrightarrow{\partial}F(S_k)\xrightarrow{\partial}F(S_{k-1})\xrightarrow{\partial}\cdots\xrightarrow{\partial}F(S_0)\longrightarrow$

0是一个链复形，即 $\partial\partial=0$.

这个命题将会多次出现，所以值得详细地介绍，它实际上只是一些组合计算，我们有

$$\partial\partial\sigma=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\partial\sigma_i.$$

求 $\partial\langle x_0,\cdots,\hat{x}_i,\cdots,x_k\rangle$ 就是再除去一个顶点 x_j，然后按 x_j 之位置加上一个符号，当 $j<i$ 时，x_j 是在第 j 个位置，所以应该加 $(-1)^j$，但是对于 $j>i$ 时，x_j 是在第 $j-1$ 位置，加的符号应是 $(-1)^{j-1}$，因此

$$\begin{aligned}\partial\partial\sigma=&\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\Big[\sum_{0\leqslant j<i}(-1)^j\langle x_0,\cdots,\hat{x}_j,\cdots,\hat{x}_i,\cdots,x_k\rangle\\&+\sum_{k\geqslant j>i}(-1)^{j-1}\langle x_0,\cdots,\hat{x}_i,\cdots,\hat{x}_j,\cdots,x_k\rangle\Big]\\=&\sum_{j<i}(-1)^{i+j}\langle x_0,\cdots,\hat{x}_j,\cdots,\hat{x}_i,\cdots,x_k\rangle\\&+\sum_{j>i}(-1)^{i+j-1}\langle x_0,\cdots,\hat{x}_i,\cdots,\hat{x}_j,\cdots,x_k\rangle,\end{aligned}$$

第二项里把 i,j 对调，因为两个求和式项数相同（图7—2），所以一切项全部消完.

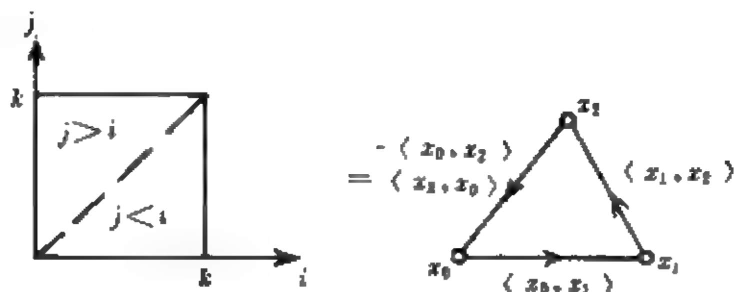


图 7—2

例 $\partial\langle x_0,x_1,x_2\rangle=\langle x_1,x_2\rangle-\langle x_0,x_2\rangle+\langle x_0,x_1\rangle$.

在求积分时需要把一个单形切成小块.其作法当然为数无穷.但为简单起见，我们只按一种切法，称为“重心重分”(barycentric subdivision).对于一个 k-单形 $\sigma=\langle x_0,x_1,\cdots,x_k\rangle$，点

$$b(\sigma)=\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}x_i$$

称为其重心.我们已经定义了σ的面,它们也是单形,所以自己也有面.我们用$\tau<\sigma$表示τ是σ的面.σ的重心重分就是由σ的一切面的重心作出的一组单形.对2-单形可以画出一个图,其中b是2-单形的重心,b_1,b_2,b_3是三个1维面的重心,而x_0,x_1,x_2本身是0维面的重心.从这个图中我们发现一个格式,每一个小的2-单形的形状都是$\langle y_0,y_1,y_2\rangle$,$y_0$是一个顶点(即0-单形之重心),$y_1$是某个1-单形之重心,$y_2$是2-单形的重心:$y_2=b(\sigma)$,这就告诉我们怎样来给出一般的

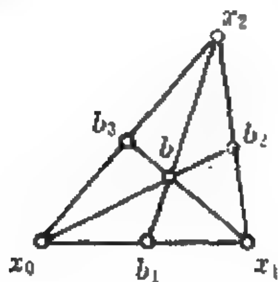


图7—3

定义 令σ为一k-单形,σ的重心重分$D(\sigma)$是一组形如$\langle b(\tau_0),b(\tau_1),\cdots,b(\tau_k)\rangle$的$k$-单形,这里$\tau_i<\sigma$是$\sigma$的$i$维面(因此$\tau_0$是顶点,$\tau_k=\sigma$),且$\tau_i<\tau_{i+1}$,换言之,每个小的$k$-单形由一串面$\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_k=\sigma$决定.

需要说明这个定义的合理性.例如说,应该证明$\langle b(\tau_0),b(\tau_1),\cdots,b(\tau_k)\rangle$是一个单形,即证明它们的顶点仿射无关.但这是容易的.例如说,若$\tau_i=\langle x_0,\cdots,x_i\rangle$,则

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k}\lambda_i b(\tau_i)&=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_i}{i+1}\sum_{j=0}^{i}x_j\\&=\left(\lambda_0+\frac{\lambda_1}{2}+\cdots+\frac{\lambda_k}{k+1}\right)x_0\\&\quad+\left(\frac{\lambda_1}{2}+\cdots+\frac{\lambda_k}{k+1}\right)x_1\\&\quad+\cdots+\frac{\lambda_k}{k+1}x_k.\end{aligned}$$

更为重要的是,重分中的小单形彼此不会重迭.这并不是说$D(\sigma)$中的单形是互相分离的,而是说它们以最经济的方式相交.

确切些说，$D(\sigma)$中的两个单形一定交在一个公共面上. 以后将讨论它.

我们必需弄清重分以后是否缩小了单形. 直观上看这是清楚的. 形式地看也是容易的. 当然，对矢量空间必须给以某个内积来定义其长度. 令 $\sigma=\langle x_0, x_1, \cdots, x_k\rangle$ 为一个 k-单形，若 x，$y\in\sigma$，有

$$y=\sum_{i=0}^{k}\lambda_i x_i,\quad 0\leqslant\lambda_i\leqslant 1,\quad \sum_i\lambda_i=1.$$

所以

$$\begin{aligned}|x-y|&=\left|\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(x-x_i)\right|\leqslant\sum_{i=0}^{k}\lambda_i|x-x_i|\\&\leqslant\sup_i|x-x_i|\leqslant\sup_{i,j}|x_i-x_j|,\end{aligned}$$

$$\sigma\text{ 之直径}\leqslant\sup_{i,j}|x_i-x_j|.$$

对 $D(\sigma)$中的一单形应用上式表明我们只须考虑$|b(\tau)-b(\mu)|$，$\tau<\mu$. 因此，假设

$$b(\tau)=\frac{1}{l+1}\sum_{j=0}^{l}x_j,$$

$$b(\mu)=\frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}x_j,\quad l<m\leqslant k.$$

因

$$\begin{aligned}|b(\tau)-b(\mu)|&\leqslant\sup_{j\leqslant l}|x_j-b(\mu)|\leqslant\sup_{j\leqslant l}\left|x_j-\frac{1}{m+1}\sum_{j'=0}^{m}x_{j'}\right|\\&=\sup_{j\leqslant l}\left|\frac{1}{m+1}\sum_{j'=0}^{m}(x_j-x_{j'})\right|\\&\leqslant\sup_{j\leqslant l}\frac{1}{m+1}\sum_{j'=0}^{m}|x_j-x_{j'}|\\&\leqslant\frac{m}{m+1}\sup_{i,j}|x_i-x_j|<\frac{k}{k+1}\cdot(\sigma\text{ 的直径}),\end{aligned}$$

所以，当我们重复地作重心重分时，单形的大小将趋向于0. 递推地定义 n 次重心重分 $D^n(\sigma)=D(D^{n-1}(\sigma))$，$D^1(\sigma)=D(\sigma)$，我们看到 D^n

(σ)中每个单形之直径可以任意地小，只要 n 充分大.

在积分中，定向是一个基本的考虑．例如，在初等微积分中有这样的规定

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

就是说，当一维单形$\langle a,b\rangle$改变定向时，积分就要变号. 在定义单形的重心重分时，$D^n(\sigma)$中的每一个单形都赋有了一个定向$\langle b(\tau_0), b(\tau_1),\cdots,b(\tau_k)\rangle$. 但是，这种赋定向方法只是为了方便，为了应用序列 $\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_k$. 由此而来的定向与原来单形 $\sigma=\langle x_0,x_1,\cdots,x_k\rangle$的定向不一定相符，这从 $k=2$的单形(图7—4)可以看到. 但是，这图也告诉我们应该怎样调整：$\tau_0=x_{i_0}$是 σ 的一个顶点，$\tau_0<\tau_1$所以 $\tau_1=\langle x_{i_0},x_{i_1}\rangle$. 这样我们得到 σ 的一串顶点$\langle x_{i_0},x_{i_1},\cdots,x_{i_k}\rangle$($x_{i_j}$是 τ_j 的顶点，但不在 τ_{j-1}中). 令 τ 表示排列$(0,1,\cdots,k)\longrightarrow(i_0,i_1,\cdots,i_k)$，则 $D^n(\sigma)$中的有定向单形应该取 $\varepsilon(\tau)\langle b(\tau_0),b(\tau_1),\cdots,b(\tau_k)\rangle$，我们约定，$D^n(\sigma)$这样定向

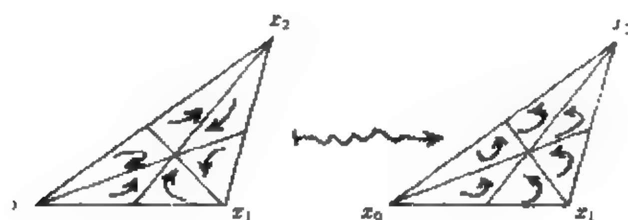


图 7—4

最后一个问题．如果要用单形作为基本的积分区域，就需要定义其体积．我们这里用“定义”二字，实有深意，即在指出体积的概念有一定的任意性．在 $\mathbb{R}^n$ 中通常都是给出一个内积，然后把“大小”和“体积”这两个问题一同处理．但从概念上说，这样作不太对．大小是一个拓扑上的事，是为了取极限之用（事实上这样说只是为了方便，大家知道，不用长度也能做拓扑），所以在积分中并非根本问题．但体积对于积分显然是根本的，它并不

是，事实上也不是一个度量概念.

令 V 为矢量空间. 假设已经取了一个固定的有序基底 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$. 如果 $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 是另一个有序的矢量组（不论是否线性无关），我们知道一定有一个常数 A 使得

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n = Ae_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n, \quad (*)$$

且 A 是以下展开式的系数矩阵 (A_{ij}) 的行列式

$$v_i = \sum_j A_{ij} e_j. \quad (**)$$

但它还有另外的解释，取 $n=2$ 的情况设 $v_1 = A_{11}e_1 + A_{12}e_2$，$v_2 = A_{21}e_1 + A_{22}e_2$，则

$$A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = A_{11}A_{22}$$

正是矢量 v_1，v_2 所成的平行四边形的面积. 所以我们一般地"定义" A 为平行多面体 $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 相对于有序基底 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的体积. 所以体积总是对一个固定的但是任意的基底来说的. 这就是我们上面提到的"一定的任意性".

描述体积还有另外一个方法. 令 V^* 是 V 的对偶空间，$(e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*)$ 是 V^* 中对偶于 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的有序基底. 再令 $\omega \in \Lambda^n(V^*)$ 是 n-形式：

$$\omega = e_1^* \wedge e_2^* \wedge \cdots \wedge e_n^*. \quad (***)$$

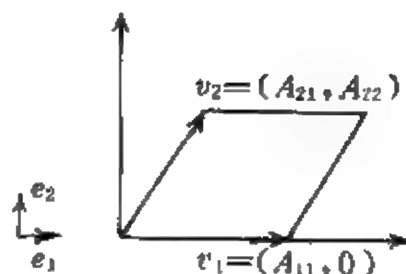


图 7—5

显然有

$$A = \langle \omega, v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \rangle. \quad (****)$$

反之，若 $\omega \in \Lambda^n(V^*)$ 是任一非0元，总能找到 V^* 的一个基底 $e^* = (e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*)$ 使 $(***)$ 成立. 令 $e = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 是 V 中对偶于 e^* 的基底，则由 $(***)$ 式算出 A 后，代入 $(*)$ 式总能使它成立. 一句话，对于定义体积，在 V 中取一个基底或在 $\Lambda^n(V^*)$ 中取一个非0元，作用是一样的. 所以 ω 叫做体积元素. 我们愿意采用这个说法，因为它完全适合我

们的程序．记得，一个流形 M 上若有一个处处不为0的大范围 n-形式 ω，它就是可定向的．对每一点 $P\in M$，$\omega(P)\in\Lambda^n(T_P^*(M))$定义了矢量空间 $T_P(M)$上一个体积元素，所以，我们将把 ω 叫做一个体积形式．我们将看到（至少在 M 是紧流形时）ω 确实会定义 M 的一个数值"体积"．

从平行四边形到单形是很容易的．令 $\sigma=\langle x_0, x_1, \cdots, x_k\rangle$ 是一个有序 k-单形，有棱矢量（棱就是单形的一维面）

$$v_i=x_i-x_0, \quad i=1, 2, \cdots, k,$$

而有序基底 $(v_1, v_2, \cdots, v_k)$ 生成一个矢量空间 W．若 ω 是 W 的体积元素，即 $\Lambda^k(W^*)$中的非0元，则定义 σ 相对于 ω 的有序体积为

$$\frac{1}{k!}\langle\omega, v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_k\rangle,$$

因子$\frac{1}{k!}$的出现显然来自三角形面积公式前的$\frac{1}{2!}$．

§3. 矢量空间中的积分

现在我们可以给出积分的定义了．令 $\sigma=\langle x_0, x_1, \cdots, x_k\rangle$ 是矢量空间 V 中的有序 k-单形．边缘矢量 v_i 之定义是

$$v_i=x_i-x_0, \quad i=1, 2, \cdots, k.$$

令 E 为 $(x_i)_{i=0}^k$张成的仿射空间，则 E 是一个 k 维流形．因此可以谈得上 E 上的形式．一点 $x\in E$ 处的切空间就是 $x\times W$，W 是 $(v_i)_{i=1}^k$张成的矢量空间．所以对 σ 上的任一形式 ω，$\omega(x)$都是 W 的交代重线性泛函，这里 $x\in\sigma$．

令 ω 是定义在 σ 上的一个 k-形式，我们定义

$$\omega*\sigma=\frac{1}{k!}\langle\omega(b(\sigma)), v_1\wedge\cdots\wedge v_k\rangle, \tag{1}$$

其中 $b(\sigma)=\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}x_i$ 是 σ 的重心．

对(1)式解释如下：若在 W 中给一个固定的体积元素 ω_0，我们把(1)式看作一个立体的 $k+1$ 维体积，这个立体以 E 中的 $v_1\wedge\cdots\wedge v_k$ 为底，"高" h 为

$$\omega(b(\sigma))=h\omega_0.$$

换言之，我们把变形式 ω 换成了一个"常值"形式 $\omega(b(\sigma_0))$，并且用平顶体积 (1) 逼近"真正的"体积．恰好和初等微积分的作法一样．下一步该做什么很清楚了．令 $D^n(\sigma)$ 为第 n 个重心重分，我们称

$$\Sigma^n(\omega)=\sum\{\omega*\sigma'\,|\,\sigma'\in D^n(\sigma)\}$$

为 ω 的第 n Riemann 和，这里 σ' 是 $D^n(\sigma)$ 中赋了前述定向的单形．最后定义 ω 在 σ 上的积分为

$$\int_\sigma\omega=\lim_{n\to\infty}\Sigma^n(\omega),\tag{2}$$

只要这个极限存在．读者当然熟悉围绕着这个定义的一些问题．例如，在 Riemann 和定义中没有什么东西有特殊的意义．可以用小块代替重心重分；可以用 σ 内任一点代替重心 $b(\sigma)$ 等等．但是我们知道，只要 ω 连续即可，而以后又总是作此假设，我们之所以这样定义，是为了尽快接近中心问题．

第一个中心问题是微积分的基本定理．我们已经看见了它在一维和二维时的形状（后者即 Green 定理）．一般地，它叫做 Stokes 定理．其最简单的形式如下：

Stokes 定理 令 $\sigma=\langle x_0,x_1,\cdots,x_k\rangle$ 是某矢量空间 V 中的一个有向 k-单形，ω 是定义在 σ 上的 C^1（即具有连续一阶偏导数）类 $(k-1)$-形式，则

$$\int_\sigma d\omega=\int_{\partial\sigma}\omega.$$

证 回想一下

$$\partial\sigma=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sigma_i,$$

$\sigma_i=\langle x_0,\cdots,\hat{x}_i,\cdots,x_k\rangle$，令 $b=b(\sigma)$，$b_i=b(\sigma_i)$ 各为 σ 和 σ_i 的重

心．虽然只定义了一个单形上一个形式的积分，但是很明显，用双线性扩充可以定义微分形式的线性组合在链上的积分．

由定义

$$k!\, d\omega * \sigma = \langle d\omega,\ v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \rangle (b),$$

故有

$$k!\, d\omega * \sigma = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} D_{v_i} \langle \omega, v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_k \rangle (b)$$
$$+ \text{其它项},$$

其中 D_{v_i} 是沿 v_i 的方向导数．“其它项”中包含诸如 $\langle \omega, v_1 \wedge \cdots \wedge [v_i, v_j] \wedge \cdots \wedge v_k \rangle$ 之类．因为 v_i 是 E 上的常值矢量场，所以 $[v_i, v_j]=0$ 对一切 i 和 j 成立．“其它项”实际上是没有的．

另一方面又有

$$(k-1)!\, \omega * \partial\sigma = (k-1)! \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \omega * \sigma_j.$$

若 $j>0$，$\sigma_j = \langle x_0, \cdots, \hat{x}_j, \cdots, x_k \rangle$，所以 σ_j 的棱矢量是 $\langle v_1, \cdots, \hat{v}_j, \cdots, v_k \rangle$，且

$$(k-1)!\, \omega * \sigma_j = \langle \omega(b_j), v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_j \wedge \cdots \wedge v_k \rangle.$$

但当 $j=0$ 时，$\sigma_j = \langle x_1, \cdots, x_k \rangle$，其棱矢量是 $w_i = x_i - x_1 = v_i - v_1$，$i=1, 2, \cdots, k$．所以有

$$w_2 \wedge w_3 \wedge \cdots \wedge w_k = (v_2 - v_1) \wedge (v_3 - v_1) \wedge \cdots \wedge (v_k - v_1)$$
$$= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_k,$$
$$(k-1)!\, \omega * \partial\sigma = \langle \omega(b_0),\ w_2 \wedge \cdots \wedge w_k \rangle$$
$$+ \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \langle \omega(b_i), v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_k \rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \langle \omega(b_0) - \omega(b_i), v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_k \rangle.$$

因为 ω 在 C^1 中，所以可以应用中值定理．这时要用到矢量

$$b_0 - b_i = \frac{1}{k}\Big[\sum_{l \neq 0} x_l - \sum_{m \neq i} x_m\Big] = \frac{1}{k}(x_i - x_0) = \frac{1}{k} v_i,$$

于是

$$k!\,\omega*\partial\sigma=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}D_{v_i}(\omega,v_1\wedge\cdots\wedge\hat{v}_i\wedge\cdots\wedge v_k)(c_i),\tag{2}$$

c_i 是线段$\overline{b_0b_i}$上的某一点.

比较（1）和（2）式即知，$\omega*\partial\sigma$ 和 $d\omega*\sigma$ 几乎相同，除了只在不同点 b 和 c_i 取值，当我们把 σ 分细时，这些点将会趋近，而由连续性知，其差很小. 利用一致连续性即知定理成立.

上面的证法的精华在于它说明了 Stokes 定理本质上是一个初等的组合学的事实，其余的只是逼近而已. 逼近之所以能起作用，理由和一维时一样，在于中值定理. 所以说 Stokes 定理实际上就是微积分的基本定理，这是完全正确的. 如果读者再愿意回去看看 Frobenius 定理，就会发现，其要点仍在中值定理（我们在那里用到某些函数为常值，因为其偏导数全为0，而这就是中值定理）. 所以尽管我们得出了许多神奇的东西，在微积分的基本概念上，从没有走得太远.

Stokes 定理可以推广到更一般的区域. 这里又有必要再作逼近. 对于我们，目前的形式足够用了. 最后，熟悉 Stokes 定理的古典讲法的人可以看到，我们的证明中从来未用逐次积分，即 Fubini 定理（见上一章关于 Green 定理的证明）.

从流形的观点看，积分的中心问题是不变性问题，即当变量变换时，积分是否改变. 变换变量即是做一个映射. 于是我们可以这样提出问题：设有 k-单形 $\sigma\subset V$，$\sigma'\subset V'$ 以及映射 $f:\sigma\longrightarrow\sigma'$. 若 ω 是定义在 σ' 上的一个 k-形式，我们可以用 f 把它拉回成为 σ 上 k-形式 $f^*\omega$（即是作变量变换）. 积分 $\int_\sigma f^*\omega$ 和 $\int_{\sigma'}\omega$ 比较如何？我们当然希望它们相等. 但是在最一般情况下，这是不可能的. 例如说，当 f 是常值映射时 $\int_\sigma f^*\omega=0$ 而 $\int_{\sigma'}\omega$ 不必是0，所以必须对 f 加上条件才能获得我们希望的结果. 例如说要求 f 是 σ 到 σ' 上的

微分同胚（顺便说一下，即令 ω 不是光滑的，f 必须是光滑的 $f^*\omega$ 才有意义，检查定义）. 有一个简单的情况使这个结论之成立是不足道的（至少是十分明显的），即当 f 为仿射映射：映射 $f:V\longrightarrow V'$ 称为仿射映射，如果有一个 $x_0'\in V'$ 以及一个线性映射 $\varphi:V\longrightarrow V'$，使 f 可以写成

$$f(x)=x_0'+\varphi(x),$$

即仿射映射就是线性映射继之以平移. 仿射映射保持仿射组合不变，即

$$f(\sum_i\lambda_i x_i)=\sum_i\lambda_i f(x_i),\text{若}\sum_i\lambda_i=1,$$

而且具有这个性质的映射一定是仿射映射（令 $x_0'=f(0)$，$\varphi(x)=f(x)-x_0'$）. 当且仅当 φ 是单全射时，f 也是. 特别是，仿射同构映 V 中的 k-单形为 V' 中的 k-单形. 若 V 与 V' 分别用有序基底 $e=(e_1,\cdots,e_n)$ 和 $e'=(e_1',\cdots,e_n')$ 来定向，我们可以比较 $(e_1',\cdots,e_n')$ 和 $(\varphi(e_1),\cdots,\varphi(e_n))$. 根据它们是相同或相反定向，我们说 f 保持或反转定向. 于是在这个简单的情况下有

引理 令 $\sigma=\langle x_0,x_1,\cdots,x_k\rangle\subset E$ 是一个 k-单形，$f:E\longrightarrow E$ 是一个仿射同构，而 $\sigma'=\langle f(x_0),f(x_1),\cdots,f(x_k)\rangle\subset E$. 若 ω 是 σ' 上的 k-形式，则

$$\int_\sigma f^*\omega=\int_{\sigma'}\omega.$$

证 $f^*\omega*\sigma=\dfrac{1}{k!}\langle\omega(f(b)),df(v_1)\wedge\cdots\wedge df(v_k)\rangle$，其中 b 是 σ 的重心，$v_i=x_i-x_0$，但对于仿射映射 f，$f(b)=b'$ 是 σ' 的重心，而

$$\begin{aligned}df(b)(v_i)&=\varphi(v_i)=\varphi(x_i-x_0)=\varphi(x_i)-\varphi(x_0)\\&=f(x_i)-f(x_0)=w_i\end{aligned}$$

是 σ' 的棱矢量，因此有

$$f^*\omega*\sigma=\omega*\sigma'.$$

应用此式于重心重分即得引理.

这个引理几乎是不足道的，因为仿射映射 f 在各点 x 的导数

都是同一个线性映射 φ. 一般说来，光滑映射 f 不是仿射的，所以这个引理无所用. 但是局部地看，f 几乎是仿射的. 引入导数其实讲的就是这回事. 令 x_0是一个定点，对 f 在 x_0点一定联系着仿射映射 $\hat{f}$, 就是 f 在 x_0附近的 Taylor 展式的前两项

$$\hat{f}(x) = f(x_0) + df(x_0, x - x_0).$$

选 x_0的一个邻域，$\hat{f}$ 在其中可以任意地接近 f. 准确说，有如下等式

$$f(x) - \hat{f}(x) = \int_0^1 (1 - t) df(x_0 + t(x - x_0), x - x_0) dt$$
$$= o(\|x - x_0\|),$$

ξ 是线段$\overline{x_0x}$中的某一点. 因为 $df(x, v)$对(x, v)是连续的，这样得到上述的结论. 以下很简单，我们把积分区域分成小片，在每个小片上把 f 换成它的仿射近似 $\hat{f}$ 再用上面的引理. 这样作会有一些误差，但是它会在求极限时消失. 这个计划的实现主要是一些技巧性的事，所以下面只说一个大概.

因为我们处理的是微分同胚，所以把积分域拓展成为 V 的开集更为方便（就是讨论反常积分）. 这样，我们讨论的微分形式之次数等于最高维数：ω 之次数$=V$ 之维数$=k$. 我们已经知道怎样在单形上求积分，下一步要在不互相重迭的单形的并集上求积分. 这个并集叫多面体或单纯复形. 其定义如下

定义 V 中的 k ($k=\dim V$) 维单纯复形或多面体，即 k-单形的有限并，这些单形中的任意两个相交在一个公共面上（空集可视为 (-1) 维面).

若 V 是有定向的，我们约定多面体中的每个单形都赋以 V 中的定向.

对于定义在多面体 V 上的 k-形式 ω, 我们定义

$$\int_D \omega = \sum_{s \in D} \int_s \omega.$$

因为一个多面体可以用不同的方式剖分成为单形的有限并，所以

上述定义是否适当还不清楚．但实际上没有问题．

现在令 $U\subset V$ 是一个开集，ω 是定义在 U 上的一个微分形式，考虑集合

$$\mathscr{P}(U)=\{D\mid D\text{ 是含于 }U\text{ 内的多面体}\}.$$

定义 $\mathscr{P}(U)$ 中一个次序 $D>Q$，即指 $D\supset Q$. 这样使 $\mathscr{P}(U)$ 成为一个偏序集，即是已知 $Q_1,Q_2\in\mathscr{P}(U)$，必可在 $\mathscr{P}(U)$ 中找到一个 D 使 $D\supset Q_1$，$D\supset Q_2$. 这并不是明显的，当然人们会取 $D=Q_1\cup Q_2$，但是 Q_1 和 Q_2 中的单形可能互相重叠，这是可以克服的．于是积分运算定义一个网(net)

$$\int:\mathscr{P}(U)\longrightarrow\mathbf{R},\quad D\longmapsto\int_D\omega.$$

如果这个网是收敛的，就说 ω 在 U 上可积，而其极限则称为 ω 在 U 上的积分

$$\int_U\omega=\lim_{D\in\mathscr{P}(U)}\left(\int_D\omega\right).$$

这个定义似乎有些奇特，但是除了在一个简单的情况之外，我们很少会用到它．令 ω 是定义在任一流形上的形式，于是说在一点 $P\in M$，$\omega(P)=0$ 是有意义的．因为 $\omega(P)$ 是一个矢量空间中的元，定义 ω 的支集(support)为以下的闭集

$$\mathrm{supp}(\omega)=\overline{\{P\mid\omega(P)\neq 0\}},$$

即 $P\notin\mathrm{supp}(\omega)$，当且仅当 P 有一个邻域 U 使 $\omega|_U=0$，若 $\mathrm{supp}(\omega)$ 是紧的，而 $U\supset\mathrm{supp}(\omega)$ 是任一开集，则显然 ω 在 U 上可积，只需要找一个多面体 D 使 $\mathrm{supp}(\omega)\subset D\subset U$，而当 $\mathrm{supp}(\omega)$ 为紧时，这总是办得到的（记住 D 是单形的有限并），于是

$$\int_U\omega=\int_D\omega.$$

对于具有紧支集的形式，在一个开集上求积分只不过是回避特定积分区域的一个方便之计．现在我们可以提出一般的定理．

定理　令 V，V' 为两个定向的矢量空间，U 和 U' 是 V 和 V' 中的开集

$$f: U \longrightarrow U'$$

是从 U 到 $f(U)=U'$ 上的保持定向的微分同胚. 若 ω 是 U' 上的一个 k-形式 ($k=\dim V=\dim V'$), 则当且仅当 $f^*\omega$ 在 U 上可积才有 ω 在 U' 上可积, 而且

$$\int_U f^*\omega = \int_{f(U)} \omega.$$

证 第一个情况, 设 ω 有紧支集 $K'=\text{supp}(\omega)\subset U'$, 则 $f^*\omega$ 也有紧支集 $K=f^{-1}(K')\subset U$. 注意, 当 f 是仿射映射时定理是成立的, 因为若 $D\subset U$ 是包含 K 的多面体, 则 $D'=f(D)$是 U' 包含 K' 的多面体, 且 D' 中的单形恰好是 D 中的单形在 f 下的象. 于是应用关于单形的仿射映射的引理即可得到定理的证明.

一般情况下, 对每一个 $P\in K$, 取 P 的一个邻域 $U_P\subset U$. 令 $\hat{f}_P$ 为 f 在 P 点处的仿射近似, 注意 $\hat{f}_P: V\longrightarrow V'$ 是一个保持定向的同构, 这是由于 $d\hat{f}_P=df_P$ 根据假设是非奇异的且保持定向. 对任意 $\varepsilon>0$, 取 U_P 充分小使 $|f-\hat{f}_P|<\frac{\varepsilon}{AB}$在 U_P 中一致成立 (不妨取 U_P 使 $\overline{U}_P$ 为紧的), $A=U_P$ 关于 V 中一个面定的体积元素 ω_0的总体积, $B=\sup\limits_{Q\in\overline{U}_P}|a(\theta)|$,这里 $\omega(Q)=a(Q)\omega_0$,用 U_P 覆盖 K,并选择一个有限子覆盖$(U_i=U_{P_i}$,于是$(U_i'=f(U_i))$是 K' 的一个有限覆盖. 令(φ_i)是从属于(U_i')的光滑的一的分割,定义 $\omega_i=\varphi_i\omega$ 则由定义 ω_i 是具有紧支集于 U_i' 中的 k-形式, $\omega=\sum\limits_i\omega_i$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_U f^*\omega - \int_{U'}\omega &= \sum_i\left(\int_U f^*\omega_i - \int_{U'}\omega_i\right)\\ &= \sum_i\left(\int_{U_i} f^*\omega_i - \int_{U_i}\hat{f}_i^*\omega_i\right)\\ &= \sum_i\int_{U_i}(f_i^*\omega_i - \hat{f}_i^*\omega_i),\end{aligned}$$

使得

$$\left|\int_U f^*\omega - \int_{U'=f(U)}\omega\right| < \varepsilon.$$

第二种情况，即一般情况. 令 ω 在 U' 上可积，则由网的收敛性，对任意 $\varepsilon>0$，一定有一个多面体 $D'\subset U'$ 使

$$\left|\int_{U'-D'}\omega\right|<\varepsilon.$$

令 $D=f^{-1}(D')$，取函数 φ，$0\leqslant\varphi\leqslant1$，$\varphi|_D=1$，$\varphi$ 在 U 外为0，记 $\varphi'=\varphi\circ f^{-1}$，则有

$$\left|\int_{U'}(\omega-\varphi'\omega)\right|=\left|\int_{U'-D'}(1-\varphi')\omega\right|$$

$$\leqslant\left|\int_{U'-D'}\omega\right|<\varepsilon.$$

另一方面，$\varphi'\omega$ 具有紧支集，于是应用上一个情况于 $f^*(\varphi'(\omega))=\varphi f^*\omega$，有

$$\int_U\varphi f^*\omega=\int_{U'}\varphi'\omega.$$

所以

$$\left|\int_{U'}\omega-\int_U\varphi f^*\omega\right|<\varepsilon.$$

再用以下引理即可得定理的证明.

引理 令 ω 为一开集 U 上的连续 k-形式，I 为一个数，如果对任意 $\varepsilon>0$都有一个多面体 $D\subset U$ 具有以下性质：对 U 上任意连续函数 φ，$0\leqslant\varphi\leqslant1$，$\varphi|_D=1$，$\mathrm{supp}(\varphi)\subset U$ 为紧，均有

$$\left|I-\int_U\varphi\omega\right|<\varepsilon$$

(这是有意义的，因为 $\varphi\omega$ 具有紧支集于 U 中). 这时 ω 在 U 上可积，而且 $\int_U\varphi=I$.

证 已给 $\varepsilon>0$，取 D 如上，我们想证明：Q 为多面体，

$$D\subset Q\subset U\Rightarrow\left|I-\int_Q\omega\right|<\varepsilon.$$

这样，再用网收敛性的定义即有 $I=\int_U\omega$，取一个稍大的多面体 $Q'\subset U$ 且 $Q\subset\mathrm{Int}Q'$，$|\mathrm{vol}Q'-\mathrm{vol}Q|<\varepsilon/(2N)$，$N=\sup\limits_{Q'}|\omega|$，取一个函数

φ 使 $\varphi|_Q=1$，$\mathrm{supp}(\varphi)\subset Q'$，且 $0\leqslant\varphi\leqslant 1$，于是

$$\left|\int_U \varphi\omega-\int_Q\omega\right|=\left|\int_{Q'}\varphi\omega-\int_Q\varphi\omega\right|$$

$$=\left|\int_{Q'-Q}\varphi\omega\right|\leqslant\int_{Q'-Q}|\omega|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是引理得证.

令 $\sigma=(x_0,\cdots,x_k)\subset V$ 是一个 k-单形. σ 有 $(k-1)$-维面 $\sigma_i,i=0,1,\cdots,k$，集 $\sigma-\bigcup_i\sigma_i$ 称为 σ 之内域. 记作 $\mathrm{Int}\sigma$ 或 σ°，用重心坐标表示为

$$\sigma^\circ=\{x=\sum_i\lambda_ix_i\,|\,\sum_i\lambda_i=1,\lambda_i>0,i=0,1,\cdots,k\}.$$

若 $k=\dim V$，σ°就是 σ 的拓扑内域，即含于 σ 内的最大开集(一般说来 σ°则是 σ 在包含 σ 的 k 维仿射空间的拓扑内域). 因此，如果 ω 是定义在 σ 上的 k-形式，它也是定义在 σ°上的，如果 ω 在 σ 上连续，ω 在 σ°上一定可积，而且

$$\int_{\sigma^\circ}\omega=\int_\sigma\omega,$$

理由如下. 因为 σ 为紧，ω 在 σ 上有界，若取重心重分并舍去紧接于 σ 的低维面的那些小 k-单形，就会得到一个多面体 $D\subset\sigma^\circ$. 如果这样分得充分细，使

$$\left|\int_D\omega-\int_\sigma\omega\right|$$

任意小，这正是网收敛性的定义.

最后一点说明，上面的变换定理就是积分的坐标变换定理. 因为设 V 与 V' 的坐标分别是 $x=(x_1,\cdots,x_k)$ 和 $y=(y_1,\cdots,y_k)$，我们有

$$\omega(y)=a(y)dy_1\wedge dy_2\wedge\cdots\wedge dy_k,$$

$$f^*\omega(x)=a(f(x))\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_k.$$

回顾起来，$\int_\sigma f^*\omega=\int_{f(\sigma)}\omega$ 的理由其实很简单. 左方是形式 ω 被 f^* 所改变，右方则是积分域被 f 所改变，它们互相抵消. 对于线性映

射 f，这种抵消是很清楚的．一旦取了极限，就看到，在一般情况下这两个改变也是会抵消的．

§4. 流形上的积分

由于有了变换公式，在流形 M 上很容易做积分．在 M 上当然不会有单形和多面体，但是我们确实有扭曲了的单形而可以通过拉回在其上做积分．这就需要光滑性．所以我们形式地定义了一个奇异（singular）k-单形 f 为一个光滑映射

$$f:\sigma\longrightarrow M,$$

$\sigma\subset V$ 是某个矢量空间 V 中的 k-单形，“奇异”的意思是：f 不一定是一对一的，也就是说，我们容许很厉害的扭曲．又 σ 不是一个流形，所以我们需要弄清光滑性何所指，σ 所在的仿射空间 E 是一个流形．说 f 在 σ 上光滑即指 f 可以拓展为一个光滑函数 $\tilde{f}$，而 $\tilde{f}$ 定义在一个包含 σ 的开集 $U\subset E$ 中．

若 ω 是 M 上一个 k-形式，或者定义在含 $\tilde{\sigma}=f(\sigma)$ 的集上，σ 有定向，则 ω 在 $\tilde{\sigma}$ 上的定向积分定义为

$$\int_{\tilde{\sigma}}\omega=\int_{\sigma}f^*\omega.$$

因为 f 是奇异单形定义中的一部分，写作 $\int_{\tilde{\sigma}}\omega$ 易有误会，因为这个积分并不只由 $\tilde{\sigma}$ 作为一个集合所能决定．这里又要用到变换定理．如果 $g:\tau\longrightarrow M$ 是由 $f:\sigma\longrightarrow M$ 改变参数（reparametrization）而得，即有一个保持定向的微分同胚 $\varphi:\sigma\longrightarrow\tau=\varphi(\sigma)$ 使 $g\circ\varphi=f$（于是作为一个点集 $\tilde{\sigma}=\tilde{\tau}=A$），则积分之值不变：$\int_{\tilde{\tau}}\omega=\int_{\tilde{\sigma}}\omega$．由于 $\sigma\subset V$ 并非开集而不能直接应用积分的变换定理，但是，φ 一定微分同胚地将 σ° 映为 τ°，所以

$$\int_{\sigma}f^*\omega=\int_{\sigma^\circ}f^*\omega=\int_{\sigma^\circ}\varphi^*g^*\omega$$

$$= \int_{\tau'} g^* \omega = \int_{\tau} g^* \omega.$$

这样，如果一个集 $A \subset M$ 可以剖分为奇异 k-单形，就可以在其上积分 ω. 这当然意味着我们在一个"奇异链" $\sum_i n_i \tilde{\sigma}_i$ 上积分 ω. 如果这个链能填满 M，就会得到大范围的积分 $\int_M \omega$，而当 $k < \dim M$ 时这是办不到的（有象 Peano 曲线这种东西可以填满一个圆盘. 但那是一个连续映射. 对于定义中所要求的光滑映射，Sard 定理指出这是不可能的）. 所以我们考虑 $k = \dim M$ 的情况. 假设 M 是紧的可定向的. 如2维球面和环面，很清楚地看到，它们可以用弯曲的三角形拼成. 这种"三角剖分"（triangulation）总是可能的. 这就是 Whitney 的光滑三角剖分定理. 以此为基础，任意一个最高次数的微分形式 ω 都可以在整个 M 上积分. 但是 Whitney 的这个定理是一个非常不简单的结果（见［3］第4章 § 8，124页），我们不希望积分的存在依赖于这样一个复杂的定理. 幸而还有另一种方法.

我们先指出适当的背景，因为积分总是有向的，显然我们应该设 M 可定向. 用一个固定的方法给欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 以定向（例如用标准的有序基底 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$，$e_i = (0, \cdots, \overset{i}{1}, 0, \cdots, 0)$）. 在取局部坐标 $\varphi: U \longrightarrow \mathbf{R}^n$ 时，只取保持定向的. 现在令 ω 是 M 上的 n-形式. 为了避免收敛性问题，假设 ω 有紧支集（例如当 M 本身为紧的时候总是这样），若 $\mathrm{supp}(\omega) \subset U$，定义

$$\int_M \omega = \int_{\mathbf{R}^n} (\varphi^{-1})^* \omega,$$

由于有变换公式，这个定义是适当的. 一般情况下，可以用有限覆盖 (U_i) 来覆盖 $\mathrm{supp}(\omega)$，取从属于 (U_i) 的一的分割 (α_i)，则 $\omega_i = \alpha_i \omega$ 有紧支集，$\mathrm{supp}(\omega_i) \subset U_i$ 而 $\omega = \sum \omega_i$，我们可以定义

$$\int_M \omega = \sum_i \int_M \omega_i,$$

这是适当定义的. 因为若 (V_j)，(β_j) 是另一个有限开覆盖和相应

的一的分割，则

$$\sum_i \int_M \omega_i = \sum_i \int_M \sum_j \beta_j \omega_i = \sum_{i,j} \int_M \alpha_i \beta_j \omega$$

$$= \sum_j \int_M \beta_j (\sum_i \alpha_i \omega) = \sum_j \int_M \beta_j \omega$$

$$= \sum_j \int_M \omega_j' . \quad (\omega_j' = \beta_j \omega)$$

实际上，如果我们有 M 的一个特定的三角剖分，用它来计算和讨论积分 $\int_M \omega$ 更方便. 然而，有一个内在的定义总是更好. 例如说，如果 M 是紧的可定向的，则它有一个定向微分形式 μ. 这是一个最高次数形式，而且因为 M 是紧的，所以 μ 是可积的. 我们定义 M 相对于 μ 的定向体积为 $\int_M \mu$，由于这个名词，μ 也叫体积元素.

低次形式的情况要小心一些. 若 ω 是 M 上的 k-形式，而 $N \subset M$ 是一个 k 维子流形（例如说是老意义下的子流形），我们想在 N 上积分 ω. 因为我们知道，由 Whitney 定理，N 可以用奇异 k-单形填满，所以可以做这个积分 $\int_N \omega$.

另一方面，我们可以通过包含映射 $i: N \longrightarrow M$ 把 ω 拉回到 N. 这样 $i^* \omega$ 是 N 上的最高次形式，从而有 $\int_N i^* \omega$，这两个积分是相同的，尽管 $\omega|N$ 和 $i^* \omega$ 是不同的形式：对子点 $P \in N$，$(\omega|N)(P)$ 是 $T_P(M)$ 上的交代 k 重线性泛函，而 $i^* \omega(P)$ 则是 $T_P(N)$ 上的交代 k 重线性泛函，且 $T_P(N)$ 只是 $T_P(M)$ 的一部分.

很清楚，用我们的积分定义，变换定理成为

定理 令 M, N 为定向流形，$f: M \longrightarrow N$ 是保持定向的微分同胚，$N = f(M)$，ω 是 N 上具有最高次数的形式，且有紧支集，则

$$\int_M f^* \omega = \int_N \omega.$$

若 f 反转定向，即 $df(P): T_P(M) \longrightarrow T_{f(P)}(N)$ 对一切 $P \in M$ 均反转定向，则上式要加一个负号.

Stokes 定理也有显然的推广，若 $f:\sigma \longrightarrow M$ 是一个奇异 k-单形，我们有它的 $(k-1)$ 维面也是奇异单形：$f_i=f|\sigma_i:\sigma_i \longrightarrow M$ 以及奇异链 $\partial f = \sum_i (-1)^i f_i$，用前面的记号，Stokes 定理成为

$$\int_{\hat{\sigma}} d\omega = \int_{\partial\hat{\sigma}} \omega,$$

ω 是一个 $(k-1)$ -形式.

我们想把 Stokes 定理推广成为较有用的形状，为此，引入有边流形的概念. 我们已经看见过这样的流形了. 例如 k-单形 σ 虽不是流形，但也差不太多. 它的内域 σ^o 完全是一个流形，而在"边缘" $\partial\sigma$ 上，就好象一个内部邻域被切了一半，因此，在它上面做微积分完全没有困难，但至今为止总是把它们当成例外（例如在变换公式中）. 现在我们把它正式地放进我们的图形之中.

令 $U \subset \mathbf{R}^n$ 是一个开集，我们知道一个映射 $f:U \longrightarrow \mathbf{R}^n$ 在 U 上光滑是什么意思. 如果 U 不一定是开集，我们说 f 在 U 上光滑如果 f 能拓展成一个定义在开集 V 上的光滑函数 $\tilde{f}$，而 $V \supset U$. 虽然这个定义可以适用于一切集 U，但是若 U 不是相当好，这定义可能没有意思. 所谓有意思是指：若 $x \in U$ 而我们想在 x_0 取 f 的导数（而不是可微性），显然需要用拓展 $\tilde{f}$. 于是就有了一个问题：这个导数是否与拓展的方式无关？很容易看到，下面的条件就可以保证无关：有一个基底 $(e_1, e_2, \cdots, e_n) \subset \mathbf{R}^n$ 使得对充分小的非负的 t，$x_0+te_i \in U$，因为这时 $\tilde{f}(x_0+te_i)-\tilde{f}(x_0)=f(x_0+te_i)-f(x_0)$ 只依赖于 f. 例如 $\mathbf{R}^n$ 中的 n-单形 σ 显然满足这个要求. 在我们的定义中，甚至可用更好的集. 一个超平面 $E \subset \mathbf{R}^n$ 就是一个 $n-1$ 维仿射子空间，它可以用一个线性函数 φ 描述，如 $E=\{x|\varphi(x)=c, c\in \mathbf{R}\}$. E 把 $\mathbf{R}^n$ 分成两个子空间 $E^+=\{x|\varphi(x)\geqslant c\}$ 和 $E^-=\{x|\varphi(x)\leqslant c\}$. E^+ 中的开集或者如图7－6之 I，或者如图7－6之 II，二者都是很好的集.

定义 一个拓扑空间 M 称为一个流形，如果每一点 $P\in M$ 都有一个局部坐标 $\varphi:U \longrightarrow \mathbf{R}^n$，$U$ 是 P 在 M 中的一个邻域，φ 是 U 到 $\varphi(U)\subset \mathbf{R}^n$ 上的同胚，$\varphi(U)$ 是某个半空间中的开集，M 称为光滑

的，如果它可以用光滑地连接起来（这句话现在有意义）的局部坐标覆盖.

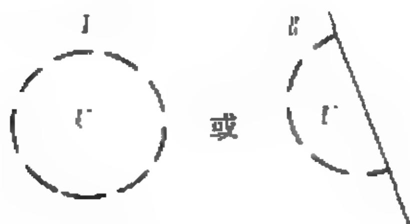


图 7—6

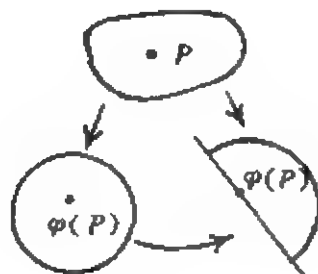


图 7—7

这样只不过把 Ⅱ 那种类型的集容许入我们的系统之中. 令 $P\in M$，(U,φ) 是一个局部坐标使 $\varphi(P)=E$（E 是定义半空间的超平面），从而(U,φ)是 Ⅱ 型的. 这时 P 不可能有 Ⅰ 型的局部坐标(V,ψ)，否则 $\varphi\circ\psi^{-1}$将把 $\mathbb{R}^n$ 的开集映为 $\mathbb{R}^n$ 中的非开集，而与区域不变性定理矛盾. 于是，M 中具有 Ⅱ 型局部坐标的点是适当定义的. 这种点的集称为 M 的边缘，记作 ∂M. 显然 ∂M 本身是一个$(n-1)$维流形. 我们以前所定义的流形只不过是 $\partial M=\varnothing$ 而已. 注意，对于任意流形 $\partial(\partial M)=\varnothing$.

因为导数仍有意义，所以可以做切丛 $T(M)$如前. 例如，若 $P\in\partial M$，$T_P(M)$仍是一个 n 维矢量空间. 若(U,φ)是一个局部坐标使 $\varphi(U)\subset\mathbb{R}^n$ 位于半空间 $x_n\geqslant 0$ 中，则 $T_P(M)$ 仍有基底 $\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ 如前，而切空间 $T_P(\partial M)$是 $T_P(M)$的$(n-1)$维子空间，其基底是$\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right)$，只要小心一点，前而对无边流形所作的一切都可以移到一般情况下来.

我们还需要对定向作一规定. 对于一点 $P\in\partial M$，我们总能找到一个局部坐标(U,φ)使 $\varphi(U\cap\partial M)=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_n=0\}\cap\varphi(U)$，而且 $\varphi(U)\subset\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_n\geqslant 0\}$，我们约定对 $P\in\partial M$ 总是使用这种类型的局部坐标. 方向$\frac{\partial}{\partial x_n}\in T_P(M)$称为内法线方向. 若$(V,\psi)$是

另一个这种类型的局部坐标，而 $y_n=y_n(x_1,\cdots,x_n)$，由定义，在 $\psi(V)$ 中 $y_n>0$. 于是 $\left.\frac{\partial y_n}{\partial x_n}\right|_p=\left.\frac{\partial y_n}{\partial x_n^+}\right|_p\geqslant 0$，因为 $y_n=y_n(x_1,\cdots,x_{n-1},0)=0$，所以

$$\det\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n}\\ 0 & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

$$=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_{n-1}}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\end{pmatrix}\cdot\frac{\partial y_n}{\partial x_n}.$$

所以 $\det\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\partial y_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}$ 和 $\det\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\end{pmatrix}$ 同号，现在我们设 M 的定向由 $\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_{n-1}},\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ 决定，因为 $(x_1,\cdots,x_{n-1})$ 是 ∂M 上的局部坐标，当在 M 上由局部坐标 x 保持定向地变到局部坐标 $y=(y_1,\cdots,y_n)$ 时，在 ∂M 上也由 $(x_1,\cdots,x_{n-1})$ 变到局部坐标 $(y_1,\cdots,y_{n-1})$，而由上所述，它也是保持定向的，所以 ∂M 也是可定向流形，而 $\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right)$ 是它的一个定向，称为 ∂M 上的诱导定向，由上述知道，这个概念是适当定义的.

现在可以陈述一般的 Stokes 定理.

Stokes 定理 在 M 是一个可定向 n 维有边流形，∂M 上赋有诱

导定向，ω 是 M 上一个有紧支集的$(n-1)$-形式，则

$$\int_M d\omega=\int_{\partial M}\omega.$$

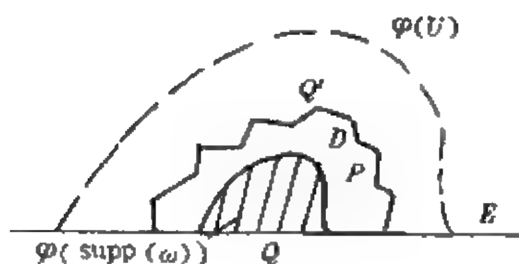


图 7—8

证　先设 $\varphi(\text{supp}(\omega))$ 包含在图7—8的局部坐标系中，用一个$(n-1)$维多面体 Q 覆盖 $\varphi(\text{supp}(\omega))\cap E$，细心地把它伸到半空间内成一个 n 维多面体 D. 若取 $\partial D=\sum\partial\sigma,\sigma\in D$，有许多 ∂D 彼此可以抵消，只余下 $\partial D=Q\cup Q'$，但是 $\varphi^{-1*}\omega|_{Q'}=0$，现在

$$\int_M d\omega=\int_D\varphi^{-1*}d\omega=\int_{\partial D}\varphi^{-1*}\omega=\int_Q\varphi^{-1*}\omega+\int_{Q'}\varphi^{-1*}\omega$$

$$=\int_Q\varphi^{-1*}\omega=\int_{\partial M}\omega.$$

一般情况可以通过一的分割得到.

§5. 应　用

现在我们可以继续讨论闭形式 ω 何时为恰当的问题. 这个问题已经形式地加以表述：定义 M 上的闭 k-形式的空间 $Z^k(M)$，恰当形式空间 $B^k(M)$以及 de Rham 群 $H^k(M)=Z^k(M)/B^k(M)$(虽然它是一个 $\mathbb{R}$ 上的矢量空间，但是通常却叫它是"群"). 我们的问题就在于获得关于 $H^k(M)$的知识，在最高维数即 $k=n=\dim M$ 的情况下，可以用积分来帮忙，若 M 没有边缘，则由 Stokes 定理有

$$\int_M d\omega=\int_{\partial M}\omega=0,$$

即 $\int$ 可以零化(annihilate)$B^n(M)$，所以积分定义一个线性映射

$$\int:H^n(M)\longrightarrow\mathbb{R}.$$

任意的 n-形式 ω 只要 $\int_M \omega \neq 0$ 都不可能是恰当的，当 M 为可定向时，这种 ω 确实存在. 例如对于任何体积元素 ω_0 都有 $\int_M \omega_0 > 0$，这由积分之定义可知. 因此对任何紧的可定向的 M，$H^n(M) \neq 0$.

一个更有用的应用，我们需要实地计算 $H^n(M)$ 的维数. 事实上我们想证明 $\dim H^n(M) = 1$，于是体积元素 ω_0 是 $H^n(M)$ 的基底. 注意，虽然任一个 n-形式 ω 均可写为 $\omega = a\omega_0$，但因 a 是函数，所以这还不能算数，我们需要一个常数 λ 和一个 $(n-1)$-形式 η 使 $\omega = \lambda\omega_0 + d\eta$.

虽然我们主要地感兴趣的是紧流形的情况，处理的技巧需要开集和一的分割. 这样，非紧的情况不能避免，所以最好把非紧的情况也包括进来. 在形式上，用 $A_c^k(M)$ 表示 M 上具有紧支集的 k-形式的空间. 由外微分运算 d 的定义，很清楚，$\mathrm{supp}(d\omega) \subset \mathrm{supp}(\omega)$，所以有链复形

$$0 \longrightarrow A_c^0(M) \xrightarrow{d} A_c^1(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} A_c^k(M)$$

$$\xrightarrow{d} A_c^{k+1}(M) \longrightarrow \cdots.$$

这个链复形的第 k 个上同调群记作 $H_c^k(M)$，称为具有紧支集的 de Rham 群.

我们将从一个简单说明开始，令 M 为一流形，$N \subset M$ 为一子流形. 若已知 N 上的一个光滑形式 ω，它总可以拓展为 M 上的形式 $\widetilde{\omega}$. 这是因为：对每一点 $P \in M$，都有一个局部坐标 (U, x) 使 $U \cap N$ 可以写成 $x_i = 0$ $(i > k)$. 在 $U \cap N$ 上，ω 例如可以写成

$$a(x_1, x_2, \cdots, x_k) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l} \quad (i_1 < i_2 < \cdots < i_l),$$

但是这个式子也定义 U 上的形式. 所以，我们可以用局部有限覆盖 (U_i) 去覆盖 U，在每个 U_i 上都有一个局部拓展 ω_i，令 (φ_i) 是从属于 (U_i) 的一的分割，并令

$$\widetilde{\omega} = \sum \varphi_i \omega_i.$$

当 $P\in N$ 时，有

$$\widetilde{\omega}(P)=\sum_i\varphi_i(P)\omega_i(P)=(\sum_i\varphi_i(P))\omega(P)=\omega(P).$$

其次考虑一些简单的特例，令 $\mathbb{R}^n$ 为 n 维欧儿里德空间，再令

$$B^n=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,|x|\leqslant 1\},$$

$$S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,|x|=1\}$$

为单位球和单位球面，B^n 是一个有边流形，$\partial B^n=S^{n-1}$. 我们有下面的定理.

拓展引理 （S^{n-1}）：若 ω 是 S^{n-1}上的一个闭 $(n-1)$-形式，且 $\int_{S^{n-1}}\omega=0$，则 ω 必为恰当的，即 $\dim H^{n-1}(S^{n-1})=1$.

（B^n）：若 ω 是 B^n 上的一个闭 n-形式，而且在 S^{n-1}附近是恰当的：$\omega=d\mu$，则为了使 $\mu|S^{n-1}$可以拓展到整个 B^n 上使 $\omega=d\mu$ 在 B^n 上成立；必要充分条件是

$$\int_{S^{n-1}}\mu=\int_{B^n}\omega.$$

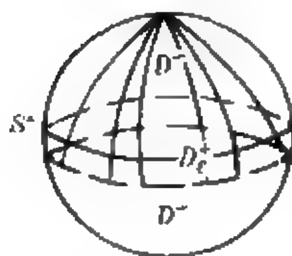


图 7-9

证 我们将归纳地证明

$$(B^n)\Rightarrow(S^n)\Rightarrow(B^{n+1}).$$

当 $n=0$时，引理成立.

（B^n）$\Rightarrow$（S^n），记 $S^n=D^+\cup D^-$为两个半球之并，显然可以在 D^+在 S^n 的邻域 D_ε^+ 上应用 Poincaré 引理，而知，一定有一个 D_ε^+ 上的 μ 使 $\omega=d\mu$，且

$$0=\int_{S^n}\omega=\int_{D^+}\omega-\int_{D^-}\omega=\int_{S^{n-1}}\mu-\int_D\omega,$$

对 D^-应用（B^n）即可拓展 μ. 证毕.

（S^n）$\Rightarrow$（B^{n+1}），由 Poincaré 引理，$\omega=d\xi$，ξ 是 B^{n+1}上的一个形式，当然 ξ 不一定是 μ 的拓展. 但是在 B^n 上有

$$\int_{S^n}(\xi-\mu)=\int_{\partial B^{n+1}}(\xi-\mu)=\int_{B^{n+1}}d\xi-\int_{\partial B^{n+1}}\mu$$

$$= \int_{S^{n-1}} \omega - \int_{S^n} \mu = 0.$$

故

$$d(\xi - \mu) = \omega - \omega = 0.$$

由 (S^n)，一定存在 S^n 上的某个形式 ν 使 $\xi-\mu=d\nu$，将 ν 拓展到 B^{n+1}（由前面的说明，这一定可以办到），并且将 ξ 改成 $\bar{\xi}=\xi+d\nu$，仍然有 $\omega=d\bar{\xi}$，但在 S^n 上有 $\bar{\xi}=\mu$.

由拓展引理还可得另一结果，若 ω 是 $\mathbf{R}^n$ 上一个具有紧支集的闭 n-形式，设 $\mathrm{supp}(\omega) \subset \mathrm{Int}B^n$，若 $\int_{\mathbf{R}^n} \omega = \int_{B^n} \omega = 0$，即在引理中可以取 $\mu=0$，则由 (B^n)，μ 可以拓展到 B^n 上，使得 $\omega=d\mu$ 在 B^n 上成立，但若令 μ 在 B^n 外恒为0即可将 μ 拓展到整个 $\mathbf{R}^n$ 上，这就给出 $\mathbf{R}^n$ 上的具有紧支集的形式 μ 使 $\omega=d\mu$，即证得

$$\int_{\mathbf{R}^n} \omega = 0 \Rightarrow [\omega] = 0, \quad 于 H_c^n(\mathbf{R}^n) 中,$$

即 $\dim H_c^n(\mathbf{R}^n)=1$.

我们可以证明一个一般的定理.

定理　令 M 是一个连通的 n 维流形，则

$$\dim H_c^n(M)=\begin{cases}1, & 若 M 是可定向的;\\ 0, & 若 M 是不可定向的.\end{cases}$$

证　先看可定向的情况，任取 n-形式 ω 使 $\mathrm{supp}(\omega)\subset U$ 为紧，而 U 微分同胚于 $\mathbf{R}^n$，且

$$\int_M \omega \neq 0.$$

我们想证明 $[\omega]\in H_c^n(M)$ 是一个基底，即任一其它的具有紧支集的 n-形式 ω' 必可写成

$$\omega' = c\omega + d\eta, \tag{*}$$

其中 c 为常数，η 是一个 $(n-1)$-形式. 用一的分割，可以写出

$$\omega' = \omega_1' + \omega_2' + \cdots + \omega_k',$$

其中 ω_i' 具有包含在 V_i 中的紧支集，V_i 微分同胚于 $\mathbf{R}^n$，显然我们只

需对各个 ω_i' 求 c_i 与 η_i 使(*)成立即可. 即我们可以假设 $\mathrm{supp}\omega'\subset V$,而 V 微分同胚于 $\mathbf{R}^n$.

因为 M 是连通的,故可找到开集的一个有限序列 $(U_i)_{i=0}^{l}$,各个 U_i 均微分同胚于 $\mathbf{R}^n$,且 $U_0=U, U_l=V, U_i\cap U_{i+1}\neq\varnothing, i=0,1,\cdots,l-1$,取某个 n-形式 ω_i 使 $\mathrm{supp}(\omega_i)\subset U_i\cap U_{i+1}$,而且 $\int_{U_i}\omega_i\neq 0$,因为在 $\mathbf{R}^n$ 上已得到了结果,所以有

$$\omega_0=c_0\omega+d\eta_0,$$

$$\omega_1=c_1\omega_0+d\eta_1,$$

$$\cdots$$

$$\omega_l=c_l\omega_{l-1}+d\eta_l.$$

上面的论证似乎没有用到可定向性,但事实上用了. 我们有一个类 $[\omega]$ 使 $\int_M\omega\neq 0$, $[\omega]$ 即是 $H_c^n(M)$ 的基底,如果没有可定性,就不能在 M 上积分. 从下面不可定向的情况的证明就可以最清楚地看到不可定向性的后果. 已给 M 上一个 n-形式 ω,我们想证明 $\omega=d\mu$,且 ω,μ 均有紧支集,利用一的分割,只需考虑 $\mathrm{supp}(\omega)\subseteq U, U\simeq\mathbf{R}^n$ 的情况. 若 $\int_U\omega=0$ (这个积分总是有意义的),由 $\mathbf{R}^n$ 上的结果即得所求,所以设 $\int_U\omega\neq 0$, 如果和前面一样作一串局部坐标 (U_i,φ_i),我们设 $\mathbf{R}^n$ 已按一定方式定向的,而且适当选定 U_i 的定向使 $\varphi_i:U_i\longrightarrow\mathbf{R}^n$ 为保持定向的,这里只对 U_i 选定向而不是对 M 选定向. 但若 M 不可定向,则至少有一串 (U_i) 使 $U_0=U_l$(最后一个)$=U$,而 $\varphi_{l-1}\circ\varphi_0^{-1}:\mathbf{R}^n\longrightarrow\mathbf{R}^n$ 逆转定向,取形式 ω_i 使 $\mathrm{supp}(\omega_i)\subset U_i\cap U_{i+1}$和前面一样,使 $\int_{U_i}\omega_i>0$和前面一样,有

$$\omega=c_0\omega_0+d\eta_0,$$

$$\omega_0=c_1\omega_1+d\eta_1,$$

$$\cdots$$

$$\omega_{l-1}=c_l\omega_l+d\eta_l.$$

但是在 $U_l=U$ 上我们取 $\omega_l=\omega$,则有

$$\int_{U_i}\omega_i=\int_{U_i\cap U_{i+1}}\omega_i=\int_{U_{i+1}}\omega_i>0,\quad i=0,1,\cdots,l-1.$$

对上面一串方程作积分得

$$c_i=\int_{U_i}\omega_{i-1}\Big/\int_{U_i}\omega_i>0,\quad i=1,\cdots,l-2,l-1.$$

另一方面，由于 $\varphi_{l-1}\circ\varphi_0^{-1}$ 逆转定向，所以

$$\int_{(U_0,\varphi_0)}\omega=-\int_{(U_l,\varphi_l)}\omega.$$

于是

$$\begin{aligned}0<\int_{U_{l-1}}\omega_{l-1}=c_l\int_{U_{l-1}}\omega=c_l\int_{U_l}\omega\\=-c_l\int_{U_0}\omega=-c_lc_0\int_{U_0}\omega_0.\end{aligned}$$

所以 $c_0c_l<0$. 又因为

$$\omega=c_0c_1\cdots c_l\omega+d\eta,$$

$c_0c_1\cdots c_l<0$，因 $\int_U\omega\neq0$，所以两边不可能相等，故必定有 $\int_U\omega=0$. 因此 ω 是恰当的.

现在我们可以给出一个很重要应用. 令 $f:M\longrightarrow N$ 是两个同维数的紧连通可定向流形间的光滑映射. 对于 N 上任一个 n-形式 ω，只要 $\int_N\omega\neq0$，我们都可以考虑数

$$\int_M f^*\omega\Big/\int_N\omega.$$

它与 ω 无关，因为换一个 ω' 必有 $\omega'=c\omega+d\eta$ 而在代入上式时，常数 c 会消去，所以我们得到映射 f 的一个不变量，称之为 f 的“映射度”(degree)，记作 $\deg(f)$. 由定义，这是一个实数. 然而，如果你不知道其前因后果，看到下面的定理会大吃一惊.

定理 $\deg(f)$ 是一个整数.

证 点 $Q\in N$ 称为 f 的“正则值”，如果 $P\in f^{-1}(Q)\Rightarrow df_P:T_P(M)\longrightarrow T_Q(N)$ 是非奇异的. 正则值总是存在的. 若 $P\in f^{-1}(Q)$，则由隐函数定理，f 是局部微分同胚. 因此 P 是孤立点，而 $f^{-1}(Q)\subset M$ 是有限集. 因为 M 和 N 是可定向的，$T_P(M)$ 和 $T_Q(N)$ 都有固

定定向. 现定义局部指数 $\varepsilon(f,P)=\pm1$ 视 df_P 为保持或逆转定向而定. 需证

$$\deg(f)=\sum_{P\in f^{-1}(Q)}\varepsilon(f,P).$$

为证此式只需取 Q 的一个邻域 V 以及互相分离的开集 U_P,每个 U_P 各是一个 $P\in f^{-1}(Q)$ 的邻域,而 $f:U_P\longrightarrow V$ 是微分同胚,在 N 上取一个 n-形式 ω 使 $\int_N\omega\neq0$ 且 $\mathrm{supp}(\omega)\subset V$,于是 $\mathrm{supp}(f^*\omega)\subset\bigcup U_P$ 而有

$$\int_M f^*\omega=\sum_P\int_{U_P}f^*\omega.$$

但由变换公式, $\int_{U_P}f^*\omega=\varepsilon(f,P)\int_V\omega$, 代入上式定理证毕.

上面的论证虽然简单, 但它显示了积分的局部和整体两个侧面的相互交织, 因此是很有启发性的. 我们以后还会看到这类推理.

更重要的问题在于 $\deg(f)$ 在变形之下是稳定的,确切些说,我们有

定理 同伦的映射具有相同的映射度.

证 回想在证明 Poincaré 引理时用过的算子 I(第六章),已知对于光滑同伦的映射 f 和 g, 以下的关系式成立

$$f^*\omega-g^*\omega=dI\omega+Id\omega.$$

在我们的情况下, 因 $d\omega=0$, 故由 Stokes 定理

$$\int_M f^*\omega=\int_M g^*\omega.$$

我们愿借此机会改正第二章中的一个错误. 当时我们想证明 S^2的切丛没有一个处处不为0的截口, 我们已经证明了对径映射 $A(x)=-x$ 与恒等映射 i 同伦,然后我们的推理是,$\det A=-1$,$\det I=1$,因为同伦不应改变行列式之值,所以发生矛盾. 但这是不对的,行列式只对线性映射有意义,但在同伦变化之中,映射不一定始终是线性的. 正确的推理应该是:$\deg A=-1$,$\deg I=1$,所以由上面的

定理得一矛盾. 很容易看到, 对于 $A(x)=-x, x\in S^n$, 每一点都是正则值, 且 $\varepsilon(f, x)=\det A=(-1)^{n+1}$. 所以 $\deg A=(-1)^{n+1}$, 而由此可知一切偶数维球面的切丛都没有处处非0的截口(奇数维球面则必有, 其中之一为

$$\xi(x_1,x_2,x_3,x_4,\cdots,x_{2n-1},x_{2n})=(-x_2,x_1,-x_4,x_3,\cdots,-x_{2n},x_{2n-1}).$$

当 M 和 N 是不可定向流形时, 仍有映射度的概念, 这时 $f^{-1}(Q)$ 中点之数目的 mod 2同余类只依赖于 f 的同伦类. 它称为 mod 2映射度.

映射度的概念对于读者不会是完全生疏的. 回想在复分析中讨论 Cauchy 积分公式时, 介绍过环绕数的概念如下: 令 γ: $[0,1]\longrightarrow \mathbf{C}$ 是一个闭曲线, $a\in\mathbf{C}$ 是 γ 之象以外的一点, 于是定义 γ 对于 a 的环绕数为 γ 上的线积分 (见 [1]):

$$n(\gamma,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{dz}{z-a},$$

我们将说明它是某个映射的映射度. 首先把 $f(z)dz$ 看成一个复值1-形式, $f(z)$是一个复函数, 即令 $f=u+iv, dz=dx+idy$, 且有

$$\begin{aligned}f(z)dz&=[u(x,y)+iv(x,y)](dx+idy)\\&=(udx-vdy)+i(vdx+udy).\end{aligned}$$

为简单起见, 令 $a=0, \varphi:\mathbf{C}-\{0\}\longrightarrow S^1$定义为

$$\varphi(z)=\frac{z}{|z|}.$$

因为 γ 为闭, 且 $a=0$不在 γ 上, 我们可以把它看成一个映射 $\gamma:S^1\longrightarrow\mathbf{C}-\{0\}$, 于是可得一个复合映射

$$f=\varphi\circ\gamma:S^1\longrightarrow S^1,$$

且 $n(\gamma,0)=\deg f$. 这是一个虽然简单却值得一做的练习, 如下:

取 S^1上的体积元素为 $\mu=udv-vdu$. 在标准参数 $u=\cos t, v=\sin t$ 之下, 有

$$\mu=(\cos^2t+\sin^2t)dt=dt.$$

在 μ 之下, S^1的体积是 $\int_{S^1}\mu=2\pi$, 我们的结果要靠计算 $\varphi^*\mu$. 记住

若 $g: M \longrightarrow N, \omega \in A^k(N) \cong A^k(T^*(N))$，则

$$g^*(d\omega) = d(g^*\omega).$$

所以

$$\varphi^* du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy,\ \varphi = u + \mathrm{i}v,$$

$$\varphi^* dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy.$$

所以

$$\begin{aligned}\varphi^*\mu &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{-xydx + x^2dy}{(x+y)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{y^2dx - xydy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{(x^2+y^2)(-ydx + xdy)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

另一方面

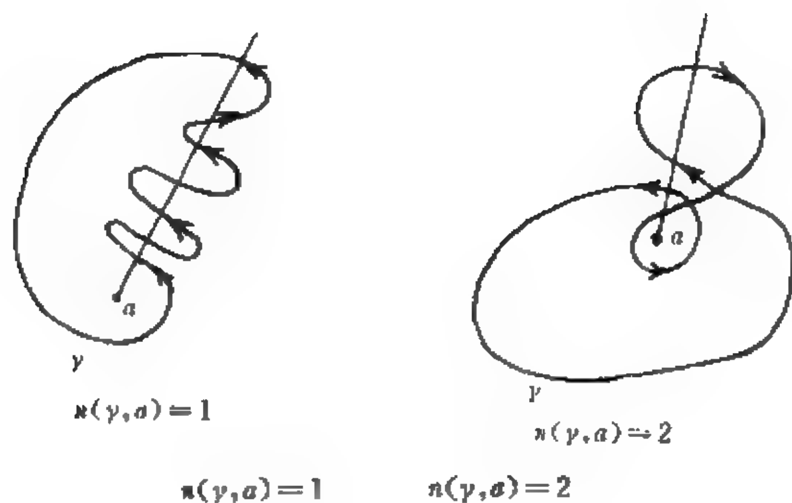
$$\begin{aligned}\frac{dz}{z} &= \frac{\bar{z}dz}{|z|^2} = \frac{(x-\mathrm{i}y)(dx+\mathrm{i}dy)}{x^2+y^2} \\ &= \frac{(xdx+ydy) + \mathrm{i}(xdy - ydx)}{x^2+y^2} \\ &= \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} + \mathrm{i}\varphi^*\mu = \omega + \mathrm{i}\varphi^*\mu.\end{aligned}$$

在 $\mathbf{C}-\{0\}$ 上，第一项是恰当的，事实上

$$\omega = d\left[\frac{1}{2}\lg(x^2+y^2)\right].$$

求积分后即得所证.

计算虽然简单，结果却很有用. 而为用正则值来计算环绕数十分容易，而用定义却不一定能做到这一点.



$n(\gamma,a)=1$　　　$n(\gamma,a)=2$

图　7—10

参考文献

[1]　Ahlfors, Lars. V., *Complex Analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1963. 中译本:《复分析》, 上海科学技术出版社.

[2]　Spivak, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. 1 Publish or Perish, Berkeley, 1979.

[3]　Whitney, H., *Geometric Integration Theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1957.

第八章　de Rham 定理

§1. 例和概述

上一章我们计算了最高维 $n=\dim M$ 的 de Rham 群 $H^n(M)$，发现结果相当广泛，即不太依赖于 M 的具体性质. $H^n(M)$的维数为 1 或为 0 视 M 可否定向而定. 后来看到它的应用也很广泛. 映射度的概念可应用于同维数流形之间的任意映射. 现在我们介绍一些确实依赖于流形 M 的具体性质的例.

取 $M=S^2$ 为二维球面，我们知道 $\dim H^2(S^2)=1$，下一个 de Rham 群是 $H^1(S^2)$，可证 $H^1(S^2)=\{0\}$. 令 D_+和 D_-表示 S^2 的两半球且 $D_+\cap D_-=$赤道$=S^1$. 令 ω 为 S^2 上的一个闭 1-形式，在 D_+和 D_-上应用 Poincaré 引理，得知在 D_+上有一个函数 f_+使 $\omega=df_+$于 D_+上，同样，$\omega=df_-$于 D_-上. 在 S^1 上则有 $d(f_+-f_-)=0$. 因为 S^1 是连通的，所以在 S^1 上 $f_+-f_-=c$，c 是 S^1 上的常数. 把 f_-换成 f_-+c，就得出一个整体地定义在 S^2 上的函数 f，使 $\omega=df$. 故 $H^1(S^2)=\{0\}$，事实上，用类似的证法可以归纳地算出

$$H^k(S^n)=\{0\},\quad 0<k<n.$$

另一个简单的二维流形是环面 $T^2=S^1\times S^1$，和 S^2 不同，有 $H^1(T^2)\neq\{0\}$. 令 $\pi_i: T^2\longrightarrow S^1$，$i=1, 2$ 为第一个或第二个投影，而 $j_i: S^1\longrightarrow T^2$，$i=1, 2$ 为第一个或第二个内射 (injection)，即 $j_1(x)=(x,1)$，$j_2(x)=(1,x)$，$x\in S^1$，注意，$\pi_1 j_1=\pi_2 j_2=$恒等映射，而 $\pi_1 j_2=\pi_2 j_1=$常值映射. 考虑

$$\alpha: H^1(S^1)\oplus H^1(S^1)\longrightarrow H^1(T^2),$$
$$(a, b)\longmapsto \pi_1^* a+\pi_2^* b,$$

$$\beta: H^1(T^2)\longrightarrow H^1(S^1)\oplus H^1(S^1),\quad \omega\longmapsto(j_1^*\omega, j_2^*\omega).$$

很容易看出 $\beta\circ\alpha=1$，于是 β 是映上的. 我们希望它是一对一的. 设 $\omega\in T^2$ 是一个 1-形式使得 $j_1^*\omega$ 和 $j_2^*\omega$ 都为恰当的，设

$$\rho: \mathbb{R}^2\longrightarrow T^2$$

是复迭投影映射，且

$$\widetilde{\omega}=\rho^*\omega$$

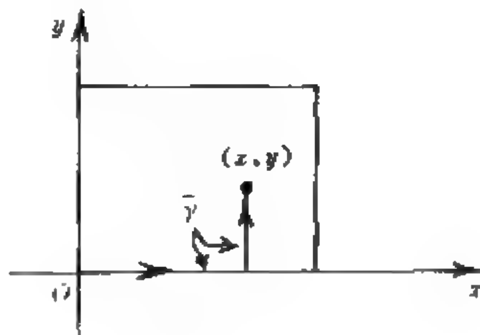


图 8—1

定义一个 $\mathbb{R}^2$ 上的函数 F 如下：对每一点 $(x,y)\in D$，设

$$F(x,y)=\int_{\widetilde{\gamma}}\widetilde{\omega},$$

我们必须证明 $F(0,y)=F(1,y)$，即

$$\int_0^1\widetilde{\omega}(x,0)dx=0.$$

这个积分恰恰是 $j_1^*\omega$ 在闭曲线 $j_1(S^1)$上的积分. 所以$\dim H^1(T^2)\geqslant 2$. 事实上，可以用同样的方法对n维环面$T^n=S^1\times\cdots\times S^1$计算 $H^k(T^n)$，我们有 1-形式 ω_1，ω_2，$\cdots$，ω_n，可以论断所有的单项式 $\omega_{i_1}\wedge\omega_{i_2}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_k}$，$i_1<i_2<\cdots<i_k$ 都是线性无关的，说明

$$\dim H^k(T^n)\geqslant\binom{n}{k},\quad 1\leqslant k\leqslant n$$

(在讲了以下各章以后，可以看到其实是等号成立).

上面的两个例中，我们都用了 Stokes 定理. 我们不仅要细心地处理被积分那些形式，而且还要细心地处理在其上求积分的那些链或循环. 在两个例中都有一个奇异循环 S^1. 在 S^2 的情况，$S^1=\partial D_+$使我们能断定：$H^1(S^2)$中只有零；在 T^2 的情况下，$S^1=j_1(S^1)$不是边缘这件事使我们肯定，$H^1(T^2)$中一定有些什么东西. 总而言之，Stokes 定理给我们的信息就是，M 的解析结构和几何结构，二者都对 $H^*(M)$有重要的影响.

研究循环是不是边缘，这是所谓的同调理论. 读者们可能已经熟悉同调理论的基本思想. 例如说，一般的解释是，T^2 中有非边缘的循环 S^1 说明 T^2 有"洞"，而 S^2 中的循环 S^1 都是边缘表明 S^2 没



图 8—2

有"洞". 既然可以从图中看到究竟有没有洞，这也就算不得什么深刻的观察. 然而应该看到，只是因为我们把 T^2 放在 $\mathbf{R}^3$ 中，T^2 上有洞才是显然的事. 如果我们不管周围的 $\mathbf{R}^3$，那么怎样才能区别 T^2 和 S^2 呢？即是说，我们需要一些内蕴的不变量，而不是嵌入的不变量. 所以，如果只看 T^2 本身而不问它是否包含在周围的空间之中，洞这个概念还有没有意义就不明显了. 但是循环和边缘的概念显然是内蕴的(intrinsic)即只依赖于流形本身，它可以用来对洞作内蕴的描述，这是 Poincaré 的深刻的见地. 在这方面，指出下面的事实是很有用的. 在几何和拓扑中把内蕴性质和嵌入性质区别开来是极其重要的想法. 例如曲率的概念. 如果看图，那么曲面是"弯曲的"，这是很"明白"的. 但是把弯曲设想为一个内蕴的概念，认为即使没有周围包含的空间（有了这样的空间才能走到曲面"外面"去看曲面）它仍然是有意义的，这就困难无比了. 这正是相对论里关于"弯曲"时空使人感到神秘的原因. Gauss 是第一个看出曲率的内蕴本性的人. 这是现代微分几何的起点. 无怪曲率、同调和积分都是彼此关联的. 这个领域中最著名的结果是 Gauss-Bonnet 公式，我们将在以后讨论它.

现在回到洞的问题. 让我们看一个比较复杂的例. 记住复射影空间 $\mathbf{CP}^n$ 是由 $\mathbf{C}^{n+1}-\{0\}$ 中引入一个等价关系～而得出的：$(z_0, z_1, \cdots, z_n) \sim (z_0', z_1', \cdots, z_n')$，如果有一个非 0 复数 λ 使得

$(z_0', z_1', \cdots, z_n') = \lambda(z_0, z_1, \cdots, z_n)$. $\mathbf{CP}^n$ 可以用 $n+1$ 个坐标邻域 (U_i, φ_i) 覆盖，这里 $U_i = \{[z_0, z_1, \cdots, z_n] \in \mathbf{CP}^n \mid z_i \neq 0\}$ 而

$$\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbf{C}^n,$$

$$[z_0, z_1, \cdots, z_n] \longmapsto (z_0/z_i, \cdots, \widehat{z_i/z_i}, \cdots, z_n/z_i).$$

这样，$\mathbf{CP}^n$ 成了一个紧的复流形(因此是可定向的)，其(实)维数是 $2n$. $\mathbf{CP}^n$ 有没有洞？因为谁也不曾在 $n \geqslant 2$ 时“看见”过 $\mathbf{CP}^n$($\mathbf{CP}^1 = S^2$ 就是二维球面)，这就是一个相当玄妙的问题. 但是，我们将要用积分在 $\mathbf{CP}^n$ 中找出一个二维的洞来. 我们已经提到过，在 $\mathbf{C}$ 上我们可以考虑复值函数和复值微分形式. 定义

$$dz = dx + \mathrm{i}dy, \quad d\bar{z} = dx - \mathrm{i}dy$$

以及算子

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

所以有

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}), \quad dy = \frac{1}{2\mathrm{i}}(dz - d\bar{z}),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right).$$

对于复值函数 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$，有

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)(dz + d\bar{z}) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)(dz - d\bar{z}) \\ &= \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}. \end{aligned}$$

采用这套算法的原因在于

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)(u + \mathrm{i}v) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right). \end{aligned}$$

其中包含了 Cauchy-Riemann 方程，所以一个光滑函数 f 是全纯的，当且仅当$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$. 因此，又定义

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z}dz, \quad \bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}.$$

而有 $d = \partial + \bar{\partial}$. 虽然看来我们偏好 $\bar{\partial}$，其实对于 ∂ 和 $\bar{\partial}$ 情况是一样的，$\frac{\partial f}{\partial z}=0$ 表示 $\bar{f}$ 是全纯的（$\overline{[\partial f/\partial z]}=[\partial \bar{f}/\partial \bar{z}]$），容易验证 $\partial\partial=\bar{\partial}\bar{\partial}=0$，$\partial\bar{\partial}=-\bar{\partial}\partial$. 显然我们可以把这些都推广到 $\mathbf{C}^n$，而令

$$\partial f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial z_i}dz_i, \quad \bar{\partial} f = \sum \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i}d\bar{z}_i.$$

现在我们已经可以在 $\mathbf{CP}^n$ 上给出2-形式 ω 了，应用局部坐标，在 U_i 上令 $\omega_j=z_j/z_i$，并定义

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\left(1 + \sum_{j\neq i}\omega_j\bar{\omega}_j\right). \qquad (*)$$

在 $U_i \cap U_k$ 中，有

$$\omega_j' = z_j/z_k = (z_i/z_k)\omega_j = Z\omega_j, \quad Z = z_i/z_k = \frac{1}{\omega_k}.$$

于是

$$\begin{aligned}1 + \sum_{j\neq k}\omega_j'\bar{\omega}_j' &= 1 + |Z|^2\sum_{j\neq k}\omega_j\bar{\omega}_j \\ &= 1 + |Z|^2\sum_{j\neq i}\omega_j\bar{\omega}_j + |Z|^2 - |\omega_k|^2|Z|^2 \\ &= |Z|^2\left(1 + \sum_{j\neq i}\omega_j\bar{\omega}_j\right).\end{aligned}$$

将此式代入（$*$）定义新的 ω，它与（$*$）式中的 ω 之差是

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log|Z|^2 &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\left[\frac{\bar{\partial}(Z\bar{Z})}{|Z|^2}\right] = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\left[\frac{Z(\bar{\partial}\bar{Z})}{|Z|^2}\right] \\ &= \frac{\sqrt{-1}\,|Z|^2[(\partial Z)\wedge(\bar{\partial}\bar{Z}) - (\partial Z)\wedge(\bar{\partial}\bar{Z})]}{2\pi|Z|^4} = 0.\end{aligned}$$

所以（$*$）式所定义的 ω 是 $\mathbf{CP}^n$ 上适当定义的整体2-形式，它是一个闭2-形式，我们想在 $\mathbf{CP}^n$ 中找一个2维子流形以在其上积分 ω，这个子流形是

$$\mathbf{CP}^1 = \{[z, z_1, 0, \cdots, 0] \in \mathbf{CP}^n\}.$$

$\mathbf{CP}^1$中几乎一切点除了$[0,1,0,\cdots,0]$以外都在$U_0=\mathbf{C}$中，所以在$\mathbf{CP}^1$上积分实际是在U_0上求反常积分．在U_0上有

$$\frac{2\pi}{\sqrt{-1}}\omega = \partial\bar{\partial}\log(1+|Z|^2) = \partial\left[\frac{Z(\overline{\partial Z})}{1+|Z|^2}\right]$$

$$= \frac{(1+|Z|^2)(\partial Z)\wedge(\overline{\partial Z}) + Z(\overline{\partial Z})\wedge\bar{Z}(\partial Z)}{(1+|Z|^2)^2}$$

$$= \frac{dz\wedge d\bar{z}}{(1+|Z|^2)^2} = \frac{-2\sqrt{-1}dx\wedge dy}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

应用极坐标有

$$\int_{\mathbf{CP}^1}\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{rdrd\theta}{(1+r^2)^2} = 1.$$

对于不知底细的读者，举这个例子实在有些唬人，公式(＊)从哪里来，没有一点线索．其实我们是有意这样做的，以便认清一件事：如果完全停留在流形上，就不容易找到洞．事实上，形式ω的出现有一些很自然的理由，它是$\mathbf{CP}^n$的典则线丛$\gamma(\mathbf{CP}^n)$的第一个陈氏类(Chern's class)，它是$\mathbf{CP}^n$的全纯联络(holomorphic connection)的曲率形式，它又是$\mathbf{CP}^n$上标准Kähler度量的Kähler形式．这个例说明$\mathbf{CP}^1\subset\mathbf{CP}^n$不可能是一个边缘，且$H^2(\mathbf{CP}^n)\neq\{0\}$，事实上，所有的外幂$\omega^k, k\leqslant n$都给出$H^{2k}(\mathbf{CP}^n)$中的非零元．于此相对偶，这意味着所有的子射影空间$\mathbf{CP}^k\subset\mathbf{CP}^n$都不是边缘，而和球面完全相反．

总结起来，我们希望在循环上积分闭形式．由于Stokes定理，只要这形式是恰当的，或此循环为边缘，这个问题都是很容易的．求商的形式步骤引出了de Rham群$H^*(M)$．我们要用同样的步骤对边缘求商，这就是同调．积分运算在二者之间建立了一个对偶关系，de Rham定理就是研究这种对偶性的．但在这之前还有一些形式上的东西要弄清楚．

还有另外一个de Rham群，即$H^0(M)$，计算起来十分容易．de

Rham 复形是这样开始的：

$$0 \longrightarrow A^0(M) \xrightarrow{d} A^1(M) \longrightarrow \cdots,$$

所以 $H^0(M) = \ker(A^0(M) \xrightarrow{d} A^1(M))$. 记住 $A^0(M)$正是 M 上的函数空间. 若 M 是连通的，$df=0$就表明 f 是一个常数，所以，对于连通流形 $H^0(M)\approx\mathbb{R}$.

形式可以用外积乘起来. 因为有

$$d(\omega \wedge \mu) = d\omega \wedge \mu + (-1)^k \omega \wedge d\mu$$

$(k=\deg\omega)$，所以在 $H^*(M)$中可以适当地定义$[\omega]\wedge[\mu]=[\omega\wedge\mu]$. 于是 $H^*(M)$成了 $\mathbb{R}$ 上的一个代数.

若 $f:M\longrightarrow N$ 是一个光滑映射，我们有拉回

$$f^*:A(N)\longrightarrow A(M), \quad \omega\longmapsto f^*\omega.$$

因为拉回和外微分可交换，故映射

$$H^*(N)\longrightarrow H^*(M), \quad [\omega]\longmapsto[f^*\omega]$$

是适当定义的. 它称为 f 的诱导同态，仍记作 f^*.

很容易检验函子性质（functorial property）：

1. 若 $f:M\longrightarrow N$ 是恒等映射，则 f^* 是恒等同态；

2. 已给 $f:M\longrightarrow N$ 和 $g:N\longrightarrow L$，必有$(gf)^*=f^*g^*$.

作为一个推论，微分同胚的流形有相同的 de Rham 群，这一事实我们已经暗地用过了. 但令人吃惊的是其逆不真. 因为我们知道 f^* 只依赖于 f 的同伦类，所以若有 $f:M\longrightarrow N$，$g:N\longrightarrow M$ 而且 $fg\sim1$，$gf\sim1$，$\sim$表示同伦. 我们仍将有 $f^*g^*=1$，$g^*f^*=1$，当这样的 f，g 存在时，我们说 M 和 N 有相同的伦型（homotopy type）. Poincaré 引理用的就是 $\mathbb{R}^n$ 中的星形开集与一点具有相同的伦型（这种拓扑空间称为可缩的（contractible））. 虽然它很简单，但由此可以得出有用的结论. 例如我们知道，紧的可定向（无边）流形是不可缩的，虽然这件事并不显然.

§ 2. 奇异同调和 de Rham 定理

虽然我们感兴趣的主要是流形，但对任意拓扑空间都可以作奇异同论（singular homology）. 所以在这一节里我们停留在一般拓扑空间的情况，令 X 为一拓扑空间，其中的奇异 k-单形就是一个连续映射 $f:\sigma\longrightarrow X$，$\sigma$ 是某个矢量空间的 k-单形. 因为从拓扑上看，所以我们可选一个特定的 k-单形作为 σ，通常规定取 $\mathbb{R}^k$ 中的"标准" k-单形 Δ_k，令 $(e_1, \cdots, e_k)$ 是 $\mathbb{R}^k$ 中的标准基底，Δ_k 就是由顶点 $\langle 0, e_1, e_2, \cdots, e_k\rangle$ 所张成的 k-单形

$$\Delta_k=\left\{(x_1,\cdots,x_k)\in\mathbb{R}^k \mid x_i\geqslant 0, \sum x_i\leqslant 1\right\}.$$

于是一个奇异 k-单形就是一连续映射

$$\sigma:\Delta_k\longrightarrow X.$$

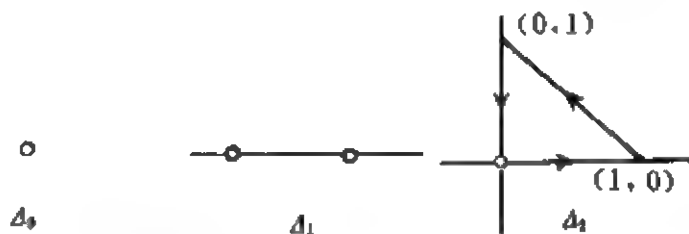


图 8—3

Δ_k 的第 i 个 $(k-1)$ 维面是 $\Delta_k^i=\langle 0, e_1, \cdots, \hat{e}_i, \cdots, e_k\rangle$，$i=0, 1, \cdots, k$，所以似乎 σ 也有第 i 个 $(k-1)$ 维面 $\sigma_i=\sigma|\Delta_k^i$，但是这并不完全对. 因为所有映射的域必须是标准单形，而 Δ_k^i 并不是. 我们只需要令 ε_i 是一个仿射映射而将 $\Delta_{k-1}=\langle 0, e_1, \cdots, e_{k-1}\rangle$ 映为 $\Delta_k^i=\langle 0, e_1, \cdots, \hat{e}_i, \cdots, e_k\rangle$，然后再定义 $\sigma_i=\sigma\circ\varepsilon_i$ 就解决问题了.

令 $S_k(X)$ 是由 X 中一切奇异 k-单形在 $\mathbb{R}$ 上生成的矢量空间. 定义线性映射

$$\partial:S_k(X)\longrightarrow S_{k-1}(X),\qquad \sigma\longmapsto\sum_{i=1}^{k}(-1)^i\sigma_i \qquad (*)$$

和第七章一样. $\{S_k(X),\partial\}$ 是一个复形，即 $\partial\partial=0$，这个复形的同调

称为 X 的系数在 $\mathbb{R}$ 中的奇异同调，记作 $H_k(X,\mathbb{R})$，如前，这意味着

$$Z_k(X) = \ker\{\partial: S_k(X) \longrightarrow S_{k-1}(X)\},$$

$$B_k(X) = \operatorname{Im}\{\partial: S_{k+1}(X) \longrightarrow S_k(X)\}$$

是"循环"和"边缘". $\partial\partial=0$表明 $B_k(X)\subset Z_k(X)$，所以可以作商：

$$H_k(X,\mathbb{R}) = Z_k(X)/B_k(X).$$

选 $\mathbb{R}$ 作系数域是因为这种同调将通过积分而与 de Rham 群相关. 关于边缘算子 ∂ 的公式（*）说明，对于任意有单位元的环 R 这个作法也是有意义的（这时 $S_k(X)$ 就成了由一切奇异 k-单形所生成的 R 上的自由模）. 选择"系数"的灵活性（de Rham 群就没有这种灵活性）是一个很有用的特点.

$S_k(X)$是一个没有构造的很"大"的模（一个"自由"模只不过就是一个基底）. $Z_k(X)$和 $B_k(X)$也是很"大"而且自由的（例如当 $\mathbb{R}$ 是任意主理想域时就是这样）. 奇怪的是，其商应该是什么都可能，怎么能算得出来. 事实真象是我们是事先有许多具体事实之后才这样讲的. 奇异同调是最容易讲的，而且我们已经知道它会是很有用的.

de Rham 群 $H^k(M)$是 $H_k(M)$的对偶. 可以做一个内在的对偶群如下：令 $S^k(X)$是 $S_k(X)$的对偶空间（当 R 只是一个具有单位元的环时，它就是对偶模 $\operatorname{Hom}(S_k(X),R)$）. 这是一个"上链"(cochain)空间，注意一个上链 $\varphi\in S^k(X)$就是一个映奇异单形 σ 为 $\varphi(\sigma)\in R$ 的任意线性映射（就只是线性映射，没有连续性或其它条件）. 可以用对偶性来定义一个"上边缘"算子 $\delta: S^k(X)\longrightarrow S^{k+1}(X), \varphi\longmapsto\delta\varphi$ 如下：

$$\delta\varphi(\sigma) = \varphi(\partial\sigma),$$

其中 $\sigma\in S^{k+1}(X)$是一个奇异$(k+1)$-单形，且有 $\delta\delta=0$，于是有复形 $\{S^k(X);\delta\}$（δ 和 d 都使 $S^k(X)$的指标升高）. 这样得出的同调称为系数在 R 中的第 k 个奇异上同调，记作 $H^k(X,R)$.

同调和上同调都是"函子". 若 $f: X \longrightarrow Y$ 是一连续映射，它必诱导出一个线性映射

$$f_{\#}: S_k(X) \longrightarrow S_k(Y), \quad \sigma \longmapsto f \circ \sigma.$$

再由对偶性还诱导出另外一个线性映射

$$f^{\#}: S^k(Y) \longrightarrow S^k(X), \quad \varphi \longmapsto f^{\#}(\varphi),$$

$$f^{\#}(\varphi)\sigma = \varphi(f_{\#}\sigma) = \varphi(f \circ \sigma).$$

很容易验证 $\partial f_{\#} = f_{\#}\partial$，所以也有 $\delta f^{\#} = f^{\#}\delta$. 这些关系又诱导出新的线性映射

$$f_*: H_k(X, R) \longrightarrow H_k(Y, R),$$

$$f^*: H^k(Y, R) \longrightarrow H^k(X, R),$$

且有

$$f_*[\sigma] = [f_{\#}(\sigma)], \quad f^*[\varphi] = [f^{\#}(\varphi)].$$

于是函子性质是

(1) 若 $f = \mathrm{id}: X \longrightarrow X$，则 $f_* = f^* = \mathrm{id}$；

(2) 若 $f: X \longrightarrow Y$，$g: Y \longrightarrow Z$，则

$$(gf)_* = g_* \circ f_*, \quad (gf)^* = f^* \circ g^*.$$

注意在对偶映射情况下，映射方向和次序都有变化. 这些性态把 H_* 规定为“协变函子”(covariant functor)，H^* 为逆变函子 (contravariant functor). 函子性质蕴涵了 H_* 和 H^* 都是拓扑不变量，它是创立奇异同调理论的主要因素.

现在我们可以把 de Rham 群 $H^*(M)$ 和奇异同调连接起来了，但是还有一个技术性的问题. 令 M 为一光滑流形，我们知道，要作积分就要用光滑奇异单形. 这就产生了 $\{S_k(X), \partial\}$ 的一个子复形 $\{\widetilde{S}_k(X), \partial\}$，但是它们的同调是一样的. 换句话说，在计算 H_* 和 H^* 时，可以只用光滑奇异单形. 由此，我们可以定义一个映射

$$\int: A^k(M) \longrightarrow S^k(M), \quad \omega \longmapsto \widetilde{\omega},$$

而对光滑奇异 k-单形 $\sigma: \Delta_k \longrightarrow M$，有 $\widetilde{\omega}(\sigma) = \int_\sigma \omega$. 因

$$(\delta\widetilde{\omega})(\sigma) = \widetilde{\omega}(\partial\sigma) = \int_{\partial\sigma} \omega = \int_\sigma d\omega \quad \text{(Stokes 定理)}$$

$$= (\widetilde{d\omega})(\sigma),$$

即 $\delta\circ\int=\int\circ d$，于是$\int$诱导出 de Rham 群和奇异上同调群之间的一个同态

$$\int: H^*(M)\longrightarrow H^*(M,\mathbf{R}).$$

而我们有

de Rham 定理 $\int: H^*(M)\longrightarrow H^*(M,\mathbf{R})$ 是一个自然的同构.

"自然"二字的意思是：记住 $H^*(M)$和 $H^*(M,\mathbf{R})$都是"函子"，除了群以外，对于光滑映射 $f: M\longrightarrow N$ 又有诱导同态 f^*. 所谓自然同构或者说函子等价必保持诱导同态，也就是使下图成为可交换的.

$$\begin{array}{ccc} H^*(M) & \xrightarrow{\int} & H^*(M,\mathbf{R}) \\ f^*\uparrow & & \uparrow f^* \\ H^*(N) & \xrightarrow{\int} & H^*(N,\mathbf{R}) \end{array}$$

de Rham 定理的证明要涉及许多技术上的细节. 所以先解释一下总的"战略". 在 de Rham 定理的表述中采用了奇异上同调，这是因为，从它的定义清楚地看到，它是一个拓扑不变量，从而指明了 de Rham 群的拓扑不变性. 这正是 de Rham 定理的主要之点. 然而，奇异理论几乎无法用. 所以在证明中，要将它换成另一种同调，所谓单纯形上同调 (simplicial cohomology). 它使得我们能做出积分映射的逆. 然而单纯形理论的使用有一个前提，即光滑流形必可光滑地三角剖分. 这是一个深刻而又困难的拓扑定理，我们现在不能深入. 还有另外一个途径可以避免三角剖分. 这就是所谓层 (sheaf) 论的方法，这是一个比较"现代"的理论，它起源于不同的问题. 它的部分想法如下：在同调理论发展中，有不同的作法来处理不同的问题 (下一章里会看到其中的一些). 后来发现，它们虽然各有自己的特殊性质，却有一些形式上共同的性质. 在数学上，一旦出现这种情况，人们总是会想，这些不同的作法

会不会其实只是一个东西，而用这些形式性质将它公理化. 不久就找到了普遍适用的作法，称为层的上同调，de Rham 群和奇异群都是层的上同调从而是相同的. 只从这个简短的说明还是没有具体的启发. 所以现在我们还是按照“传统的”办法，尽管这样做必须承认三角剖分定理. 再说，复形的几何学是许多拓扑问题的中心基本思想，所以我们讲它并不只是为了 de Rham 定理.

§ 3. 单纯形同调

上一章我们已经引进了多面体的概念. 它是某个单形的矢量空间 V 的一个子集，它是由单形按一定规则放在一起而成；这些单形只能在公共面上相交. 在讲积分时，这些单形要有相同的维数. 现在我们去掉这个限制. 这种推广的多面体叫做单纯复形. 其形式的定义是

定义 矢量空间 V 中的单纯复形 K 就是 V 中一族单形，而且

(1) 若 $\sigma\in K$，则 σ 的一切面也在 K 中.

(2) σ，$\tau\in K\Rightarrow\sigma\cap\tau$ 是 σ 与 τ 的公共面（空集看作任一单形的1维面）.

条件(2)显然是主要之点，条件（1）就点集面言是多余的，σ 的面究竟是 σ 的一个子集. 但是注意，我们并没有说 $\sigma\subset K$ 而是说 $\sigma\in K$，即我们把 K 看成一个“组合的”对象（就是问有多少单形属于 K），而不是看作 V 中的点集. 这个微妙之处的道理马上就要讲. 但不论如何，K 中的单形确实构成一个 V 的子集 $\bigcup\limits_{\sigma\in K}\sigma$ 记作 $|K|$ 而与“抽象”复形 K 有所区分.

记住，σ 的定向就是其顶点的一个排列次序，其记法是将此次序明白地写出来：$\sigma=\langle v_0, v_1, \cdots, v_k\rangle$，令 $F(K)$ 是 K 中所有定向单形生成的自由模（基域是任意固定的 R）. 在 $F(K)$ 中令 I 是所有以下形状的元素生成的子模

$$\langle v_0,v_1,\cdots,v_k\rangle-\operatorname{sign}(\varepsilon)\langle v_{\varepsilon(0)},v_{\varepsilon(1)},\cdots,v_{\varepsilon(k)}\rangle,$$

这里$\sigma=\langle v_0,v_1,\cdots,v_k\rangle$，$\varepsilon$是$(0,1,\cdots,k)$的一个排列，商$C(K)=F(K)/I$称为$K$的定向链群，对于$\sigma=\langle v_0,v_1,\cdots,v_k\rangle\in K$，用$[\sigma]=[v_0,v_1,\cdots,v_k]$记它在$C(K)$中所属的类，于是有

$$[v_0,v_1,\cdots,v_k]=\operatorname{sign}(\varepsilon)[v_{\varepsilon(0)},v_{\varepsilon(1)},\cdots,v_{\varepsilon(k)}].$$

容易看到$C(K)$仍是一个自由模，对每个$\sigma\in K$取一个固定的次序$\sigma=\langle v_0,\cdots,v_k\rangle$（这是对每个$\sigma\in K$分别任意取的，没有相容性的要求. 例如，可以把$K$中一切顶点按一定次序编号，然后对每个$\sigma$按顶点序号上升来排列），于是$\{[v_0,v_1,\cdots,v_k]\mid\langle v_0,v_1,\cdots,v_k\rangle\in K\}$成为$C(K)$的一个基底. 由此，定义边缘算子$\partial$如下：

$$\partial:C_k(K)\longrightarrow C_{k-1}(K),$$

$$[v_0,v_1,\cdots,v_k]\longmapsto\sum_{i=0}^{k}(-1)^i[v_0,v_1,\cdots,\hat{v}_i,\cdots,v_k]$$

（条件(1)就用在这里），我们在第七章里已经看到$(C(K),\partial)$是个复形，即$\partial\circ\partial=0$. 于是就有K的系数在R中的同调$H_*(K,R)$和上同调$H^*(K,R)$，它们称为复形K的单纯形同调和上同调，如果系数域R是明白的或固定的，我们就在以上的记号中略去它.

上面的作法对任意复形K都是有意义的. 实际上，对任意集，只要适合(1)，它都是有意义的. 所以问题在于$H_*(K)$和$H^*(K)$与空间$|K|$有什么关系. 我们在这个问题得到解决以前，要区别K和$|K|$. 事实上，我们希望$H_*(K)$只依赖于$|K|$. 这就是单纯形理论的中心的不变性问题. 回答这个问题的方法之一如下：若$[\sigma]=[v_0,v_1,\cdots,v_k]$是一个有向单形，可以定义一个奇异单形$\bar{\sigma}:\Delta_k\longrightarrow|K|$，即将顶点$(0,e_1,\cdots,e_k)$与$(v_0,v_1,\cdots,v_k)$顺序相配，这样就定义了一个同态

$$j:C(K)\longrightarrow S(|K|),\quad \sigma\longmapsto\bar{\sigma}.$$

由定义立即知道j是一个链映射，即$j\circ\partial=\partial\circ j$，因此$j$又诱导出一个同态（仍记作$j$）

$$j:H_*(K)\longrightarrow H_*(|K|).$$

j可能是同构吗（但是请注意，希望j在链群上也成同构是办不到

的)?事实上，奇异理论的建立，恰好是为了证明这件事的（但是需要先用重分方法来建立 $H_*(K)$ 的拓扑不变性，见下一章）. 暂时先承认这一点，则单纯形理论提供了一个计算几乎无法计算出的奇异群的有效办法，因为现在我们对付的是一个小得多的群 $C(K)$，所以在简单的情况下，直接的计算是可能的. 下面是一些众所周知的例子.

1. 二维球面 S^2

谁都可以看出，S^2 可以剖分为八个球面三角形. 直接观察就可以看清楚，要想得到一个2-循环，唯一的办法是每一片都用相同多的次数，即 $Z_2(K)=Z$（系数域是整数群 Z）. 因为 $C_3(K)=0$，所以 $B_2(K)=0$，从而 $H_2(K)=Z_2(K)/B_2(K)=Z$ 这是一个普遍的现象，任意紧的可定向 n 维流形都有这样一个 n-循环，即用其三角剖分中的各个单形

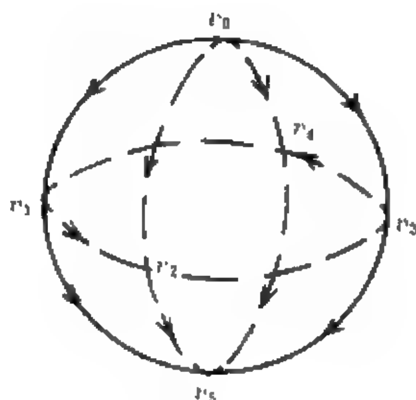


图 8—4

一次组成（可定向性保证了它是循环）. 这个循环所属的同调类称为"基本类"，而且我们有 $H_n(M,Z)=Z$，并由基本类 $[M]$ 生成. 与此类似，$H^n(M,Z)=Z$，而且是由基本上同调类 U_M 生成，U_M 的定义是 $U_M([M])=1$，这出现了一件有趣的事. 若 $f:M\longrightarrow N$ 是一个映射，则诱导同态 $f^*:H^n(N,Z)\longrightarrow H^n(M,Z)$ 完全由方程

$$f^*(U_N)=aU_M$$

决定，a 是一个整数. 很清楚，de Rham 定理确认 a 正是上一章所定义的 f 的映射度. 虽然我们已经"证明"过 $\deg(f)$ 必须是一个整数，直到现在我们才真正懂得为什么它一定自然地成为一个整数.

2. 射影平面 P^2

射影平面可以看成一个圆盘，而边缘的圆周上的对径点 (antipedal point) 要看成同一点. 在物理上这样做是不可能的，但是下

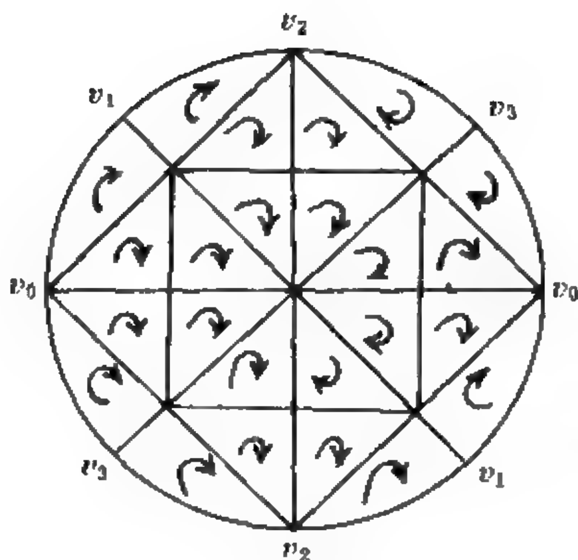


图 8—5

面的图形给出了它的一个三角剖分.

当作循环时可以从任一块开始，再加上邻接的块并且使其公共边缘可以消去.这样作下去就会看到，每一小块都要用到才能成一个边缘. 但若把每个小块都合并起来并称所得的链为 C，就会发现 $\partial C=2d\neq 0$，d 是一个小循环 $d=[v_0,v_1]+[v_1,v_2]+[v_2,v_3]+[v_3,v_0]$（就是半个圆周，由于对径点视为相同，也就是一个圆周）. 这意味着 $H_2(K,Z)=\{0\}$，但若不用整数群 Z，面用 mod 2的整数群 Z_2为系数域，则因为在 Z_2中$2=0$，所以 C 成了一个循环，而有 $H_2(K,Z_2)=Z_2$. 这是一个一般的现象. 对一个紧流形，以 Z_2为系数的最高维同调群 $H_n(M,Z)$一定就是 Z_2，而 $H_n(M,Z)$是 Z 或者是$\{0\}$视 M 可否定向而定. 这说明为什么一般只能定义 mod 2映射度.

再计算下去，d 是一个1-循环但不是边缘，所以$[d]$不是 $H_1(K,Z)$中的0元. 但$2d=\partial C$ 即$2[d]=0$，于是 $H_1(K,Z)$中有挠元素(torsion element)，事实上 $H_1(K,Z)=Z_2$且由$[d]$生成. 这说明能灵活选取系数群的用处，即可以用来侦察出挠元素. 总之，选择系数群的灵活性大大地增加了同调理论的效用. 例如，因为± 1在 Z_2中是没有区别的，所以选用 Z_2相当于忽略定向. 这使我们得到一些关于 H_2的知识.

现在我们转而注意由复形 K 所得的空间$|K|$的拓扑. 为简单起见，设 K 是有限的，$|K|$是一个很“好”的空间，这不仅是由于 K 由一些小块组成，这些小块在拓扑上是很简单的，更由于一个单形 $\sigma\in K$ 是一个拓扑(或 PL)流形，且几乎是一个矢量空间. 于是可以

在其上作线性的或仿射的考查. 由于$|K|$是这种小块很巧妙地拼起来的，一旦能在这些小块上协调地应用一种作法，就得到整体的结果. 例如有一件简单但是有用的事实，映射$f:|K|\longrightarrow X$是连续的，当且仅当$f|\sigma:\sigma\longrightarrow X$对一切$\sigma$都是连续的，而且在不同的$\sigma$之交上，$f$之值相等(这里需要$K$为有限，一般情况下它是不对的). 更一般地说，我们可以"逐块"地做. 作法如下：令$\sigma=\langle v_0,v_1,\cdots,v_k\rangle$为$K$中一个单形，$x\in\sigma$为一点，于是$x$可以唯一地写成

$$x=\sum_i\lambda_i v_i,\quad \lambda_i\geqslant 0,\quad \sum\lambda_i=1,$$

λ_i是x的重心坐标. 形式地说，我们说定义了一些函数$b_i:\sigma\longrightarrow\mathbf{R}$为$b_i(x)=\lambda_i$. 现在将$K$中一切顶点编排为$\{v_i\}$，$v_i\in K$，定义一个重心函数$b_i$于整个$|K|$上，$b_i:|K|\longrightarrow\mathbf{R}$为

$$b_i(x)=\begin{cases}(b_i|\sigma)(x), & \text{若 } x\in\sigma, v_i \text{ 是 } \sigma \text{ 的一个顶点；}\\ 0, & \text{其它情况，}\end{cases}$$

它是适当定义的. 因为若$x\in\sigma\cap\tau$，简v_i是σ与τ的公共顶点之一，则$\sigma\cap\tau=\mu$是σ与τ的含v_i的公共面，于是

$$(b_i|\sigma)(x)=(b_i|\tau)(x)=(b_i|\mu)(x).$$

函数b_i是连续的，因为它显然在每个$\sigma\in K$ (不论包含v_i与否) 上都连续，而且在不同σ的交上取相同值. 更加重要的是，b_i是逐块仿射的，即在每个单形$\sigma\in K$上是仿射的. 因此是逐块光滑的，即在每个单形$\sigma\in K$上是光滑的. 由定义，就意味着在含σ的仿射子空间上的σ的某个邻域中是光滑的. 很容易检验

1) $b_i(x)\geqslant 0$，$\sum b_i(x)=1$对于$x\in|K|$；

2) 对于$x\in|K|$，$x=\sum b_i(x)v_i$；

3) 给定$v_{i_0},v_{i_1},\cdots,v_{i_k}$，$\langle v_{i_0},v_{i_1},\cdots,v_{i_k}\rangle$是$K$中一个单形，当且仅当有$x\in K$使$b_{i_0}(x)\neq 0,b_{i_1}(x)\neq 0,\cdots,b_{i_k}(x)\neq 0$.

作为一个应用，对于每个顶点$v_i\in K$，令

$$\mathrm{st}(v_i)=\{x|b_i(x)>0\}.$$

它是一个开集，因为$\sum b_i(x)=1$，必至少有一个$b_i(x)>0$，所以集

族$\{\mathrm{st}(v_i)\mid v_i$ 是 K 中一个顶点$\}$是$|K|$的一个开覆盖. 从几何上看, $\mathrm{st}(v_i)$就是一切以 v_i 为顶点的单形 σ 的内域 σ°之并. 更一般地说, 对任一单形 $\sigma=(v_{i_0},v_{i_1},\cdots,v_{i_k})\in K$ 定义

$$\mathrm{st}(\sigma)=\bigcap_{v_{i_j}\in\sigma}\mathrm{st}(v_{i_j}).$$

这是一个包含 σ°的开集,而且$\{\mathrm{st}(\sigma)\mid\sigma\in K\}$仍是$|K|$的开覆盖.

§ 4. de Rham 定理的证明

我们先陈述三角剖分定理: 令 M 为一紧光滑流形, 则必定有一个单纯复形 K 以及一个逐块光滑的同胚 $h:|K|\longrightarrow M$, 即在每个单形 $\sigma\in K$ 上光滑, 映$|K|$为 M.

已知一个这样的三角剖分后,正如在奇异同调理论中一样,定义链映射

$$\widetilde{\int}:A^k(M)\longrightarrow C^k(K),\quad \omega\longmapsto\widetilde{\omega},$$

$\widetilde{\omega}$是上链, 而

$$\widetilde{\omega}([\sigma])=\int_{[\sigma]}h^*\omega$$

(现在我们假设 M 是可定向的,而上同调的系数是实数 $\mathbb{R}$). $\widetilde{\int}$ 诱导出上同调之间的一个同构

$$\widetilde{\int}:H^*(M)\longrightarrow H^*(K,\mathbb{R}).$$

再连同同构 j, 即得

$$H^*(M)\xrightarrow{\widetilde{\int}}H^*(K,\mathbb{R})\xrightarrow{j}H^*(|K|,\mathbb{R})=H^*(M,\mathbb{R}),$$

这就是前面说的 de Rham 定理.

我们需要做一个线性映射

$$a:C^k(K)\longrightarrow A^k(M)$$

使得有性质

(1) $\tilde{\int} \circ \alpha = 1$;

(2) $d \circ \alpha = \alpha \circ \delta$.

于是 α 将在同调群上诱导出一个线性映射，即 $\tilde{\int}$ 之右逆，从而证明 $\tilde{\int}$ 是一个全射. 为此，记住 $C_k(K)$ 是由 $\{[\sigma] | \sigma$ 是 K 中的 k- 单形$\}$ 生成的. 令 $\{\tilde{\sigma}\}$ 是 $C^k(K)$ 中对偶于 $\{[\sigma]\}$ 的对偶基，只需对每个 $\tilde{\sigma}$ 定义 $\alpha(\tilde{\sigma})$ 即可.

令 $\{v_0, v_1, \cdots, v_m\}$ 是 K 中全部顶点. 对每个 v_i 我们已经定义了重心函数 $b_i : |K| \longrightarrow \mathbb{R}$. 令

$$F_i = \{x \in |K| \,|\, b_i(x) \geqslant \frac{1}{n+1}\},$$

$$G_i = \{x \in |K| \,|\, b_i(x) \leqslant \frac{1}{n+2}\},$$

$n = \dim M$，于是 F_i 和 G_i 是分离的闭集. 由定义有

$$F_i \subset \mathrm{st}(v_i), \qquad |K| - \mathrm{st}(v_i) \subset G_i.$$

此外，$\{F_i\}$ 覆盖 $|K|$，因为每个 $x \in |K|$ 必在某个单形 σ 中，例如设 $\sigma = (v_0, v_1, \cdots, v_l)$，因为 $n = \dim M$，所以 $l \leqslant n$，因为 $\sum_{i=0}^{l} b_i(x) = 1$，所以至少有一个 $b_i(x) \geqslant \frac{1}{l+1} \geqslant \frac{1}{n+1}$. 现在，把 F_i 和 G_i 都看成 M 的子集(即通过 h 把 $|K|$ 和 M 等同起来)，则对每个 i，可以作出一个 M 上的光滑函数 f_i，$0 \leqslant f_i \leqslant 1$ 使 $f_i = 1$ 于 F_i 上，$f_i = 0$ 于 G_i 上，因为 F_i 覆盖 M，$\sum_i f_i$ 处处不为 0，令 $\varphi_i = f_i / \sum f_i$，我们得到一个从属于开覆盖 $\{\mathrm{st}(v_i)\}$ 的一的分割.

$\alpha(\tilde{\sigma})$ 应该是对某个 k-单形 $\sigma \in K$ 的 k-形式，设 $\sigma = [v_0, v_1, \cdots, v_k]$，定义

$$\alpha(\tilde{\sigma}) = k! \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \varphi_i d\varphi_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\varphi_i} \wedge \cdots \wedge d\varphi_k.$$

在验证性质(1)和(2)前，注意，因为 $\text{supp}(\varphi_i)\subset \text{st}(v_i)$，故

$$\text{supp}\alpha(\bar{\sigma}) \subset \bigcap_i \text{st}(v_i) = \text{st}(\sigma).$$

先验证性质(2)，显然

$$d\circ\alpha(\bar{\sigma}) = (k+1)!d\varphi_0 \wedge d\varphi_1 \wedge \cdots \wedge d\varphi_k.$$

为了计算 $\alpha\circ\delta$，记住

$$(\delta\bar{\sigma})(\tau) = \bar{\sigma}(\partial\tau).$$

由对偶的定义，$\delta\bar{\sigma}(\tau)\neq 0$只有在 σ 是 τ 的面时才可能，即是说，τ 应该取以下形状：$\tau=[v_0,v_1,\cdots,v_k,v_l]$. 再记住，说 $\sigma\subset\tau$ 是 τ 的一个面，即 $\text{st}(v_l)\cap\text{st}(\sigma)\neq\varnothing$，于是有

$$\delta\bar{\sigma} = \sum_{v_l}(-1)^{k+1}\overline{[v_0,v_1,\cdots,v_k,v_l]},$$

求和是对于一切使 $\text{st}(v_l)\cap\text{st}(\sigma)\neq\varnothing$的 K 中的顶点 v_l 进行的. 于是有

$$\alpha(\delta\bar{\sigma}) = \sum_l[(k+1)(-1)^{k+1}d(\bar{\sigma})\wedge d\varphi_l + \varphi_l d\alpha(\bar{\sigma})].$$

表达式

$$(k+1)(-1)^{k+1}\alpha(\bar{\sigma})\wedge d\varphi_l + \varphi_l d\alpha(\bar{\sigma}) \qquad (*)$$

对任意 $v_l\in K$ 都有意义. 若 $\text{st}(v_l)\cap\text{st}(\sigma)=\varnothing$，$(*)$就等于0. 因此，上式中的求和可以对 K 中一切顶点 v_l 进行，于是$\sum_{v_l}\varphi_l=1$，从而$\sum_{v_l}d\varphi_l=0$，而等式成为 $\alpha\circ(\delta\bar{\sigma})=d\circ\alpha(\bar{\sigma})$.

性质(1)是，对于 K 中的 k-单形 σ 和 τ 有

$$\int_\tau\alpha(\bar{\sigma}) = \delta_{\sigma\tau}.$$

若 $\sigma\neq\tau$，则 $\text{st}(\sigma)\cap\text{st}(\tau)=\varnothing$，所以 $\alpha(\bar{\sigma})$在 τ°上为0，从而

$$\int_\tau\alpha(\bar{\sigma}) = 0.$$

因此余下的仅要证明

$$\int_\sigma\alpha(\bar{\sigma}) = 1.$$

可以用对 k 归纳来表明. 若 $k=0$,因为 $v_i\in F_i$ 而且 $\varphi_i|F_i=1$,所以

$$\int_{\sigma}\alpha(\tilde{\sigma})=\int_{v_i}\varphi_i=\varphi_i(v_i)=1.$$

在一般情况下,令 $\sigma=[v_0,v_1,\cdots,v_k]$,考虑 $\tau=[v_0,v_1,\cdots,v_{k-1}]$由上面已证,有

$$\delta\tilde{\tau}=(-1)^k\tilde{\sigma}+\text{其它如}\ \tilde{\omega}\ \text{之项},$$

这里 $\omega\neq\sigma$,于是

$$\int_{\sigma}\alpha(\tilde{\sigma})=(-1)^k\int_{\sigma}\alpha(\delta\tilde{\tau})=(-1)^k\int_{\sigma}d\alpha(\tilde{\tau})$$
$$=(-1)^k\int_{\partial\sigma}\alpha(\tilde{\tau}).$$

但 $\partial\sigma=(-1)^k\tau+$其它与 τ 不同的面,所以由归纳假设

$$(-1)^k\int_{\partial\sigma}\alpha(\tilde{\tau})=(-1)^k\cdot(-1)^k\int_{\tau}\alpha(\tilde{\tau})=1.$$

我们想直接证明

$$\tilde{\int}:H^*(M)\longrightarrow H^*(K,\mathbb{R})$$

是一对一的. $\tilde{\int}[\omega]=0$ 意味着有一个 M 上的闭 k- 形式 ω 使 $\tilde{\int}\omega=\delta\varphi$,$\varphi$ 是 K 上的一个$(k-1)$- 上链. 我们要证明一定有一个 M 上的$(k-1)$-形式 μ 使 $\omega=d\mu$,为此做一个这样的 μ,并且使它适合一个附加的条件 $\tilde{\int}\mu=\varphi$,即使对 K 中一切$(k-1)$- 单形 σ 有

$$\int_{\sigma}\mu=\varphi(\sigma).\qquad(*)$$

对于一个顶点 $v_i\in K$,我们取它在 M 中的一个邻域 U_i 以及 U_i 上的一个$(k-1)$-形式 μ_i 使得在 U_i 上有 $\omega=d\mu_i$,由于 Poincaré 引理,这总是办得到的. 又因为 K 中只有有限多个顶点 v_i,所以可以取 U_i 互相分离. 于是在 $\bigcup\limits_i U_i$ 上得到一个$(k-1)$-形式,若 $k-1>0$,$(*)$式不成问题;若 $k-1=0$,则在$(*)$中将 μ 换成 $\mu_i+[\varphi(v_i)-\mu_i(v_i)]$,$(*)$也成立.

归纳假设已在 K 的一切$(l-1)$-单形的邻域中找到了 μ. 令 σ

是 K 中一个 l-单形，于是有一个闭形式 ω 定义在 $\sigma\simeq D^l$ 上，使 $\omega=d\mu$ 于 $\partial D^l\cong S^{l-1}$ 上成立. 用上一章中的拓展引理把 μ 拓展到 σ 上而使 $\omega=d\mu$ 在 σ 上成立. 大家记得，应用这个引理的条件是

$$\int_\sigma \omega = \int_{\partial\sigma} \mu \quad (\text{当 } l = k \text{ 时}).$$

但由归纳假设，有

$$\int_{\partial\sigma} \mu = \varphi(\partial\sigma) = \delta\varphi(\sigma) = \omega(\sigma) = \int_\sigma \omega.$$

所以，把 μ 拓展到 σ 上没有困难. 若 $l=k-1$，我们需要对每个 $(k-1)$-单形 σ 恢复归纳假设

$$\int_\sigma \mu = \varphi(\sigma).$$

令 ψ 为 $(k-1)$-上链

$$\psi(\sigma) = \varphi(\sigma) - \int_\sigma \mu.$$

把 μ 换成

$$\mu' = \mu + \alpha(\psi).$$

α 是前面定义的线性映射 $C^{k-1}(K)\longrightarrow A^{k-1}(M)$，因为 $\int \circ \alpha=1$，故有

$$\int_\sigma \mu' = \int_\sigma \mu + \psi(\sigma) = \varphi(\sigma).$$

这样我们又得顾及 $d\mu'$ 或者 $d\alpha(\psi)$，我们有 $d\alpha(\psi)=\alpha(\delta\psi)$ 以及

$$\begin{aligned}(\delta\psi)(\sigma) &= \psi(\partial\sigma) = \varphi(\partial\sigma) - \int_{\partial\sigma} \mu \\ &= (\delta\varphi)(\sigma) - \int_\sigma d\mu \\ &= \int_\sigma \omega - \int_\sigma \omega = 0.\end{aligned}$$

至此一切均已证毕.

de Rham 定理的意义何在？在一定意义上说，它令人失望. 因为我们开始是想研究流形的解析结构，而结果得到了与光滑结构没有关系的东西. 但是这种看法过于狭隘. 如果说 de Rham 群

$H^*(M)$和代数的奇异上同调群 $H^*(M,\mathbb{R})$都是流形的有用的不变量，那么能从不同角度研究同一个东西就大有好处．这意味着，假如我们长于分析，就能用它来研究拓扑学，反过来也一样．de Rham 定理在这个意义上是一把双刃宝剑，数学中绝大部分这类定理（例如指标定理（index theorem））都是好的定理．此外，de Rham 定理有助于澄清概念，加深理解．例如我们将看到，它帮助弄清为什么映射 f 的映射度一定是整数．最广泛地来说，de Rham 群是"障碍"（obstruction）的一种量度．例如，为什么一个闭形式不能是恰当的．de Rham 定理指出，障碍是一种内在的困难而且来自流形的拓扑，因此不可能用任何巧妙的方法来回避过去．

更具体地说，我们可以指出：当 M 为紧时，复形 K 是有限的，因此十分容易地看出，单纯形同调和上同调空间都是有限维的．所以 de Rham 空间也是一样．但是让我们看一看一个似乎是平行的情况，即在复流形时的情况．

§5. 复流形和 Dolbeault 上同调，一个简短的插曲

复流形的概念在第一章里已介绍．它是这样一个流形，其中局部坐标 (U, φ) 是以 n 维复空间 $\mathbf{C}^n$ 中的开集 $\varphi(U)\subset\mathbf{C}^n$ 为模型的，而且其中的迁移函数 $\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\longrightarrow\psi(U\cap V)$ 不仅是要光滑的，而且要是全纯的．因为全纯映射一定是光滑的，所以一个复流形 M（设其复维数为 n）一定也是一个光滑流形（实维数为$2n$）．复流形理论的基本原理就是以这个实的光滑构造为对象，而把复构造作为一个附加的构造．就是说，通过光滑性质的语言来表述全纯性质．基本的工具是 Cauchy-Riemann 方程，但是我们首先需要一些代数的预备知识．

一个复矢量空间 V 自然是一个实矢量空间（若 $\dim_{\mathbf{C}}V=n$，则 $\dim_{\mathbf{R}}V=2n$）．反之，一个偶数$2n$ 维的实矢量空间 V 也一定能变成一

个复矢量空间，其作法有许多种（所得到的是互相同构的空间）．所以，若考虑其特定的一种作法，我们称它为一个特定的“复结构”．把 V 变成一个复空间意味着对于虚单位 $\mathrm{i}\in\mathbf{C}$ 以及 $x\in V$ 定义 $\mathrm{i}x$，运算 $\mathrm{i}:x\longrightarrow \mathrm{i}x$ 很清楚地是一个实线性映射 $j:V\longrightarrow V$ 适合 $j^2=-1$．这样一个映射 j 就定义为 V 上一个复结构．例如在 $V=\mathbf{R}^2$ 上有一复结构可以用一个2×2矩阵

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

来定义，这里要求 $a^2+bc=-1$，这个式子定义了 $\mathbf{R}^3$ 的一个维数为2的子流形，流形有多少个点就相当于 $\mathbf{R}^2$ 上有多少个复结构（其中“标准”的一个是由 $a=0$，$b=1$，$c=-1$ 给出）．

j 的特征多项式显然是 $(x^2+1)^n$，所以 j 恒有固有值 $\pm\mathrm{i}$．因为它们不是实的，所以 j 在 V 中没有固有空间，为了要得出其固有空间，有必要在一个适当的时候把 j 变成一个复线性映射．令 $V\oplus V$ 为 V 及其自身的直和，我们想把 $V\oplus V$ 变成一个复矢量空间，把 $V\oplus V$ 中的一个元素记作 (x, y) 但是把它设想作 $x+\mathrm{i}y$，则复构造为

$$\mathrm{i}(x,y)=(-y,x).$$

$V\oplus V$ 赋以这个复构造就叫做 V 的复化（Complexification），并记作 V_c，把 V 嵌入在 $V\oplus V$ 中：$x\longmapsto (x, 0)$ 则

$$\begin{aligned}(x,y)&=(x,0)+(0,y)=(x,0)+\mathrm{i}(y,0)\\&=x+\mathrm{i}y.\end{aligned}$$

于是虚幻变成了实在，V_c 还有一个外加的构造即共轭：

$$\overline{(x,y)}=(x,-y).$$

现在 j 可以拓展成 V_c 上的线性映射如下（仍记为 j）：

$$j(x,y)=(jx,jy).$$

但这个线性映射 $j:V_c\longrightarrow V_c$ 已经成了复线性映射，因为

$$j[\mathrm{i}(x,y)]=j(-y,x)=(-jy,jx)=\mathrm{i}[j(x,y)].$$

于是 V_c 有固有值 i 与 $-\mathrm{i}$ 以及相应的固有空间 V^+ 和 V^-．

$$V^+=\{(x,-jx)\mid x\in V\},$$

$$V^- = \{(x, jx) | x \in V\},$$

和

$$\begin{cases} V^- = \overline{V^+}, & (\text{因此 } V^+ = \overline{V^-}) \\ V^+ \cap V^- = 0, \\ V_c = V^+ \oplus V^-. \end{cases} \qquad (*)$$

把 V_c 分解为 $V^+ \oplus V^-$ 时，也就恢复了原来的复结构 (V, j).

因为

$$(V, j) \approx V^+, \qquad x \longmapsto (x, -jx)$$

是一个复同构（V^- 则给出共轭构造 $(V, -j)$）. 这意味着，一个复构造和分解式（*）是等同的. 可以在 V 上这样来定义 j：把 $x \in V$ 写成 $x = x^+ + x^-$, $x^+ \in V^+$, $x^- \in V^-$，于是定义 $jx = ix^+ - ix^-$.

若 j 是 V 上的复构造，它必在 V^* 上诱导出一个复构造 j^* 如下：

$$\langle j^* \varphi, x \rangle = \langle \varphi, jx \rangle.$$

用分解来表示，我们首先把 $(V^*)_c$ 与 $(V_c)^*$ 等同起来如下：

$$(V^*)_c \leftrightarrow (V_c)^*, (\varphi_1, \varphi_2) \leftrightarrow \varphi,$$

这里 $\varphi(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$，于是

$$V_c^* = V^{*+} \oplus V^{*-},$$

而 $V^{*\pm} = V^{\mp}$ 的零化子.

对单个实矢量空间可以做的，对于一个实矢量丛 $E \longrightarrow B$ 也可以做. 于是 E 上的复构造就是一个实的丛映射 $j: E \longrightarrow E$ 适合 $j^2 = -1$，这就相当于把复化 E_c 分解为子丛

$$E_c = E^+ \oplus E^-, \text{且 } E^\pm = \overline{E^\mp},$$

唯一的差别在于实丛可能没有任何复结构. 例如，当 E 不可定向时就是这样（但若 E 有复构造，则它所有可能具有的复构造都是同构的复丛）.

现在我们把这些考虑都用于一个复流形 M，令 $T(M)$ 和 $T^*(M)$ 各为 M 的切丛和余切丛（若 $\dim_c M = n$，则它们都是实 $2n$-

丛)，而 $T_c(M)$ 和 $T_c^*(M)$ 是它们的复化(因此是复 $2n$-丛)，我们要在 $T(M)$ 上定义一个复结构. 令 $(U, z=(z_1, \cdots, z_n))$ 是一个局部坐标，记 $z_j = x_j + \mathrm{i}y_j$，则 $T_c(M)|U$ 有一个基底 $\{\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}\}, j=1,2,\cdots,n$. 定义

$$T^+ = \langle \frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y_j}), j=1,2,\cdots,n \rangle,$$

$$T^- = \langle \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y_j}), j=1,2,\cdots,n \rangle.$$

于是

$$T_c(M)|U = T^+ \oplus T^-, \text{且 } T^\pm = \overline{T^\mp}.$$

所以它是 $T(M)$ 的一个复构造. 在 $T_c^*(M)$ 上诱导的复结构是

$$T^{*+} = \langle dz_j = dx_j + \mathrm{i}dy_j, j = 1,2,\cdots,n \rangle,$$

$$T^{*-} = \langle d\bar{z}_j = dx_j - \mathrm{i}dy_j, j = 1,2,\cdots,n \rangle.$$

至今我们还未用到 M 是复流形的假设，即未用到迁移函数是全纯的这一点，现在要用到它了. 为了证明我们在 $T(M)$ 上有一个整体的复结构，必须证明分解 T^+ 和 T^- 与坐标的选择无关，在上一章中讲过，若 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$，则

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}[(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}) + \mathrm{i}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})].$$

因此，Cauchy-Riemann 方程相当于 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$；所以，若 (V, w) 是另一个坐标系，则对一切 i, j 有 $\frac{\partial w_i}{\partial \bar{z}_j} = 0$，所以有

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \sum_i \frac{\partial w_i}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial w_i} + \sum_i \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial \bar{w}_i}$$

$$= \sum_i \frac{\partial w_i}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial w_i}.$$

这证明分解是有适当定义的.

因为一个(复值)光滑1-形式 ω 是丛 $T_c^*(M)$ 的一个截口，所以分解式

$$T_c^*(M) = T_c^*(M)^+ \oplus T_c^*(M)^-$$

给出了一个1-形式的分解式；那些在一切 $P\in M$ 点的值均在 $T_C^*(M)_P$ 中的1-形式称为(1,0)型的，而在 $T_C^*(M)_{\bar{P}}$ 中的称为(0,1)型的. 每一个1-形式均可唯一地分解为(1,0)型与(0,1)型形式之和：$\omega=\omega^{1,0}+\omega^{0,1}$，即

$$A_C^1(M)=A^{1,0}(M)\oplus A^{0,1}(M),$$

在局部坐标中，$A^{1,0}(M)$ 由 $\{dz_j,j=1,2,\cdots,n\}$ 张成，$A^{0,1}(M)$ 则由 $\{d\bar{z}_j,j=1,2,\cdots,n\}$ 张成.

$A_C^1(M)$ 的分解又给出外微分算子 $d:A_C^0(M)\longrightarrow A_C^1(M)=A^{1,0}(M)\oplus A^{1,0}(M)$ 的分解，即

$$d=\partial+\bar{\partial},$$

其中 $\partial:A_C^0(M)\longrightarrow A^{1,0}(M)$，$\bar{\partial}:A_C^0(M)\longrightarrow A^{0,1}(M)$ 是 d 之后继以到各个直和因子的分解. 算子 ∂ 和 $\bar{\partial}$ 很容易写出来：对于一个函数 f，有

$$\begin{aligned}df&=\sum_j\frac{\partial f}{\partial x_j}dx_j+\sum_j\frac{\partial f}{\partial y_j}dy_j\\&=\sum_j\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial z_j}+\frac{\partial f}{\partial\bar{z}_j}\right)(dz_j+d\bar{z}_j)\\&\quad+\sum_j\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial z_j}-\frac{\partial f}{\partial\bar{z}_j}\right)(dz_j-d\bar{z}_j)\\&=\sum_j\left(\frac{\partial f}{\partial z_j}dz_j+\frac{\partial f}{\partial\bar{z}_j}d\bar{z}_j\right).\end{aligned}$$

所以

$$\partial f=\sum\frac{\partial f}{\partial z_j}dz_j,\quad\bar{\partial}f=\sum\frac{\partial f}{\partial\bar{z}_j}d\bar{z}_j.$$

由此可见，复值函数 $f:M\longrightarrow\mathbf{C}$ 是全纯的，当且仅当 $\bar{\partial}f=0$，这就是我们说过的，在光滑的框架中表示全纯构造. 我们记定义在一个开集 $U\subset M$ 上的全纯函数空间为 $\Omega^0(U)$，所以 $\Omega^0(U)$ 是 $A^0(M)$ 的子空间 $\ker\bar{\partial}$. 应该指出 ∂ 和 $\bar{\partial}$ 是完全对称的，$\partial f=0$ 只不过表示 f 之共轭 $\bar{f}$ 是全纯的，这可以从下面的简单的关系式看出

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z_j}\right)}=\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{z}_j}.$$

这些全都可以推广到高次形式，记住，外积有以下性质

$$\Lambda(U \oplus V) = \Lambda(U) \otimes \Lambda(V).$$

在各个不同的幂数上，这式意味着

$$\Lambda^n(U \oplus V) = \sum_{p+q=n} \Lambda^p(U) \otimes \Lambda^q(V).$$

将此式应用于 $T_c^*(M)=T^*(M)^+ \oplus T^*(M)^-$，得

$$\Lambda^n(T_c^*(M)) = \sum_{p+q=n} \Lambda^p(T^*(M)^+) \otimes \Lambda^q(T^*(M)^-).$$

于是一个 n-形式 ω 可以分解为 (p,q) 型形式之和，而所谓 (p,q) 型形式就是和

$$\omega = \sum_{I,J} a_{IJ} dz_I \wedge d\overline{z_J},$$

这里 $I=(i_1,i_2,\cdots,i_p)$，$J=(j_1,j_2,\cdots,j_q)$ 是 $[1,2,\cdots,n]$ 的子集，其元素个数分别为 p 和 q.

$$dz_I = dz_{i_1} \wedge dz_{i_2} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p},$$

$$d\overline{z}_J = d\overline{z}_{j_1} \wedge d\overline{z}_{j_2} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{j_q},$$

$a_{IJ}(z)$ 是 z 的函数.

对于这样一个 (p,q) 型形式 ω，$d\omega$ 在 Λ^{n+1} 中，而一般地可以分解为 $2^{(n+1)}$ 项，但是

$$da_{IJ} = \sum \frac{\partial a_{IJ}}{\partial z_j} dz_j + \sum \frac{\partial a_{IJ}}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j,$$

所以在 $d\omega$ 中或者 dz_I 部分多了一个因子，或者 $d\overline{z}_J$ 部分多了一个因子，即

$$d(A^{p,q}) \subset A^{p+1,q} + A^{p,q+1}.$$

于是我们又可以定义

$$\partial: A^{p,q} \longrightarrow A^{p+1,q}, \quad \overline{\partial}: A^{p,q} \longrightarrow A^{p,q+1}.$$

又有 $d=\partial+\overline{\partial}$. 其中

$$\partial\omega = \sum_{I,J,j} \frac{\partial a_{IJ}}{\partial z_j} dz_j \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J,$$

$$\overline{\partial}\omega = \sum_{I,J,j} \frac{\partial a_{IJ}}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J.$$

特别是，若 ω 是$(p,0)$型形式

$$\omega = \sum_I a_I(z) dz_I,$$

则$\bar{\partial}\omega=0$意味着其系数函数 $a_I(z)$是全纯的，亦即 ω 是一个全纯 p-形式，其集记作 Ω^p. 但是，$\bar{\partial}\omega=0$作为全纯性的判据，对于$(p,0)$型以外的形式并不适用.

$d^2=0$这个事实现在成为

$$0 = d^2 = (\partial + \bar{\partial})(\partial + \bar{\partial}) = \partial\partial + (\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial) + \bar{\partial}\bar{\partial}.$$

这三项的次数分别为$(p+2,q)$，$(p+1,q+1)$和$(p,q+2)$，所以它们必须分别为0，即

$$\partial\partial = 0, \quad \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0, \bar{\partial}\bar{\partial} = 0.$$

特别是，对每一个 p 都有一个链复形 $A^{p,*}(M)$：

$$0 \longrightarrow A^{p,0}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{p,1}(M) \longrightarrow \cdots \longrightarrow A^{p,q}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{p,q+1}(M) \longrightarrow \cdots,$$

$(A^{p,*}(M),\bar{\partial})$的第 q 个上同调空间（一个复矢量空间）称为 M 的(p,q)-Dolbeault 上同调，记作 $H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)$. 很清楚，这些上同调空间都是说的关于 M 的复构造的. 如，我们已经知道 $H_{\bar{\partial}}^{p,0}(M)=\Omega^p(M)$就是全纯 p-形式空间.

Dolbeault 上同调群的造法看起来很象 de Rham 群，事实上还有其它一些结果也很类似. 例如也有一个象 Poincaré 引理的结果，称为 Dolbeault-Grothendieck 引理如下：若 $D^n\subset C^n$ 是一个开圆盘，则当 $q>0$时 $H_{\bar{\partial}}^{p,q}(D^n)=0$，但是没有 de Rham 定理. 事实上，$H_{\bar{\partial}}$不是一个拓扑不变量，所以那些把 de Rham 定理看成是一个失望的人，知道这一点却颇为高兴. 另一方面，研究 $H_{\bar{\partial}}$要难得多. 例如我们可以问这样一个问题：对于紧的复流形 M，$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)$是不是有限维的？对于 de Rham 群，由于有 de Rham 定理，这几乎是不成问题的. 现在答案也是肯定的，但这答案却是关于调和形式的基本的 Hodge 理论（也是椭圆算子理论的基础）. 理在我们只考虑现在就能懂得的最简单的例子 $H_{\bar{\partial}}^{0,0}(M)=\Omega^0(M)$是 M 上的全纯函数的空间. 但是

全纯函数的最大模原理(即$|f|$不会有局部极大)指出,在整个紧流形上全纯的函数只能是常数,所以$\Omega^0(M)=C$(M是连通的).然而和$H^0(M)=\mathbb{R}$比较,这要深刻得多,对于光滑函数,$H^0(M)=\mathbb{R}$只不过意味着中值定理.

最后一点说明,$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)$一般地不是拓扑不变量这并不意味着没有拓扑不变量.例如,对于紧的复流形M,数

$$\sum_{p,q}(-1)^{p+q}\dim H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)$$

(由于前面所说,这个数是有意义的)是一个拓扑不变量(这可以看作 Riemann-Roch 定理的最简单的情况).所以问题并不在于 de Rham 定理本身是好还是不好,而是在于它的前途.de Rham 定理是我们所已学到的这方面第一个深刻的定理.

参考文献

[1] Griffiths, P. and Harris, J., *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley-Interscience Publication, 1978.

[2] Singer, I. M. and Thorpe, J. A., *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*, Scott. Foresman Co. 1967.

[3] Whitney, H., *Geometrical Integration Theory*, Princeton University Press, 1957.

[4] Wells, R. O., *Differential Analysis on Complex Manifolds*, Prentice-Hall, 1973.

第九章　同调理论

§1. 一般的代数知识

前两章我们已经看到几种同调的作法，它们虽然各有特点，却有共同的代数程序：先做一个“复形” $\{C_i, d\}$，其中有一个“微分”算子 d，具有 $d^2=0$ 的性质，然后作同调. 在这一节里我们由此往下讨论这种作法的形式上的性质.

我们总是和一个固定的基环 R 打交道，R 是一个具有单位元 1 的可换环. M 总是 R 上的单式模 (unitary module)，即对 $x\in M$ 恒设 $1\cdot x=x$. 一个复形就是一串 R-模 $C=\{C_i,d\}$，

$$C:\ \cdots\xrightarrow{d}C_i\xrightarrow{d}C_{i-1}\longrightarrow\cdots\xrightarrow{d}C_0\longrightarrow 0,$$

其中有一线性映射 d（称为微分算子或边缘算子，这名称显然是参照上面的例子面来的），它适合

$$d^2=0. \qquad (*)$$

传统上，总说有两种复形，上面提到的那一种，按其技巧为“链复形”，其中的同调是

$$H_i(C)=\ker(C_i\xrightarrow{d}C_{i-1})/\mathrm{Im}(C_{i+1}\xrightarrow{d}C_i).$$

另一种是指标上升的，即

$$C:0\longrightarrow C_0\xrightarrow{d}C_1\xrightarrow{d}\cdots\longrightarrow C_i\xrightarrow{d}C_{i+1}\longrightarrow\cdots$$

称为“上链复形”，其中有“上同调”

$$H^i(C)=\ker(C_i\xrightarrow{d}C_{i+1})/\mathrm{Im}(C_{i-1}\xrightarrow{d}C_i).$$

为行文简单起见，我们一概称之为复形．而只在有必要时强调是那一类的复形．

两个（同类型）复形之间的同态 $f: C \longrightarrow D$ 就是一串模同态 $f_i: C_i \longrightarrow D_i$，它们与微分算子为可换，即使下面的图式为可换

$$\begin{array}{ccccccccc} \longrightarrow & C_i & \xrightarrow{d} & C_{i-1} & \longrightarrow \cdots \xrightarrow{d} & C_0 & \longrightarrow & 0 \\ & \downarrow f_i & & \downarrow f_{i-1} & & \downarrow f_0 & & \\ \longrightarrow & D_i & \xrightarrow{d} & D_{i-1} & \longrightarrow \cdots \xrightarrow{d} & D_0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

这种同态诱导出同调之间的同态

$$(f_i)_*: H_i(C) \longrightarrow H_i(D), \quad (f_i)_*[c] = [f_i(c)].$$

以后，我们总是略去下标，并称 f 为链映射．

诱导同态具有以下的函子性质：

(1)　若 $f=1: C \longrightarrow C$，则 $f_* = 1: H_*(C) \longrightarrow H_*(C)$．

(2)　若 $f: C \longrightarrow D, g: D \longrightarrow E$，则 $(gf)_* = g_* f_*$．

于是同构的复形具有同构的同调．

从一个链复形 C 和另一个 R-模 M 出发，我们可以作出一个链复形和上链复形如下：

1. 对每个 i，取张量积 $C_i \otimes M$，我们有自然的映射 $d \otimes 1: C_i \otimes M \longrightarrow C_{i-1} \otimes M$，仍记为 d，这就给出一个链复形

$$C \otimes M: \cdots \longrightarrow C_i \otimes M \xrightarrow{d \otimes 1} C_{i-1} \otimes M \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0 \otimes M \longrightarrow 0.$$

它的同调 $H_*(C \otimes M)$ 称为 C 的系数在 M 中的同调，记作 $H_*(C; M)$．

2. 对每个 i，取 C_i 与 M 之间的 Hom：

$$\mathrm{Hom}(C_i, M) = \{f: C_i \longrightarrow M \mid f \text{ 是一个模同态}\}.$$

它自然也是一个 R-模，我们定义

$$\delta: \mathrm{Hom}(C_i, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C_{i-1}, M), \quad f \longmapsto \delta f,$$

其中，$(\delta f)(x)=f(dx)$，$x\in C_{i+1}$. 这就给出一个上链复形 $\mathrm{Hom}(C^{\cdot},M)$：

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}(C_0,M)\longrightarrow\cdots\longrightarrow \mathrm{Hom}(C_i,M)$$
$$\xrightarrow{\delta}\mathrm{Hom}(C_{i+1},M)\longrightarrow\cdots,$$

它的上同调称为 C 的系数在 M 中的上同调，记作 $H^{\cdot}(C;M)$. 以 $M=\mathbf{R}$(实数域)为例，$\mathrm{Hom}(C_i,M)=C_i^*$ 是 C_i 的对偶模，我们曾用它来定义奇异上同调和单纯上同调.

链映射 $f:C\longrightarrow D$ 仍可诱出同调之间的同态

$$f_*:H_*(C;M)\longrightarrow H_*(D;M),$$

它也有函子性质(1)和(2). 在上同调之间也会有一个诱导的同态，但是按相反的方向

$$f^*:H^*(D;M)\longrightarrow H^*(C;M),$$

且函子性质(2)也要相应的改变为

(2′) $(gf)^*=f^*\circ g^*$.

(2)和(2′)的差别将是很重要的，我们说同调 H_* 是协变函子，而上同调 H^* 是逆变函子.

当 $M=R$ 即是基环时，有一个自然的对偶

$$C_i^*\times C_i\longrightarrow R,\quad (f,x)\longmapsto f(x).$$

因为 $\delta f=fd$(定义)，得到一个对偶

$$H^i(C)\times H_i(C)\longrightarrow R,$$
$$[f][x]\longmapsto[f(x)]=f(x)$$

(当 $M=R$ 时，我们总是在记号中不写 M). 但是我们只是在泛泛的意义下理解这里的对偶性，除非 R 是一个域，上述双线性映射一般不是非奇异的，所以 $H^i(C)$ 一般并不是对偶模$[H_i(C)]^*$. 这个事实称为 Pontrjagin 对偶定理，我们现在不去证明(证明很容易).

从纯粹代数的观点看来，关于同调的最重要的事实是以下的情况. 一串模和模同态

$$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$$

称为在 B 处为正合的，如果 $\operatorname{Im}(f)=\ker(g)$，而所谓的"短"正合序列(即在 A,B,C 均为正合)

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

就意味着 f 是 1-1 的单射，g 为全射，而且 $\operatorname{Im}(f)=\ker(g)$. 于是可以通过 f 把 A 看作 B 的子模，通过 g 把 C 看作商 B/A. 从这个观点看来，一个复形

$$C_{i+1} \xrightarrow{d_{i-1}} C \xrightarrow{d_i} C_{i-1}$$

还不全是正合的，因为 $d^2=0$ 只意味着 $\operatorname{Im} d_{i+1} \subset \ker d_i$. 所以同调 $H_*(C)$ 其实是对于正合性的偏离之一种度量.

设有一串复形及链映射，而不只是一串模

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0.$$

我们也说这个序列是正合的，如果在 A,B,C 的每一个成分上都有正合序列

$$0 \longrightarrow A_i \xrightarrow{f_i} B_i \xrightarrow{g_i} C_i \longrightarrow 0,$$

这时，和通常一样有诱导映射 f_* 和 g_*. 此外还有一个映射

$$\Delta: H_i(C) \longrightarrow H_{i-1}(A)$$

定义如下：

取一个元 $[c] \in H_i(C)$ 使 $c \in C_i$ 为一循环，即 $dc=0$，因为 g_i 是全射，故必有 $b \in B_i$ 使 $g_i(b)=c$. 但

$$g_{i-1}(db)=dg_i(b)=dc=0,$$

故由正合性，有 $a \in A_{i-1}$ 使 $f_{i-1}(a)=db$. 且有

$$f_{i-2}(da)=df_{i-1}(a)=ddb=0.$$

因为 f_{i-2} 是单射，故 $da=0$，即 $a \in A_{i-1}$ 是一个循环，从而有一个同调类 $[a] \in H_{i-1}(A)$，我们定义

$$\Delta[c]=[a].$$

用下面的图表出以上步骤：

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A_i & \longrightarrow & B_i & \xrightarrow{g_i} & C_i & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & b & \longmapsto & c & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A_{i-1} & \longrightarrow & B_{i-1} & \longrightarrow & C_{i-1} & \longrightarrow & 0 \qquad \Delta[c]=[a] \\
 & & a & \longmapsto & db & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A_{i-2} & \longrightarrow & B_{i-2} & \longrightarrow & C_{i-2} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & &
\end{array}
$$

同调代数的基本定理 $\Delta: H_i(C) \longrightarrow H_{i-1}(A)$是适当定义的，而且长序列

$$\cdots \xrightarrow{\Delta} H_i(A) \xrightarrow{f_*} H_i(B) \xrightarrow{g_*} H_i(C) \xrightarrow{\Delta} H_{i-1}(A) \xrightarrow{f_*} \cdots$$

是正合的.

证 证明很容易，我们只指出它的作法. 设$[c]=[c']$而b'，a'为对c'定义Δ时所作. 我们有$c''\in C_{i+1}$使$c-c'=dc''$，取$b''\in B_{i+1}$使得$g(b'')=c''$. 有

$$g(b-b'-db'')=c-c'-dc''=0.$$

因此必有$a''\in A_i$使

$$f(a'')=b-b'-db'',$$

且有

$$f(a-a'-da'')=db-db'-d(b-b'-db'')=0.$$

因为f是单射，故$a-a'=da''$，亦即$[a]=[a']$.

我们再验证$\ker\Delta\subset\operatorname{Im}g_*$. 和上面一样，如果$\Delta[c]=[a]=0$，必有$a'\in A_i$使得$da'=a$，且有$b'=b-f(a')\in B_i$适合

$$\begin{aligned} db' &= db-df(a')=db-f(da')=db-f(a) \\ &= db-db=0. \end{aligned}$$

于是b'是一个循环，得

$$g([b']) = [g(b - f(a'))] = [g(b)] = [c].$$

其余情况类似，请读者自证.

在理论上说，长正合序列使我们能计算任一个复形的同调，只要此复形在一个短正合序列中，而其它两个复形的同调为已知. 尽管在实际上从来没有这么简单，但这总是一个很有用的东西.

当我们处理具有系数的同调时，发生了一些问题，因为函子$\otimes$和 Hom 并不保持正合序列，我们最多只能说得到

定理 若 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 是正合的，而 M 是一个 R-模，则

(1) $A\otimes M \xrightarrow{f\otimes 1} B\otimes M \xrightarrow{g\otimes 1} C\otimes M \longrightarrow 0$；

(2) $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C, M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(B, M) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(A, M)$都是正合的.

现在我们只考虑比较容易的(2)，令 $\varphi\in \mathrm{Hom}(C, M)$，则 $g^*(\varphi) = \varphi \circ g$，所以，$g^*(\varphi) = 0$ 意味着 $\varphi(g(b)) = 0$ 对一切 $b\in B$ 成立. 因为 g 是全射，故有 $\varphi = 0$，从而得证 g^* 也是单射. 令 $\varphi\in \mathrm{Hom}(A, M)$，$\varphi = f^*(\psi)$即 $\varphi = \psi \circ f$，$\psi\in \mathrm{Hom}(B, H)$. 这就是说，若通过 f 把 A 看成 B 的子模，φ 必可拓展到 B 上，这当然不一定可能，所以 f^* 不一定是全射. 还有 $\mathrm{Im}g^* = \ker f^*$，请读者自证.

也很容易看到，$f\otimes 1$ 即令 f 是一对一的也不一定是单射. 取 $R = \mathrm{Z}$(于是我们讨论的是 Abel 群)，对于任意 Abel 群 M

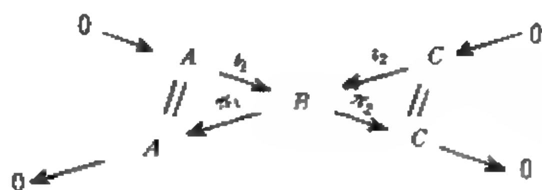
$$\mathrm{Z}\otimes M \longrightarrow M, \quad (n, x) \longmapsto nx$$

都是一种等同(identification)(其逆是 $M \longrightarrow \mathrm{Z}\otimes M$，$x \longmapsto 1\otimes x$). 取 M 为 k 阶循环群 Z_k，而 $f: \mathrm{Z} \longrightarrow \mathrm{Z}$ 为乘以 k，则 f 是一对一的，但

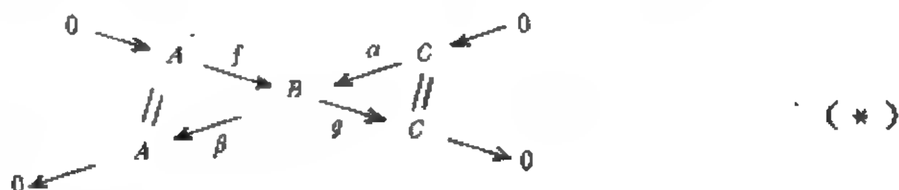
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Z}\otimes M & \longrightarrow & M \\ {\scriptstyle f\otimes 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}} \\ \mathrm{Z}\otimes M & \longrightarrow & M \end{array}$$

$f\otimes 1$ 和 $\bar{f}$ 等同起来，这里 $\bar{f}(x) = kx$ 恒为 0.

由于这个定理，$\otimes$称为右正合(right exact)函子，Hom 称为左正合函子，这是同调代数的起点，可以引进一串新的函子来量度对于正合性的偏离. 但我们不去管它，就我们之所需，正合序列 $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ 是时常用到的，它是一种特殊类型. 设 $B = A \oplus C$ 是直和，则我们有两个包含映射 $i_1: A \longrightarrow B, i_2: C \longrightarrow B$，两个投影 $\pi_1: B \longrightarrow A, \pi_2: B \longrightarrow C$ 以及两个正合序列



且有性质 $\pi_1 i_1 = 1_A, \pi_2 i_2 = 1_C$. 反之，若有一个图



(*)

其中的两个序列都是正合的，而

$$\beta f = 1_A, \quad g\alpha = 1_C,$$

则 f 和 α 定义一个同构 $A \oplus C \longrightarrow B, (a, c) \longmapsto f(a) + \alpha(c)$，而使 β 和 g 变成投影. 其实，我们只需要或者 α 适合 $g\alpha = 1$(这种 α 称为 g 的分裂)，或者有 β 使得 $\beta f = 1$(这种 β 称为 f 的收缩(retraction))，只需作一直和等同就够了. 一个正合序列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0,$$

其中 g 有一个分裂或 f 有一个收缩，就称为“分裂”正合序列，因为 B 可以通过 f 和 α 分裂为 $A \oplus C$. 很清楚，$\otimes$和 Hom 可以保持分裂正合序列. 例如，由图(*)可得

$$\begin{array}{ccccc} & & & \overset{\alpha\otimes 1}{\swarrow} & C\otimes M \\ & & & & \| \\ A\otimes M & \xrightarrow{f\otimes 1} & B\otimes M & \xrightarrow{g\otimes 1} & C\otimes M \\ \| & \overset{\beta\otimes 1}{\swarrow} & & & \\ A\otimes M & & & & \end{array}$$

但由 $g\alpha=1$ 有 $(g\otimes 1)(\alpha\otimes 1)=1$，因此 $\alpha\otimes 1$ 是单射而 $g\otimes 1$ 是全射，而我们可以在图中增加一些 $\otimes$. 因此我们把复形的正合序列

$$0\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\longrightarrow 0,$$

称为分裂的，如果对每个 i

$$0\longrightarrow A_i\xrightarrow{f_i}B_i\xrightarrow{g_i}C_i\longrightarrow 0,$$

都是分裂的. 这经常发生在两种情况下.

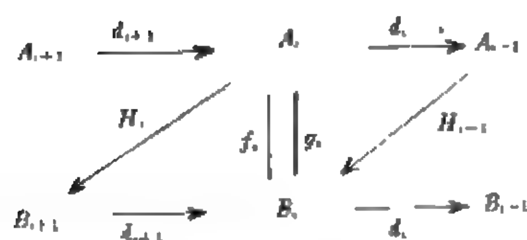
1) 基环 R 是一个域. 熟知，设已有一个矢量子空间 $A\subset B$，一定可以取 A 的一个基底再扩大为 B 之基底.

2) 若 R 不是一个域，我们希望上述关于基底的情况现在仍成立，即 A 与 B 都是自由模(即有基底)而且 A 有一个基底是 B 的某个基底的子集(其余集则成为 C 的一个基底，从而 C 也是自由的).

除了长正合序列之外，还有一个关于诱导映射的事实. 从 Poincaré 引理我们已经看到，复形之间的两个不同的链映射 f,g : $A\longrightarrow B$ 可能在同调方面具有相同的诱导映射 $f_*=g_*$: $H_*(A;M)\longrightarrow H_*(B;M)$. 这种灵活性极为有用. 从几何观点看，如果 f 和 g 是同伦的，就发生这种情况. 回想 Poincaré 引理的证明，它在代数上的类似物显然如下：

定义 链映射 f,g : $A\longrightarrow B$ 的链同伦是一串同态 H_i : $A_i\longrightarrow B_{i+1}$(注意指标的变化)，使

$$d_{i+1}H_i + H_{i-1}d_i = f_i - g_i.$$



若把指标省去，方程就成为

$$dH + Hd = f - g.$$

若 $a \in A_i$ 是一个循环，则

$$f(a) - g(a) = dH(a) + Hd(a) = dH(a),$$

从而是一个边缘. 故在同伦中有$[f(a)] = [g(a)]$.

同伦显然是一个等价关系，所以可以谈得上 $f \sim g$ 以及相同伦型的复形等等.

本节最后我们讨论 Euler 示性数，它以拓扑学中最老的定理著称. 图 9—1 中的两个图形是圆盘的三角剖分.



图 9—1

令 V、E、T 分别是其中顶点、棱、和三角形之集，$^{\#}V$ 等等表示其中元素之个数，则对第一个图

$$^{\#}V - {}^{\#}E + {}^{\#}T = 4 - 5 + 2 = 1.$$

用另一个图有

$$^{\#}V - {}^{\#}E + {}^{\#}T = 5 - 8 + 4 = 1.$$

Euler 定理指出，不论如何作三角剖分，这个数总是不变. 它的证明是一个简明优美的证明的范例：若在第二图中去掉三角形①，则在 T, E 中少了一个元素，但 V 不动，上述和也不变. 若这以后再去掉悬空的②，则少了一个 V，二个 E 和一个 T，而上述之和仍不

变.这样有限步以后,将只余下一个三角形,而有$^{\#}V-{}^{\#}E+{}^{\#}T=3-3+1=1$. $^{\#}V-{}^{\#}E+{}^{\#}T$ 这个数很自然地叫做圆盘的 Euler 示性数,记作 $\chi(D^2)$. 类似地可以看到,例如 $\chi(S^2)=2$.

Euler 定理的意义在于,一个组合地产生的(即依赖于三角剖分的)对象却只是依赖于空间的拓扑.如果说,这对于 Euler 示性数是真的,那么对于单纯同调群 $H_*(K)$也是真的吗?如果是这样,则由它可以得出 Euler 定理.这里需要如下的简单的代数定理:设我们处理的基域 R 是一个域,如果在一个复形 C 中,适合 $C_i\neq0$ 的 i 只有有限多个,而且一切 C_i 都是有限维的,则称此复形为有限复形.于是我们可定义 C 的 Euler 示性数 $\chi(C)$为

$$\chi(C)=\sum_i(-1)^i\dim C_i.$$

定理 若 C 是域 R 上的有限复形,则 $\chi(C)=\chi(H_*(C))$.

注意,若 C 是用来定义一个单纯复形的单纯同调 $H_*(K)$的链复形,则 $\chi(C)$ 恰好是$^{\#}V-{}^{\#}E+{}^{\#}T-\cdots$,因此,若 $H_*(C)=H_*(K)$,则 Euler 的定理得证.

上述定理的证明几乎是不足道.由定义,有正合序列

$$0\longrightarrow Z_i\longrightarrow C_i\xrightarrow{d_i}B_{i+1}\longrightarrow0.$$

令 $Z=\{Z_i\}$,$B=\{B_i\}$为一切 Z_i 或 B_i 所成的复形.因为有指标的转移,所以

$$\chi(C)=\chi(Z)-\chi(B).$$

另一方面,又有正合序列

$$0\longrightarrow B_i\longrightarrow Z_i\longrightarrow H_i(C)\longrightarrow0.$$

现在没有指标的转移,所以

$$\chi(Z)=\chi(B)+\chi(H_*(C)).$$

至此得证 $\chi(C)=\chi(H_*(C))$.证明虽然简单,它之所以起作用是由于其中出现了交替和,这一套东西真正的妙处在此.

最后说明一点,上一章我们说过,虽然 Dolbeault 群 $H^{p,q}(M)$ 对

于紧复流形 M 一般地不是一个拓扑不变量，但"交替"和 $\sum\limits_{p,q}(-1)^{p+q}\dim H^{p,q}(M)$ 却是，这正是由于它其实是 M 的 Euler 示性数 $\chi(M)$.

§2. 正合性

我们已经作出了两种同调，即对单纯复形的单纯同调和对任意拓扑空间的奇异同调. 单纯理论比较直观，因为我们可以实在地"看见"空间的某一块是一个循环或者边缘，而且在比较简单的情况下，它确实是可以计算的，但是还留下一个不变性问题没有解决. 另一方面，奇异理论按其定义就是不变的，但是它是否可以计算则完全不清楚. 不论如何，$S(X)$是由所有奇异单形 $\sigma: \Delta_k \longrightarrow X$ 所生成的自由模，因此，把它们一一数出来是谈不上的，作为一个适当的例子，考虑 $X=*$ 正好是一个点的情况(不是开玩笑)，作为一个单纯复形，$*$ 除了一个顶点外就什么也没有了.

$$C_k(X)=0, \quad k>0,$$

$$C_0(X)=R \ (R \text{ 是任意基环}),$$

所以有

$$H_k(X)=\begin{cases}0, & k>0,\\ R, & k=0.\end{cases}$$

对于奇异理论，就不再有 $S_k(*)=0(k>0)$，但是显然只有一个奇异 k-单形 $\sigma: \Delta_k \longrightarrow *$，所以，$S_k(*)=R$ 对一切 k 都成立. 至于边缘算子，则有

$$\partial\sigma=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sigma_i,$$

所以

$$\partial\sigma=\begin{cases}0, & k \text{ 为奇},\\ 1, & k \text{ 为偶},\end{cases}$$

且奇异链复形为

$$\longrightarrow R \xrightarrow{1} R \xrightarrow{0} R \xrightarrow{1} \cdots \xrightarrow{0} R \longrightarrow 0.$$

除了第一项($S_0(*)$)外，它是正合的，所以我们仍然有

定理(正规化)　对于一点空间 $*$，不论是单纯同调或奇异同调 H_k 都有

$$H_k(*,R)=\begin{cases}0, & k>0;\\ R, & k=0.\end{cases}$$

一点空间是唯一可以从定义来计算的例子，所以很显然，如果奇异同调能够成为一种有用的不变量而不只是一种形式的工具(例如说，用来陈述 de Rham 定理)，就应该有更深刻的性质使它较易计算. 事实上，单纯理论和奇异理论都有一组性质使得可以有效地把它们算出来. 这些相同的性质也是证明这两个理论等价的基础. 实际上，这组共同的性质是刻画任意同调理论的公理化的基础，这一点正是 Eilenberg 和 Steenrod 工作的实质.

我们先应用 §1 建立起来的代数工具. 令 $A\subset X$ 是一个子空间，显然 $S(A)\subset S(X)$ 是一个子模. 此外，$S(A)$ 有一个基底(即 A 中的奇异单形)是 $S(X)$ 的基底的一部分. 于是，序列

$$0\longrightarrow S(A)\longrightarrow S(X)\longrightarrow S(X,A)\longrightarrow 0$$

是分裂正合的，其中

$$S(X,A)=\frac{S(X)}{S(A)}$$

是一个商模，称为 (X,A) 的相对链复形. 根据上面所述，$S(X,A)$ 是一个自由模，其基底是所有不在 A 中的奇异单形 $\sigma: \Delta_k\longrightarrow X$(所谓“不在 A 中”即指 $\sigma(\Delta_k)\not\subset A$，请勿与“在余集 $X-A$ 中”混淆)，因为边缘算子 ∂ 保存 $S(A)$，故它诱导出 $S(X,A)$ 上的一个边缘算子 ∂. 假如在 $S(X,A)$ 中 $\partial\sigma=0$ 只不过表示 $\partial\sigma\subset A$，这样的 σ 称为一个“相对循环”.

对于单纯理论，我们需要子复形的概念. $L\subset K$ 称为 K 的子复形，如果它是 K 中单形的子集，而且若 $\sigma\in L$ 是一个 L 中的单形，

则 σ 的所有的面也属于 L. 这时 $C(L)\subset C(K)$ 是一个子模，且 ∂：$C(L)\longrightarrow C(L)$，还有，下面的序列是分裂正合的：

$$0\longrightarrow C(L)\longrightarrow C(K)\longrightarrow C(K,L)=\frac{C(K)}{C(L)}\longrightarrow 0.$$

应用基本引理，即可得到一个长正合序列

$$\cdots\longrightarrow H_k(A)\longrightarrow H_k(X)\longrightarrow H_k(X,A)\longrightarrow H_{k-1}(A)\longrightarrow\cdots$$

$$\longrightarrow\cdots\longrightarrow H_k(L)\longrightarrow H_k(K)\longrightarrow H_k(K,L)\longrightarrow H_{k-1}(L)\longrightarrow\cdots.$$

当然，

$$H_*(X,A)=H_*(S(X,A)),$$

$$H_*(K,L)=H_*(C(K,L))$$

是"相对同调群"(不管系数群).

更确切地说，一个映射 $f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$ 就是一个由 X 到 Y 内的连续映射 $f:X\longrightarrow Y$ 但 $f(A)\subset B$，它很显然诱导出一个链映射 $f_\#:S(X,A)\longrightarrow S(Y,B)$，因此也诱导出同态

$$f_*:H_*(X,A)\longrightarrow H_*(Y,B),$$

$$f^*:H^*(Y,B)\longrightarrow H^*(X,A).$$

例如，把 A 和 X 看成 $A=(A,\varnothing)$，$X=(X,\varnothing)$，则有"包含映射"i：$A\longrightarrow X$，$j:X\longrightarrow(X,A)$，其诱导映射 i_* 和 j_* 是长正合序列的一部分. 我们说 (X,A) 及其映射构成一个范畴，模及其同态构成另一个范畴，奇异同调 $H_*:(X,A)\longrightarrow H_*(X,A)$，$f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$，$f_*:H_*(X,A)\longrightarrow H_*(Y,B)$ 则成一个函子，因为 $(\mathrm{id})_*=\mathrm{id}$ 而且 $(fg)_*=f_*g_*$. 于是我们可以提出

定理(正合性) 对于映射 $f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$. 下面的长正合序列的图是可交换的.

$$\begin{array}{ccccccccc}\cdots\longrightarrow & H_k(A) & \xrightarrow{i_*} & H_k(X) & \xrightarrow{j_*} & H_k(X,A) & \xrightarrow{\Delta} & H_{k-1}(A) & \longrightarrow\cdots\\ & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & \\ \cdots\longrightarrow & H_k(B) & \xrightarrow[i_*]{} & H_k(Y) & \xrightarrow[j_*]{} & H_k(Y,B) & \xrightarrow[\Delta]{} & H_{k-1}(B) & \longrightarrow\cdots\end{array}$$

对于奇异上同调自然也有类似的命题.

对于单纯理论，必须小心. 若 K, K_1 是复形，则它们的空间之间的连续映射 $f: |K| \longrightarrow |K_1|$ 自然是有意义的，但在现在的范畴中不能用它，因为 f 一般并不诱导出链映射 $f_\# : C(K) \longrightarrow C(K_1)$，只有当 f 是特殊的映射时，才有链映射 $f_\#$. 令 $V(K)$ 和 $V(K_1)$ 各为 K 和 K_1 的顶点集.

定义 集论意义下的映射 $f: V(K) \longrightarrow V(K_1)$ 若有以下性质则称为单形映射只要 $(v_0, v_1, \cdots, v_k) \subset V(K)$ 在 K 之一个单形 σ 内，其象 $(f(v_0), f(v_1), \cdots, f(v_k))$ 也在 K_1 之一个单形 $\tilde{\sigma}$ 内.

通常就说 $f: K \longrightarrow K_1$ 是单形映射. 现在，它可以诱导一个链映射

$$f_\# : C(K) \longrightarrow C(K_1),$$

$$[v_0, \cdots, v_k] \longmapsto [f(v_0), \cdots, f(v_k)]$$

$(f(v_i)$ 中可能有相同的，这时 $[f(v_0), \cdots, f(v_k)]$ 可能是 $C(K_1)$ 中的零元)，至此我们可以和上面一样得到单纯理论中的正合性定理.

单形映射 $f: K \longrightarrow K_1$ 完全是一个组合的对象，于是又产生了它与空间 $|K|, |K_1|$ 有什么关系的问题. 答案很容易：若 $f: K \longrightarrow K_1$ 是单形映射，它必然十分自然地诱导出一个连续映射 $\bar{f}: |K| \longrightarrow |K_1|$. 在 $|K|$ 的任一个单形 $\sigma = (v_0, \cdots, v_k)$ 中，用仿射线性定义 $\bar{f}$，

$$\bar{f}\left(\sum \lambda_i v_i\right) = \sum \lambda_i f(v_i),$$

它是有意义的，因为所有 $f(v_i)$ 在 K_1 的同一单形之内. 这个映射 $\bar{f}$ 是分片线性(piecewice linear，简记为 PL)的，称为 $|K|$ 到 $|K_1|$ 的单纯映射，也简称为 K 到 K_1 的单纯映射，因为它在 $|K|$ 中 σ 这一片内按仿射意义是线性的（有时 $\bar{f}$ 就记为 f）. 它们显然是一类特别的映射. 例如，在 R^2 上它们是图象为折线的映射. 它们虽然可以用于解决范畴论方面的问题（现在是抽象单纯复形和单形映射的范畴以及多面体和单纯映射的范畴），但实质的问题仍然存在，不是 PL 的映射 $\varphi: |K| \longrightarrow |K_1|$ 仍然太多. 然而，组合拓扑学的基本思

想之一就是：任意连续映射 φ 总是同伦于一个单形映射. 就同调理论而言，这已经足够了. 这将是我们的下一个主题.

§3. 同伦，单纯逼近

同伦在与同调有关方面的基本问题已经讨论过了. 若 $f,g: M \longrightarrow N$ 是同伦的光滑映射，则它们在 de Rham 群上诱导出的映射 f^* 和 $g^*: H^*(N) \longrightarrow H^*(M)$ 是相同的. 这一点，就是 Poincaré 引理. 我们想知道，这对于奇异同调和单纯同调是否同样为真. 当然我们知道，答案必然为是，因为 de Rham 定理已经肯定这些理论都是相同的. 但是却与历史发展不符，在代数拓扑中，早在 de Rham 理论之前，同伦论就有了相当的独立发展. 起点是这样的，已知一个单纯复形 K，同伦论处理的将是空间 $|K| \times I (I=[0,1])$. 不幸，$|K| \times I$ 并不自然地成为一个单纯复形，对于单纯复形的范畴，实在令人恼火. 然而幸运的是，以一种自然的方式对 $|K| \times I$ 作三角剖分并不太难，只需对一个单形 $\sigma \in K$ 作三角剖分 $\sigma \times I$ 就行了. 例如，若 $\sigma=[v_0, v_1]$，下面的图象就是 $\sigma \times I$ 的三角剖分. 所以一般的办法就是用一组 $(k+1)$-单形

$$(-1)^l[v_0, v_1, \cdots, v_l, v_l', \cdots, v_k'], \quad l=0,1,\cdots,k \qquad (*)$$

来划分 $[v_0, v_1, \cdots, v_k] \times I$. 这种单形的作法是：从顶点 v_l 起转人新的顶点 v_l'，再加上符号 $(-1)^l$ 以改正其方向. 图 9—2 也说明

$$\partial(\sigma \times I) = -\sigma \times 0 + \sigma \times 1 - \partial\sigma \times I.$$

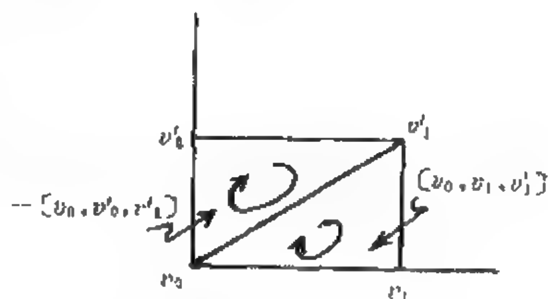


图 9—2

如果我们把 $\sigma \longmapsto \sigma \times I$ 看成一个算子 $H(\sigma)$，则上式可以写成

$$\partial H + H\partial = -\mathrm{id} \times 0 + \mathrm{id} \times 1,$$

此式很象链同伦关系，它一定是对的. 因为单纯理论只需用组合的

语言.所以我们实在并不真正需要在几何上将$|K|\times I$加以剖分.我们宁可按照上面所说来建立一个链同伦.同伦的组合概念如下:

定义 两个单纯映射$f,g:K\longrightarrow L$称为邻接的(contiguous),若对K中任一单形$\sigma=\langle v_0,\cdots,v_k\rangle$,顶点$\{f(v_0),\cdots,f(v_k),g(v_0),\cdots,g(v_k)\}$在$L$的同一单形$\tau$中.

若$f,g:K\longrightarrow L$是邻接的,可以作$f_{\#}$与$g_{\#}$间的链同伦如下

$$H: C_k(K)\longrightarrow C_{k+1}(L),$$

$$[v_0,\cdots,v_k]\longmapsto\sum_{i=0}^{k}(-1)^i[f(v_0),\cdots,f(v_i),g(v_i),\cdots,g(v_k)],$$

这个公式是模仿(*)式而来.要证明H确实是一个链同伦,即要证明

$$\partial H+H\partial=g_{\#}-f_{\#}.$$

很象前面证明$\partial^2=0$那样,需要细心地计算.例如

$$\begin{aligned}H\partial[v_0,v_1]&=H[v_1]-H[v_0]\\&=[f(v_1),g(v_1)]-[f(v_0),g(v_0)],\\\partial H[v_0,v_1]&=\partial\{+[f(v_0),g(v_0),g(v_1)]-[f(v_0),\\&\quad f(v_1),g(v_1)]\}\\&=+[g(v_0),g(v_1)]-[f(v_0),g(v_1)]\\&\quad+[f(v_0),g(v_0)]-[f(v_1),g(v_1)]\\&\quad+[f(v_0),g(v_1)]-[f(v_0),f(v_1)].\end{aligned}$$

相加得

$$\partial H[v_0,v_1]+H\partial[v_0,v_1]=g_{\#}[v_0,v_1]-f_{\#}[v_0,v_1].$$

对于奇异理论,我们需将(*)式变成一个映射.于是对于$0\leqslant l\leqslant k$,定义

$$\gamma_k^l:\Delta_{k+1}\longrightarrow\Delta_k\times I$$

为映Δ_{k+1}的顶点$\langle e_0,e_1,\cdots,e_{k+1}\rangle$按次为$\Delta_k\times I$中的点$\{e_0,\cdots,e_l,e_l',\cdots,e_k'\}$,再作线性拓展,这是可能的,因为$\Delta_{k+1}$和$\Delta_k\times I$都是凸集.若$f,g:X\longrightarrow Y$是同伦的,可以作一个链同伦

$$H_{\#}: S_k(X)\longrightarrow S_{k+1}(Y),$$

$$\sigma \longmapsto \sum_{i=0}^{k} (-1)^i H \circ (\sigma \times 1) \circ \gamma_k^i,$$

这里 $\sigma: \Delta_k \longrightarrow X$ 是 $S_k(X)$ 中之一元，$\sigma \times 1: \Delta_k \times I \longrightarrow X \times I$，$H: X \times I \longrightarrow Y$ 都是 f 与 g 的同伦，用同样的组合计算可以证明 $H_\#$ 确是 $f_\#$ 与 $g_\#$ 之间的链同伦.

在我们形式地写出定理之前，还要再作一点形式的推广. 两个映射 $f, g: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ 称为同伦的，若存在一个同伦

$$H: (X, A) \times I = (X \times I, A \times I) \longrightarrow (Y, B)$$

使 $H_0 = f, H_1 = g$. 这意味着对每个 t，

$$H_t: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

都把 A 送入 B 中，所以一对空间的映射是同伦的，则上面作的链同伦 $H_\#$ 总把 $S_k(A)$ 映入 $S_{k+1}(B)$. 因此诱导出相对群 $S_k(X, A)$ 和 $S_{k+1}(Y, B)$ 之间的链同伦.

类似，若 $f, g: K \longrightarrow L$ 以及 $f|K_1, g|K_1: K_1 \longrightarrow L_1$ 都是邻接的，则 $f, g: (K, K_1) \longrightarrow (L, L_1)$ 也是邻接的. 这样，我们有

定理（同伦） 若 $f, g: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ 是同伦的，则其诱导的同态必相同，即

$$f_* = g_*: H_*(X, A) \longrightarrow H_*(Y, B),$$

$$f_* = g_*: H_*(X) \longrightarrow H_*(Y),$$

$$(f|A)_* = (g|A)_*: H_*(A) \longrightarrow H_*(B).$$

对单纯同调与邻接映射以及对于各种上同调群，这个定理都成立.

同伦中最重要的一种情况即是收缩. 子集 $A \subset X$ 称为 X 的收缩，若有一个映射 $\gamma: X \longrightarrow A$（称为收缩映射）适合 $\gamma|A = \mathrm{id}$，即是可以把整个空间 X 推到 A 里面去而 A 中的任意点都不动. 例如，一点 $x_0 \in X$ 总是一个收缩. 令 $i: A \longrightarrow X$ 为包含映射，一个收缩 γ 就只不过是 $\gamma i = 1$，即收缩 γ 是包含映射的左逆. 所以，在同伦论中 $\gamma_* i_* = 1$ 意味着 i_* 有左逆，从而，$i_*: H(A) \longrightarrow H_*(X)$ 是单射. 从而把 $H_*(A)$ 变成了 $H_*(X)$ 的一个直和因子. 考虑长正合序列

$$\cdots\longrightarrow H_t(A)\xrightarrow{i_*}H_t(X)\longrightarrow H_t(X,A)\xrightarrow{\Delta}H_{t-1}(A)\xrightarrow{i_*}\cdots.$$

我们看到 $\Delta=0$,从而一个长序列分解成为短正合序列

$$0\longrightarrow H_t(A)\xrightarrow{i_*}H_t(X)\longrightarrow H_t(X,A)\longrightarrow 0,$$

因为 $\gamma_*i_*=1$,所以它是分解的. 于是

$$H_*(X)=H_*(A)\oplus\ker\gamma_*\cong H_*(A)\oplus H_*(X,A).$$

当 $A=\{x_0\}$ 为一点时,我们知道

$$H_k(x_0)=\begin{cases}R, & k=0;\\ 0, & k>0.\end{cases}$$

在作了以上分解以后,余下的部分 $H_*(X,x_0)\cong\ker\gamma_*=\tilde{H}_*(X)$ 称为简化群(reduced group),而 $\gamma_*: H_*(X)\longrightarrow H_*(x_0)=R$ 称为一个增广"augmentation".

再回到一般的考虑. 收缩 $\gamma: X\longrightarrow A$ 即是包含 $i: A\longrightarrow X$ 的左逆. $i\gamma=1$ 却显然是不可能的,只要 A 是 X 的一个真子集. 但 $i\gamma\sim 1$ 即同伦于恒等映射却是可能的,而在同伦中却成了真正的右逆 $i_*\gamma_*=1$,这样 $i_*: H_*(A)\longrightarrow H_*(X)$ 是一个同构(而 $H_*(X,A)=0$). 所以,如果有一个收缩 γ 使 $i\gamma\sim 1$,则 $A\subset X$ 称为"形变收缩核"(deformation retract). 若有一个同伦 $H: X\times I\longrightarrow X$ 使 $H_0=1$,而 $H_t|A=1$ 对一切 t 成立,即若 A 在整个同伦过程中是稳定的,则 A 称为"强形变收缩核"(strong deformation retract). 一个空间 X 若有一点 $x_0\in X$ 是它的形变收缩核则称为可缩的. 这种空间必有平凡的同调. 凸集或矢量空间中的星形集都是可缩空间的简单例子. 强形变收缩核(以下简记为 SDR)不太自明的例子有

(1) 对于单形 σ,集 $(\sigma\times 0)\cup(\partial\sigma\times I)\subset\sigma\times I$ 是一个 SDR,对于 $\sigma=[0,1]$. 从图 9—3 可以看到其证明.

(2) 正交群 $O(n)\subset GL(n)$ 是一般线性群 $GL(n)$(实的或复的)的 SDR,这是表述 Gram-Schmidt 正交化手续的一个奇妙的方法. 一个元 $\varphi\in GL(n)$ 就是 R^n 的一基底 $\varphi=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$.

第一步是把 v_1 变成 $v_1/|v_1|$，这其实是一个同伦

$$H: GL(n)\times I \longrightarrow GL(n),$$

$$(v_1,\cdots,v_n),t\longmapsto \left(t\frac{v_1}{|v_1|}+(1-t)v_1,v_2,\cdots,v_n\right).$$

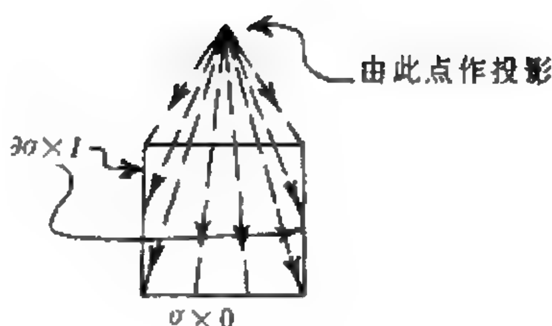


图 9—3

因为 $\frac{t}{|v_1|}+(1-t)>0$，故右方仍是一个基底，而我们有 $H_0=1$，$H_1(v_1)=v_1/|v_1|$，且若 $|v_1|=1$，恒有 $H_t(v_1)=v_1$. 所以把 v_1 变成 $v_1/|v_1|$ 可以通过适当的同伦来实现. 于是设 $|v_1|=1$. 第二步是把 v_2 变成

$$v_2'=v_2-(v_2,v_1)v_1,$$

这也可以用一个适当的同伦 G 来实现. 所谓适当即指当 $(v_2,v_1)=0$ 时，$G_t(v_2)=v_2$：

$$G: GL(n)\times I\longrightarrow GL(n),$$

$$(v_1,v_2,\cdots,v_n),t\longmapsto(v_1,v_2-t(v_2,v_1)v_1,v_3,\cdots,v_n).$$

这个例子的重要性在于 $O(n)$ 是紧的，而 $GL(n)$ 肯定不是. 在讨论 Lie 群时，紧群的理论比之非紧的 Lie 群有极大优点（例如紧群的一切表示都是完全可约的）. 所以若能过渡到紧的 Lie 子群而又不失去同调方面的信息（以及同伦方面的信息，这甚至更重要）将是很有用的. 事实是，一个 Lie 群具有紧的 Lie 子群是很一般的现象，$O(n)\subset GL(n)$ 只是一个特例而已.

现在我们回到单纯同伦. 邻接性的概念和单形映射一样，纯粹是一个组合的概念，但是也和单形映射一样，它有直接的拓扑上的意义. 即是说，若 $f,g: K\longrightarrow L$ 是邻接的，则它们诱导的连续映射 $\bar{f},\bar{g}: |K|\longrightarrow|L|$ 一定是同伦的. 这理由几乎是自明的. 令 $\sigma=\langle v_0,v_1,\cdots,v_k\rangle$ 是 K 中的一个单形，则由定义，所有的顶点 $\{f(v_i),g(v_i)\}\subset\tau$，$\tau\in L$ 也是一个单形. 因此，若 $x\in\sigma$，则点 $\bar{f}(x)=\bar{f}(\sum\lambda_i v_i)=\sum\lambda_i f(v_i)$ 和 $\bar{g}(x)=\bar{g}(\sum\lambda_i v_i)=\sum\lambda_i g(v_i)$ 也都在 τ 内. 所需的同伦就是在 τ 内连接 $\bar{f}(x)$ 和 $\bar{g}(x)$ 的线段，即

$$H(x,t)=t\bar{f}(x)+(1-t)\bar{g}(x).$$

这个作法虽然简单，却再次体现了处理多面体的基本道理. 在多面体 $|K|$ 上，时常可以分块线性地做一些事. 例如，只需 $\bar{f},\bar{g}: |K| \longrightarrow |L|$ 是连续映射，而且 $\bar{f}(x),\bar{g}(x)$ 总在 L 的同一个单形 τ 中，不论它们是否单形映射所诱导出的，$H(x,t)$ 总是有意义的. 这就引出了多面体拓扑学中的一基本作法即单纯逼近. 令 K,L 是单纯复形，$f: K\longrightarrow L$ 是一个单形映射，$\varphi: |K|\longrightarrow|L|$ 是多面体的连续映射，如果对一切 $x\in|K|$，$\varphi(x)$ 和 $\bar{f}(x)$ 总在 L 的同一单形之中，f 就称为 φ 的单纯逼近. 于是，$\varphi\sim\bar{f}$ 是同伦的.

已给 $\varphi: |K|\longrightarrow|L|$，不一定可能找到 φ 的单纯逼近. 例如，设 $\langle v_0,v_1\rangle\in K$ 是一个单形. 若

$$\varphi(v_0)\in\tau_0,\quad \varphi(v_1)\in\tau_1$$

在 L 的两个没有公共面的单形中，要找一个单纯逼近是无望的. 换言之，对任一单形

$$\sigma=\langle v_0,v_1,\cdots,v_k\rangle,$$

要是 $\varphi(v_0),\varphi(v_1),\cdots,\varphi(v_k)$ 比较接近就好了. 对于任意的连续映射 φ，情况当然不必如此. 但是，若把 K 分割得充分细使 K 中各个单形都很小，那么，φ 的连续性就会使 $\varphi(v_0),\varphi(v_1),\cdots,\varphi(v_k)$ 很靠近. 我们先分析，需要分得多么细. 记住若 $v\in V(K)$ 是一个顶点，而 $b_v: |K|\longrightarrow R$ 是第 v 个重心坐标函数，则有开集

$$\begin{aligned}\mathrm{st}(v)&=\{x\in|K|\,|\,b_v(x)>0\}\\&=\bigcup\{\sigma^\circ\,|\,v\text{ 是 }\sigma\text{ 的一个顶点}\}.\end{aligned}$$

$\{v_0,v_1,\cdots,v_k\}$ 张 K 中一个单形的充分必要条件是

$$\bigcap\mathrm{st}(v_i)\neq\varnothing.$$

于是有

引理（逼近判据） 映射 $f: V(K)\longrightarrow V(L)$ 是 $\varphi: |K|\longrightarrow|L|$ 的单纯逼近，当且仅当对一切 $v\in V(K)$，

$$\varphi(\mathrm{st}(v))\subset\mathrm{st}(f(v)).\qquad(*)$$

证 设 f 是 φ 的单纯逼近. 若 $x\in\mathrm{st}(v)$，则 $b_v(x)>0$，但若 f 是

单纯映射，则 $b_{f(v)}(f(x))>0$. 今设 $\varphi(x)\in\tau^\circ$，则由单纯逼近的定义，$f(x)\in\tau$. 从而，$b_{f(v)}(f(x))>0$ 导致 $f(v)$ 是 τ 的一个顶点. 因 $\varphi(x)\in\tau^\circ$，故有 $\varphi(x)\in\mathrm{st}(f(v))$.

反之，设(*)成立，先证明 f 是单形映射. 若 $\langle v_0,v_1,\cdots,v_k\rangle=\sigma$ 是 K 中一个单形，则 $\bigcap\limits_i\mathrm{st}(v_i)\neq\varnothing$. 所以

$$\varnothing\neq\varphi(\bigcap_i\mathrm{st}(v_i))\subset\bigcap_i\varphi(\mathrm{st}(v_i))\subset\bigcap_i\mathrm{st}f(v_i).$$

为了证明 f 是 φ 的单纯逼近，令 $x\in\sigma^\circ$，$\varphi(x)\in\tau^\circ$ 而 v 是 σ 的一个顶点. 于是 $x\in\mathrm{st}(v)$，$\varphi(x)\in\mathrm{st}(f(v))$，从而 $f(v)$ 是 τ 的一个顶点. 既然对 σ 的一切顶点都是如此，而我们又知道 f 是单纯映射，从而 $\bar{f}(\sigma)\subset\tau$，$\bar{f}(x)\in\tau$.

现在很容易得到一个单纯逼近了. 先回忆一个点集拓扑学中的事实.

Lebesgue 引理 令 X 为一个紧度量空间而 $\{U_i\}$ 是 X 的一个开覆盖，则必有一常数 $\varepsilon>0$ 使得 X 之任一子集 A 只要直径 $\leqslant\varepsilon$ 必含于某个 U_i 中（ε 称为 Lebesgue 数）.

从任一连续映射 $\varphi:|K|\longrightarrow|L|$ 开始，我们有 $|L|$ 的一个开覆盖 $\{\mathrm{st}(w)\mid w\in V(L)\}$，从而也有 $|K|$ 的一个开覆盖 $\{\varphi^{-1}\mathrm{st}(w)\mid w\in V(L)\}$. 因为 $|K|$ 是紧度量空间（记住 K 是有限的），故有 Lebesgue 数 $\varepsilon>0$. 于是我们可以重分 K 为 K_1，使得在 K_1 中所有 $\mathrm{st}(v)$ 的直径都小于或等于 ε，$v\in V(K_1)$. 故对一切 $v\in V(K_1)$，必有某个 $w\in V(L)$ 使

$$\varphi(\mathrm{st}(v))\subset\mathrm{st}(w).$$

对每个 v 都取这样一个 w，再令 $f(v)=w$ 即得所求的单纯逼近.

逼近判据有一个明显的但有用的推论：若 $\varphi:|K|\longrightarrow|L|$，$\psi:|L|\longrightarrow|M|$ 各有单纯逼近 $f:K\longrightarrow L$ 和 $g:L\longrightarrow M$，则 gf 是 $\psi\varphi$ 的单纯逼近. 其原因是，对任一 $v\in V(K)$，

$$(\psi\varphi)(\mathrm{st}(v))\subset\psi(\varphi\mathrm{st}(v))\subset\psi(\mathrm{st}f(v))\subset\mathrm{st}((gf)(v)).$$

单纯逼近提供了证明 $H_*(K)$ 是拓扑不变量的手段，事实上可

以证明更强的结果：$H_*(K)$是$|K|$的伦型不变量. 这一证明，由于用到同调群的重分不变性，留待下一节. 我们用一个关于单纯逼近的性质作为本节的结束. 设单纯映射 $f,g: K \longrightarrow L$ 均为连续映射 $\varphi: |K| \longrightarrow |L|$ 的单纯逼近. 则对任一单形 $\sigma=(v_0,\cdots,v_p)\in K$ 由逼近判据可得($b(\sigma)$为 σ 的重心)

$$\varnothing \neq \varphi(b(\sigma)) \subset \varphi(\bigcap_{i=0}^{p} \mathrm{st}(v_i)) \subset \bigcap_{i=0}^{p} \varphi(\mathrm{st}(v_i)) \subset \bigcap_{i=0}^{p} \mathrm{st} f(v_i),$$

同理，$\varnothing \neq \varphi(b(\sigma)) \subset \bigcap_{i=0}^{p} \mathrm{st} g(v_i)$，从而

$$\varnothing \neq \varphi(b(\sigma)) \subset (\bigcap_{i=0}^{p} \mathrm{st} f(v_i)) \cap (\bigcap_{i=0}^{p} \mathrm{st} g(v_i)),$$

所以$\{f(v_0),\cdots,f(v_p),g(v_0),\cdots,g(v_p)\}$属于 L 的某一单形，即单纯映射 f,g 是邻接的，从而

$$f_* = g_*: H_*(K) \longrightarrow H_*(L),$$

故得

性质 φ 的二个单纯逼近 f,g 的诱导同态 f_*,g_* 相等.

§4. 切除和 Mayer-Vietoris 序列

我们现在要讨论的问题是单纯同调 $H_*(K)$在重分下的不变性，这多少是一个技术性的问题. 然而，这里用到的技术和想法会引起一些结果，即所谓 Mayer-Vietoris 序列，它在同调的种种形式性质中是使同调成为一个可计算函子的最重要的一个. 这也是“其它”函子，即同伦函子，所唯一不具备的性质. 因此使得同伦比同调难办得多. 所以我们并不是在处理一个技术性的东西，而是一个关键性的实质问题.

先从一些简单的考查开始. 令

$$\sigma = [v_0, v_1, \cdots, v_k]$$

是一个(有序)单形. σ 及其所有的面显然构成一个复形，仍记之为 σ. 作为一个复形，什么是它的同调 $H_*(\sigma)$? 包含 $v_0 \longrightarrow \sigma$ 和投影

$V(\sigma)\xrightarrow{\pi}v_0$显然都是单形映射.十分容易看到,$\pi\iota=1$和$\iota\pi\sim 1$是邻接的.因此$\iota_*\pi_*=1,\pi_*\iota_*=1$而使$H_*(\sigma)$与$H_*(pt)$相同.我们称$\sigma$是“零调”(acyclic)的,与此平行,空间$|\sigma|$的奇异同调$H_*(|\sigma|)$也是零调的,因为$|\sigma|$是可缩的.

令K为一单纯复形.重心重分包含了所有这样形状的单形$\sigma'=\langle b_0,b_1,\cdots,b_r\rangle$,其中$b_i$是$K$中某个单形$\sigma_i$的重心,而且

$$\sigma_0\prec\sigma_1\prec\cdots\prec\sigma_r$$

是σ_r的一串面.图9—4给出了一个2-单形的重心重分.我们可以把重心重分看作一个算子sd,其定义是递推的:$\mathrm{sd}\sigma=\mathrm{sd}(\partial\sigma)*b_0$,这里$*$表示添加一个顶点,例如$\langle v_0,v_1\rangle*b_2=\langle v_0,v_1,b_2\rangle$,只要它确实是一个单形.现在我们已把它变成一个算子.我们想归纳地定义一个链映射

$$\mathrm{sd}:C(K)\longrightarrow C(K').$$

并使它有以下性质:

(1) 若$c\in C(L)$是K的子复形L中的一个链,则$\mathrm{sd}(c)\in C(L')$也是K'的子复形L'中的一个链.$C_0(K)$是由$V(K)$生成的,$V(K)$是$V(K')$的子集,所以定义$\mathrm{sd}:C_0(K)\longrightarrow C_0(K')$就是包含映射.当然(1)是成立的.

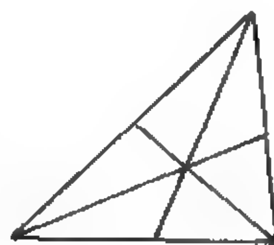


图 9—4

假设对于$i<k$, $\mathrm{sd}:C_i(K)\longrightarrow C_i(K')$已经定义.而且sd与$\partial$可交换并适合(1).令

$$\sigma=[v_0,v_1,\cdots,v_k]$$

是K的一个有序k-单形.则$\mathrm{sd}(\partial\sigma)$已定义,而由(1),$\mathrm{sd}(\partial\sigma)\in C[(\partial\sigma)']$.所以$\sigma$的重心$b$仿射独立于$\mathrm{sd}(\partial\sigma)$中之一切顶点,而我们可以定义

$$\mathrm{sd}\sigma=(-1)^k\mathrm{sd}(\partial\sigma)*b,$$

$*$与∂的关系是很简单的,显然我们有

$$\begin{aligned}\partial(\mathrm{sd}\sigma)&=\partial[(-1)^k\mathrm{sd}(\partial\sigma)*b]\\&=\mathrm{sd}(\partial\sigma)+(-1)^k[\partial\mathrm{sd}(\partial\sigma)]*b\end{aligned}$$

$$= \mathrm{sd}(\partial\sigma) + (-1)^k[\mathrm{sd}(\partial\partial\sigma)]^* b$$
$$= \mathrm{sd}(\partial\sigma),$$
即 sd 是一个链映射，显然 $\mathrm{sd}\sigma \in C(\sigma')$. 所以(1)仍成立.

$\mathrm{sd}: C(K) \longrightarrow C(K')$给出了一个比较 $H_*(K)$和 $H_*(K')$的手段. 现在我们定义一个逆. 有一个很容易的单形映射 $\pi: K' \longrightarrow K$，若 $b \in V(K')$是 K'中一个顶点. 它必是 K 中某个单形 σ 的重心. 就定义 $\pi(b)$为 σ 的任何一个顶点. 尽管 π 的定义有任意性，K' 的定义保证了 π 仍是一个单形映射.

我们说：$\pi_\# \mathrm{sd}: C(K) \longrightarrow C(K')$链同伦于恒等映射，这意味着存在一个映射 $H: C_k(K) \longrightarrow C_{k+1}(K)$，且
$$\partial H + H\partial = \pi_\# \mathrm{sd} - 1. \qquad (*)$$

我们归纳地定义 H 使得(*)和象(1)那样的"承载条件"(carrier condition)仍成立，即若 $c \in C(L)$是子复形 $L \subset K$ 中的一个链，那末 $H(c)$也是.

从 $k=-1$ 开始，于是(*)式的左方为 0. 但很容易看到，在 $C_{-1}(K)$上 $\pi_\# \mathrm{sd} = 1$，故(*)成立.

设当 $i<k$ 时 H 已经定义，σ 是一个有向 k-单形，则 $H\partial\sigma$ 有定义，而且
$$H\partial\sigma \subset C(\partial\sigma) \subset C(\sigma).$$
考虑下面的元素
$$\pi_\# \mathrm{sd}\sigma - \sigma - H\partial\sigma = a. \qquad (**)$$
它是 $C(\sigma)$中的一个链，而且
$$\partial a = \partial(\pi_\# \mathrm{sd}\sigma - \sigma - H\partial\sigma) = \pi_\# \mathrm{sd}(\partial\sigma) - (\partial\sigma) - \partial H(\partial\sigma)$$
$$= \pi_\# \mathrm{sd}(\partial\sigma) - \partial\sigma - [\pi_\# \mathrm{sd}(\partial\sigma) - \partial\sigma - H\partial(\partial\sigma)]$$
$$= 0 \quad (\text{由归纳假设}).$$
但 $C(\sigma)$是零调的，故必有 $b \in C(\sigma)$使 $a = \partial b$，定义 $H\sigma = b$，于是承载条件满足，而(**)式成为
$$\partial H\sigma + H\partial\sigma = \pi_\# \mathrm{sd}\sigma - \sigma,$$
即同伦条件也成立.

以上的证法就是所谓基于零调承载子的逐步构造法. 它的成功在于我们处理的是自由模,因此只需对生成元以任意方式进行构造,而在每个生成元上,我们总是在一个零调承载子中,所以这种任意的构造是可能的. 这种作法今后会用得很频繁. 例如,用同样的推理,可证 $\mathrm{sd}\pi_{\#}: C(K')\longrightarrow C(K')$ 也链同伦于恒等映射. 所以 sd 诱导出一个同构

$$\mathrm{sd}_*: H_*(K)\longrightarrow H_*(K').$$

并且 $\pi_*: H_*(K')\longrightarrow H_*(K)$ 是 sd_* 的同构逆,即 $\pi_*\circ\mathrm{sd}_*=1_{H_*(K)}$,$\mathrm{sd}_*\circ\pi_*=1_{H_*(K')}$. 这就是复形 K 的同调群的重分不变性.

在上一节 Lebesgue 引理的证明中已经看到,设 $\varphi: |K|\longrightarrow|L|$,则可重分 K 为 K_1,只要对任意 $v\in V(K)$ 均有 $\mathrm{st}(v)$ 的直径充分小,则对 φ 可作出单纯逼近 $f: K_1\longrightarrow L$. 现在指出 K 的重分 K_1 可由有限次重心重分来实现. 记 $k=\dim K$,任取单形 $\sigma\in K$,设 $\dim\sigma=p\leqslant k$,则 σ 作重心重分后的任一单形 τ 满足(见第七章 § 2)$\mathrm{diam}\tau\leqslant\frac{p}{p+1}\mathrm{diam}\sigma\leqslant\frac{k}{k+1}\mathrm{diam}\sigma$. 若定义复形 K 的网径为 $\mathrm{mesh}K=\max\limits_{\sigma\in K}\{\mathrm{diam}\sigma\}$,则对 K 的一次重心重分 K' 有 $\mathrm{mesh}K'\leqslant\frac{k}{k+1}\mathrm{mesh}K$. 设 K 的 m 次重心重分归纳地定义为 $K^{(m)}=(K^{(m-1)})'$(不要将 $K^{(m)}$ 与 K 的 m 维骨架 K^m 混淆),则有

$$\mathrm{mesh}K^{(m)}\leqslant\left(\frac{k}{k+1}\right)^m\mathrm{mesh}K.$$

因而可取 m 充分大时的 $K^{(m)}$ 作为 K_1,它使得 $\varphi: |K^{(m)}|\longrightarrow|L|$ 有单纯逼近 $f: K^{(m)}\longrightarrow L$,故定义了 $f_*: H_*(K^{(m)})\longrightarrow H_*(L)$. 若记 $\mathrm{sd}_*^{(m)}=\mathrm{sd}_*\circ\cdots\circ\mathrm{sd}_*$,则有 $\mathrm{sd}_*^{(m)}: H_*(K)\longrightarrow H_*(K^{(m)})$,从而定义了 $f_*\circ\mathrm{sd}_*^{(m)}: H_*(K)\longrightarrow H_*(L)$. 我们证明如下

定理 设 $\varphi: |K|\longrightarrow|L|$ 为连续映射,则存在 $m\in\mathbf{Z}_+$,使得 $f: K^{(m)}\longrightarrow L$ 为 $\varphi: |K^{(m)}|\longrightarrow|L|$ 的单纯逼近,则同态 $f_*\circ\mathrm{sd}_*^{(m)}: H_*(K)\longrightarrow H_*(L)$ 与 m 及 f 的选择无关. 这个同态称为 φ 的诱导同态,记作 $\varphi_*: H_*(K)\longrightarrow H_*(L)$.

证 对另外满足定理条件的 $\widetilde{m}$ 及 $\widetilde{f}: K^{(\widetilde{m})}\longrightarrow L$，我们证明有

$$\widetilde{f}_* \circ \mathrm{sd}_*^{(\widetilde{m})} = f_* \circ \mathrm{sd}_*^{(m)} : H_*(K) \longrightarrow H_*(L).$$

不妨设 $\widetilde{m}\geqslant m$. 当 $\widetilde{m}=m$ 时，由于 $\widetilde{f}$ 与 f 均为 $\varphi: |K^{(m)}|\longrightarrow|L|$ 的单纯逼近，前已证 $\widetilde{f}_*=f_*$，故 $\widetilde{f}_*\circ\mathrm{sd}_*^{(m)}=f_*\circ\mathrm{sd}_*^{(m)}$. 当 $\widetilde{m}>m$ 时，可对差 $\widetilde{m}-m$ 作归纳，故只须证 $\widetilde{m}=m+1$，$\widetilde{f}: K^{(m+1)}\longrightarrow L$ 时有 $\widetilde{f}_*\circ\mathrm{sd}_*^{(m+1)}=f_*\circ\mathrm{sd}_*^{(m)}$. 由如下图表

$$\begin{array}{ccccc} H_*(K) & \xrightarrow{\mathrm{sd}_*^{(m)}} & H_*(K^{(m)}) & \xrightarrow{f_*} & H_*(L) \\ & \searrow^{\mathrm{sd}_*^{(m+1)}} & \mathrm{sd}_*\downarrow\ \uparrow\pi_* & \nearrow_{\widetilde{f}_*} & \\ & & H_*(K^{(m+1)}) & & \end{array}$$

以及 $\widetilde{f}$ 和 $f\circ\pi$ 均为 $\varphi: |K^{(m+1)}|\longrightarrow|L|$ 的单纯逼近，故 $\widetilde{f}_*=(f\circ\pi)_*=f_*\circ\pi_*$，再由 $\pi_*\circ\mathrm{sd}_*=1$ 得

$$\widetilde{f}_*\circ\mathrm{sd}_*^{(m+1)}=f_*\circ\pi_*\circ\mathrm{sd}_*^{(m+1)}=f_*\circ\mathrm{sd}_*^{(m)}.$$

现在我们来证明复形诱导同态的主要性质.

定理 设 $\varphi: |K|\longrightarrow|L|$ 为连续映射，则诱导同态 $\varphi_*: H_*(K)\longrightarrow H_*(L)$ 有如下性质：

(1) 设 $\psi: |L|\longrightarrow|M|$ 也是连续映射，则

$$(\psi\circ\varphi)_*=\psi_*\circ\varphi_*: H_*(K)\longrightarrow H_*(M);$$

(2) $(1_{|K|})_*=1_{H_*(K)}: H_*(K)\longrightarrow H_*(K)$;

(3) 设 $\varphi\simeq\psi: |K|\longrightarrow|L|$，则

$$\varphi_*=\psi_*: H_*(K)\longrightarrow H_*(L).$$

证 (1) 由单纯逼近定理，存在 $n\in\mathbf{Z}_+$ 以及 $g: L^{(n)}\longrightarrow M$ 为 $\psi: |L^{(n)}|\longrightarrow|M|$ 的单纯逼近. 又存在 $m\in\mathbf{Z}_+$ 以及 $h: K^{(m)}\longrightarrow L^{(n)}$ 为 $\varphi: |K^{(m)}|\longrightarrow|L^{(n)}|$ 的单纯逼近. 设 $\pi^{(n)}: L^{(n)}\longrightarrow L$ 为由 $\pi: L'\longrightarrow L$ 归纳地定义的，则 $f:=\pi^{(n)}\circ h: K^{(m)}\longrightarrow L$ 为 $\varphi: |K^{(m)}|\longrightarrow|L|$ 的单纯逼近. 按定义有 $\varphi_*=f_*\circ\mathrm{sd}_*^{(m)}$，$\psi_*=g_*\circ\mathrm{sd}_*^{(n)}$，利用 $f_*=\pi_*^{(n)}\circ h_*$ 及 $\mathrm{sd}_*\circ\pi_*=1$ 得

$$\psi_*\circ\varphi_*=g_*\circ\mathrm{sd}_*^{(n)}\circ f_*\circ\mathrm{sd}_*^{(m)}$$

$$=g_* \circ \mathrm{sd}_*^{(n)} \circ \pi_*^{(n)} \circ h_* \circ \mathrm{sd}_*^{(m)} = g_* \circ h_* \circ \mathrm{sd}_*^{(m)}.$$

由于 $g \circ h$ 是 $\psi \circ \varphi : |K^{(m)}| \longrightarrow |M|$ 的单纯逼近，故得

$$(\psi \circ \varphi)_* = (g \circ h)_* \circ \mathrm{sd}_*^{(m)} = g_* \circ h_* \circ \mathrm{sd}_*^{(m)} = \psi_* \circ \varphi_*.$$

(2) 由于恒等映射在链水平就诱导出恒等同构，在同调水平更是如此.

(3) 设 $H : |K| \times I \longrightarrow |L|$ 为连接 φ 与 ψ 的伦移. 对 $t \in I$，$h_t(x) := H(x,t)$ 定义了 $h_t : |K| \longrightarrow |L|$，因 $\{\mathrm{st}w \mid w \in V(L)\}$ 为 $|L|$ 的开覆盖，H 连续，所以 $\{H^{-1}(\mathrm{st}w) \mid w \in V(L)\}$ 为 $|K| \times I$ 的开覆盖，由 Lebesgue 引理，存在 $m \in \mathbf{Z}_+$ 和正整数 r，使得对任意 $v \in V(K^{(m)})$ 和 $k = 1, \cdots, r$，存在 $w \in V(L)$ 满足

$$(\mathrm{st}v) \times \left[\frac{k-1}{r}, \frac{k}{r}\right] \subset H^{-1}(\mathrm{st}w).$$

故 $h_{(k-1)/r}(\mathrm{st}v) \subset \mathrm{st}w$，$h_{k/r}(\mathrm{st}v) \subset \mathrm{st}w$. 从而若令 $\varphi_k(v) = w$，则诱导的单纯映射 $\varphi_k : K^{(m)} \longrightarrow L$ 为 $h_{(k-1)/r}, h_{k/r} : |K^{(m)}| \longrightarrow |L|$ 二者的单纯逼近. 所以 $(h_{(k-1)/r})_* = (h_{k/r})_*$. 从而

$$\varphi_* = (h_0)_* = \cdots = (h_1)_* = \psi_*.$$

利用上述定理容易证明

定理 设 $\varphi : |K| \longrightarrow |L|$ 为同伦等价（即存在 $\psi : |L| \longrightarrow |K|$，使得 $\psi \circ \varphi \simeq 1 : |K| \longrightarrow |K|$，以及 $\varphi \circ \psi \simeq 1 : |L| \longrightarrow |L|$）则诱导同态 $\varphi_* : H_*(K) \longrightarrow H_*(L)$ 为同构映射，即同调群 $H_*(K)$ 为 $|K|$ 的伦型不变量（特别蕴涵了 $H_*(K)$ 是 $|K|$ 的拓扑不变量）.

证 由 $\psi \circ \varphi \simeq 1$，$\varphi \circ \psi \simeq 1$ 以及上述定理得 $\psi_* \circ \varphi_* = 1$，$\varphi_* \circ \psi_* = 1$，所以 φ_*，ψ_* 均为同构映射（且互为同构逆）.

在奇异理论中，我们不需要重分什么. 但算子 sd 在别的地方仍很有用. 为了启发出这一点，我们仍然先看组合理论. 令 K 为一单纯复形. 设把 K 分成两个子复形 $K = K_1 \cup K_2$，即，一个单形连同其一切面都在 K_1 或 K_2 中，于是 $C(K) = C(K_1) + C(K_2)$ 是模 $C(K_1)$ 与 $C(K_2)$ 之和（即每个 $c \in C(K)$ 必可写成 $c = c_1 + c_2$，$c_1 \in C(K_1)$，$c_2 \in C(K_2)$）. 但是一般说来这并不是直和，因为可能交 $L = K_1 \cap K_2$

为非空. 这一点可以这样来处理, 我们自己作一直和 $C(K_1)\oplus C(K_2)$ 并定义一个自然的映射

$$C(K_1)\oplus C(K_2)\longrightarrow C(K),\quad (c_1,c_2)\longmapsto c_1-c_2,$$

这显然是全射, 而且其核同构于 $C(L)$. 所以我们有正合序列

$$0\longrightarrow C(K_1\cap K_2)\longrightarrow C(K_1)\oplus C(K_2)\longrightarrow C(K_1\cup K_2)\longrightarrow 0,$$

$C(K_1)\oplus C(K_2)$ 可以用一种显然的方式变成一个链复形. 于是上而就是复形的一个正合序列, 再应用基本引理, 就可以得到一个长正合序列

$$\cdots\longrightarrow H_i(K_1\cap K_2)\longrightarrow H_i(K_1)\oplus H_i(K_2)\longrightarrow H_i(K_1\cup K_2)$$
$$\xrightarrow{\Delta} H_{i-1}(K_1\cap K_2)\longrightarrow\cdots,$$

其中有一个适当的同态 Δ 把它们连接起来. 这就叫做"偶"(couple) $\{K_1,K_2\}$ 的 Mayer-Vietoris 序列(我们保留"对"(pair)(K,L)一词专指 $L\subset K$ 为子复形的情况). 它说明, 如果我们已经有了 $K_1\cup K_2$ 的各块上的信息 $H_*(K_1)$, $H_*(K_2)$ 和 $H_*(K_1\cap K_2)$, 则原则上可以算出 $H_*(K_1\cup K_2)$.

奇异理论的情况就不是这么简单. 若 X 是两个子空间之并——$X=X_1\cup X_2$, 很清楚, 一般 $S(X)\neq S(X_1)+S(X_2)$. 但是我们仍有子模 $S(X_1)+S(X_2)\subset S(X)$. 尽管它们不相等, 但是仍可能有相同的同调, 这就会给出一个 Mayer-Vietoris 序列. 不幸, 这就大错特错了. 举一个简单的例子, 令 $X=R=Q\cup S$(有理数 $\cup$ 无理数), 这里 $Q\cap S=\varnothing$. 因此 Mayer-Vietoris 序列意味着 $H_*(R)=H_*(Q)\oplus H_*(S)$. 因为 R 是可缩的, 所以 $\dim H_0(R)=1$. 但因为 Q 和 S 是完全不连通的(totally disconnected), 故

$$\dim H_0(Q)=\dim H_0(S)=\infty.$$

这样, 如果想 Mayer-Vietoris 序列存在, 至少对 X_1 和 X_2 要加上一些条件. 我们所需要的条件是, X_1 的内域 $\mathrm{Int}X_1=X$ 的含于 X_1 内的最大开子集. 我们有

定理 若 $\mathrm{Int}X_1\cup\mathrm{Int}X_2=X$, 则包含关系

$$S(X_1)+S(X_2)\subset S(X)$$

诱导出同调的同构.

证 (大纲)给出一个奇异单形 $\sigma:\Delta_t\longrightarrow X$,没有理由相信会有 $\sigma(\Delta_t)\subset X_1$ 或 $\sigma(\Delta_t)\subset X_2$. 但是 $X=\mathrm{Int}X_1\cup\mathrm{Int}X_2$ 这个条件意味着 Δ_t 有开覆盖 $\{\sigma^{-1}(\mathrm{Int}X_1),\sigma^{-1}(\mathrm{Int}X_2)\}$,所以有一个 Lebesgue 数. 重分 Δ_t,一定能把它切成许多小块,使其象或者在 X_1 中或者在 X_2 中,即是说,我们在几何上把 $S(X)$ 化成了 $S(X_1)+S(X_2)$. 另一方面,我们在单纯同调中已经知道,重分并不改变同调. 于是得证.

标准单形 Δ_t 自身就是一个拓扑空间,所以我们也可以考虑它的奇异链 $S(\Delta_t)$. 令 $\tau:\Delta_l\longrightarrow\Delta_t$ 是 Δ_t 中的一个奇异单形,τ 是否仿射线性,即是否有

$$\tau(\sum\lambda_i x_i)=\sum\lambda_i\tau(x_i),\sum\lambda_i=1.$$

这是有意义的,这种 τ 称为线性单形. Δ_t 中的线性单形构成 Δ_t 上 $S(\Delta_t)$ 的一个子复形 $L(\Delta_t)$. 例如,恒等映射 $\xi_t:\Delta_t\longrightarrow\Delta_t$ 就在 $L(\Delta_t)$ 中,而 $\sigma_\#:S(\Delta_t)\longrightarrow S(X)$ 把 ξ_t 变为 σ. 任意线性的 $\tau:\Delta_l\longrightarrow\Delta_t$ 完全由

$$\tau(e_i)=v_i$$

决定,这里 $\Delta_l=\langle e_0,\cdots,e_l\rangle$,所以我们可以把 τ 表示为 $\tau=\langle v_0,v_1,\cdots,v_l\rangle$. 利用这样的记号有

$$\partial\tau=\sum_i(-1)^i\langle v_0,\cdots,\hat{v}_i,\cdots,v_l\rangle.$$

换句话说,复形 $L(\Delta_t)$ 和 $C(K)$ 在形式上完全一样,所以我们可以逐字重复对单纯理论的程序. 我们可以归纳地定义一个链映射

$$\mathrm{sd}:L(\Delta_t)\longrightarrow L(\Delta_t)$$

如下:对于 $L_0(\Delta_t)$,令 $\mathrm{sd}=\mathrm{id}$,而对线性单形 $\tau:\Delta_l\longrightarrow\Delta_t$ 则定义

$$\mathrm{sd}\tau=(-1)^l\mathrm{sd}(\partial\tau)*b(\tau).$$

从几何观点看,象 $\mathrm{sd}\tau$ 确实在重分 $\tau(\Delta_l)$ 内,所以 $\mathrm{sd}\tau$ 的各块都很小. 和单纯理论的情况一样,也有一个链同伦

$$H:L_l(\Delta_t)\longrightarrow L_{l+1}(\Delta_t)$$

使 sd 与 id 同伦. 现在把它们转到

$$\mathrm{sd}: S(X) \longrightarrow S(X),$$
$$H: S(X) \longrightarrow S(X)$$

上如下:

$$\mathrm{sd}\sigma = \sigma_{\#}\mathrm{sd}(\xi_k), \quad H\sigma = \sigma_{\#}H(\xi_k),$$

其中 $\sigma: \Delta_k \longrightarrow X$ 是 $S(X)$中的一个元, $\xi_k: \Delta_k \longrightarrow \Delta_k$ 是恒等映射所给出的 $L_k(\Delta_k)$中之元.

现在可以证明以上的定理了. 其实我们没有理由限制于 $X = X_1 \cup X_2$ 的情况, 故令 $X = \bigcup\limits_i X_i$, 而

$$S\{X_i\} = \sum_i S(X_i) \subset S(X).$$

定理(小单形) 若{Int X_i}仍是 X 的一个覆盖, 则包含关系

$$S\{X_i\} \longrightarrow S(X)$$

诱导出同伦的同构. 即只需应用这样的奇异单形 $\sigma: \Delta_k \longrightarrow X$, 使对某个 i 有 $\sigma(\Delta_k) \subset X_i$.

证 利用与短正合序列

$$0 \longrightarrow S\{X_i\} \longrightarrow S(X) \longrightarrow S(X)/S\{X_i\} \longrightarrow 0$$

相关的长正合序列, 只需证明 $H_*(S(X)/S\{X_i\}) = 0$ 即可. 令$[c] \in H_*(S(X)/S\{X_i\})$, 则 $c \in S(X)$而 $\partial c \in S\{X_i\}$. 因为 c 是奇异单形的一个有限组合而$\{c^{-1}(\mathrm{Int}\ X_i)\}$是一个开覆盖, 我们可以重分足够的次数, 使得对充分大的 n 有 $\mathrm{sd}^n(c) \in S\{X_i\}$. sd^n 仍然链同伦于 id. 设 H 即为这个链同伦, 于是

$$\partial Hc + H\partial c = \mathrm{sd}^n c - c.$$

回到 H 的定义就容易看到, 可以使

$$H(S\{X_i\}) \subset S\{X_i\}.$$

所以有 $c = \partial x + y$, 这里

$$x = -Hc, \ y = \mathrm{sd}^n c - H\partial c \in S\{X_i\}.$$

但这正意味着在 $H_*(S(X)/S\{X_i\})$中$[c] = 0$.

这个定理有一个重要的一般性的问题. 虽然一个空间的奇异

复形 $S(X)$ 是大得出奇的，但是有时却可以用它的一个子复形来代替而不会影响其同调. 我们给这个现象一个形式的名称. 令 $X_1, X_2 \subset X$ 为 X 的子集，如果包含映射

$$S(X_1)+S(X_2) \longrightarrow S(X_1 \cup X_2)$$

诱导出同调的同构，就说 $\{X_1, X_2\}$ 是一个"切除"偶 (excisive couple). 这其实等价于一个更强的论断，即包含映射是一个链同伦等价(证：自由性加逐步构造). 显然有

定理 若 $\{X_1, X_2\}$ 是一个切除偶，则有 Mayer-Vietoris 序列

$$\cdots \longrightarrow H_k(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i} H_k(X_1) \oplus H_k(X_2)$$

$$\xrightarrow{j} H_k(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\Delta} H_{k-1}(X_1 \cap X_2) \longrightarrow \cdots,$$

其中 $i(c)=(i_{1*}(c), i_{2*}(c))$, $i_1: X_1 \cap X_2 \longrightarrow X_1$, $i_2: X_1 \cap X_2 \longrightarrow X_2$ 为包含映射；$j(c_1, c_2)=j_{1*}(c_1)-j_{2*}(c_2)$, $j_1: X_1 \longrightarrow X_1 \cup X_2$, $j_2: X_2 \longrightarrow X_1 \cup X_2$ 也是包含映射，Δ 是一个适当的连接的同态. 此外，这个序列对于连续映射是"自然"的.

有以下的图：

$$\begin{array}{ccc} S(X_1)/S(X_1 \cap X_2) & \longrightarrow & S(X_1 \cup X_2)/S(X_2) \\ & \searrow^{\varphi} \quad {}^{\psi}\nearrow & \\ & \{S(X_1)+S(X_2)\}/S(X_2) & \end{array}$$

φ 是纯粹由代表得到的同构(Noether 同构定理)，当 $\{X_1, X_2\}$ 为切除偶时，ψ 诱导出同调的同构. 故有

定理(切断) 若 $\{X_1, X_2\}$ 是一个切除偶，则包含映射 $(X_1, X_1 \cap X_2) \longrightarrow (X_1 \cup X_2, X_2)$ 诱导出一个同构

$$H_*(X_1, X_1 \cap X_2) \longrightarrow H_*(X_1 \cup X_2, X_2).$$

这个定理说明"切除"一词的来由，即是说，可以从 $(X_1 \cup X_2, X_2)$ 中切除一部分 $U=X_2 \backslash X_1$ 而不会影响同调，但是不是任何部分都可以切除，必须适合切除性条件. 例如说，若 $\overline{U} \subset \mathrm{Int}\, X_2$(闭包与内域都是对 $X=X_1 \cup X_2$ 而言)就是这样的情况. 因为这时 $\mathrm{Int} X_2 \supset \overline{U}$，而 $X-\overline{U} \subset \mathrm{Int} X_1$，所以 $\mathrm{Int} X_1 \cup \mathrm{Int} X_2 = X$.

最简单的切除条件是 $X_1, X_2 \subset X$ 均为开集. 作为一个应用, 令 $X = S^n$, $X_1 = S^n - \{x_0\}$, $X_2 = S^n - \{-x_0\}$, 这时 X_1, X_2 在 S^n 中为开而且都是可缩的, 赤道 $S^{n-1} \subset X_1 \cap X_2$ 是强形变收缩核 ($X_1 \cap X_2 \simeq S^{n-1} \times R$), 于是 Mayer-Vietoris 序列成为

$$0 \longrightarrow H_i(S^n) \xrightarrow{\sim} H_{i-1}(S^{n-1}) \longrightarrow 0.$$

由此立即可得

$$H_i(S^n) = \begin{cases} 0, & i \neq 0, n, \\ Z, & i = 0, n. \end{cases} \quad \text{(整系数)}$$

在单纯理论中, Mayer-Vietoris 序列对任一对子复形 $\{K_1, K_2\}$ 都存在. 在奇异理论中, $|K_1|, |K_2| \subset |K|$ 是闭集, 而一般说来 $\mathrm{Int}|K_1| \cup \mathrm{Int}|K_2| \neq |K_1| \cup |K_2|$ (令 $|K_1|, |K_2|$ 为 S^n 之上下半球即可看到), 所以我们并不顺利. 所幸我们还有以下事实.

定理 令 K 为一单纯复形而 $K_1 \subset K$ 是子复形, 则 $|K_1|$ 在 $|K|$ 中有一开邻域 U 使得 $|K_1| \subset U$ 是强形变收缩核.

这显然意味着对任意子复形 K_1 和 K_2, $\{|K_1|, |K_2|\}$ 都是切除的.

令 σ 为 K 中不在 K_1 内的一个单形, 这并不意味着 $|\sigma| \cap |K| = \varnothing$, 而只是 $\sigma^\circ \cap |K_1| = \varnothing$, 换言之, $|\sigma| \cap |K_1| \subset |\partial\sigma|$. 子复形 $K_1 \subset K$ 称为满的(full)子复形, 如果 $|\sigma| \cap |K_1|$ 恰是 σ 的一个面(而不是 $|\partial\sigma|$ 中几个面之并); 与此等价, $\sigma \in K_1$ 当且仅当 σ 之一切顶点均在 K_1 中. 令 $N = \{\sigma \in K \mid |\sigma| \cap |K_1| = \varnothing\}$, 则 N 是 K 的一个子复形(不论 K_1 是否为满), 而

$$|K_1| \subset |K| - |N| = U,$$

U 是 $|K_1|$ 的一个开邻域. 我们要证明若 K_1 为满, 则 $|K_1| \subset U$ 是强形变收缩核. 令 $x \in U$ 而 $\sigma \in K$ 是使 $x \in \sigma^\circ$ 的唯一单形. 因为 $x \in U$, $\sigma \notin N$, 所以 $|\sigma| \cap |K_1| \neq \varnothing$ 是 σ 的一个面, 故 $\sigma = \langle v_0, \cdots, v_k \rangle$ 而且对某个 $l \leqslant k$ 有 $\langle v_0, \cdots, v_l \rangle \in K_1$, 记

$$x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i v_i.$$

因 $x\in\sigma^{\circ}$，故一切 $\lambda_i>0$. 令

$$y=\left(\sum_{i=0}^{l}\lambda_i v_i\right)/\left(\sum_{i=0}^{l}\lambda_i\right).$$

则 $y\in\langle v_0,\cdots,v_l\rangle$ 从而 $y\in|K_1|$. 定义收缩为

$$H(x,t)=ty+(1-t)x.$$

并不是 K 之一切子复形 K_1 都是满的，然而重心重分 $K_1'\subset K'$ 总是满的. 因为若一个单形

$$\langle b_0,b_1,\cdots,b_s\rangle,\ b_i=b(\sigma_i),\ \sigma_0<\sigma_1<\cdots<\sigma_s$$

之一切顶点均在 K_1' 中，则 $\sigma_i\in K_1$ 从而由定义

$$\langle b_0,b_1,\cdots,b_s\rangle\in K_1'.$$

又因 $|K_1'|=|K_1|$，故得其证.

现在我们已具备了为比较单纯理论与奇异理论所需的全部几何事实，但是我们还需要一点代数.

"五"引理(The Five lemma) 设有模与同态的可换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E\\
\downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon}\\
A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E'
\end{array}$$

且使(1) 两个横行都是正合的，(2) 同态 α,β,δ 和 ε 都是同构，则中间的 γ 也是同构.

证明很简单，可以用来练习按图式追踪.

令 K 为一单纯复形，可以建立 K 的单纯复形与 $|K|$ 的奇异复形之间的一个映射

$$\alpha: C(K)\longrightarrow S(|K|)$$

如下：对于一个有向单形 $\sigma=[v_0,\cdots,v_k]$，定义 $\alpha\sigma:\Delta_k\longrightarrow|K|$，即为映 Δ_k 之顶点 e_i 为 v_i 的线性单形. 我们已经看到，α 是一个链映射，我们有

定理 $\alpha: C(K)\longrightarrow S(|K|)$ 对任意有限单纯复形 K 诱导出同调的同构.

证　对 K 中单形的个数归纳证明，只有一个单形的复形就是一个点，这时由正规化定理可得本定理. 在其它情况下，令 $\sigma\in K$ 是一个具有最高维数的单形，则 $K_1=K-\{\sigma\}$ 是一个子复形. 由于同伦定理，$\alpha: C(\sigma)\longrightarrow S(|\sigma|)$ 诱导出同调间的同构. 一般的定理可以应用 Mayer-Vietoris 序列与"五"引理于下述图而得

$$\begin{array}{ccccc}
\longrightarrow H_i(K_1\cap\sigma) & \longrightarrow & H_i(\sigma)\oplus H_i(K_1) & \longrightarrow & H_i(K) \\
\downarrow \alpha_* & & \downarrow \alpha_*\oplus\alpha_* & & \downarrow \alpha_* \\
\longrightarrow H_i(|K_1|\cap|\sigma|) & \longrightarrow & H_i(|\sigma|)\oplus H_i(|K_1|) & \longrightarrow & H_i(|K|),
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
H_i(K) & \longrightarrow & H_{i-1}(K_1\cap\sigma) & \longrightarrow & H_{i-1}(\sigma)\oplus H_{i-1}(K_1) & \longrightarrow \\
\downarrow \alpha_* & & \downarrow \alpha_* & & \downarrow \alpha_* & \\
H_i(|K|) & \longrightarrow & H_{i-1}(|K_1|\cap|\sigma|) & \longrightarrow & H_{i-1}(|\sigma|)\oplus H_{i-1}(|K_1|) & \longrightarrow
\end{array}$$

这个定理的证明很有启发. 所用的都是一些形式性质：正规化、同伦而最关键的是 Mayer-Vietoris 序列. 所以毫不奇怪，这些性质可以作为抽象同调理论的公理化基础. 我们其实并不想把这个想法加以推进，但我们确实愿借此机会再澄清一点，回想一下，在讨论积分和 de Rham 定理时，我们必须要用流形 M 上的光滑的奇异单形 $\sigma: \Delta_k\longrightarrow M$，它们生成一个 $S(M)$ 的子复形，可记之为 $S^\infty(M)$，当时我们说，这会给出同样的同调，即是说，包含映射 $S^\infty(M)\longrightarrow S(M)$ 诱导出同调间的同构. 现在我们可以指出如何证明了. 在作了必要的修正之后，可以几乎逐字重复地建立 $H_*(S^\infty(M))$ 的一切形式性质（同伦和收缩都必须是光滑的等等）. 当一个流形 M 都有一个所谓的简单覆盖(simple covering)，这是这样一个开覆盖 (U_i)，使一切有限交 $U_0\cap U_1\cap\cdots\cap U_k$ 或者为空或者为可缩，于是可以在具有有限简单覆盖的流形之类（它包括紧流形）上建立如上的定理，其方法也恰如上述. 事实上，再由正向极限(direct limit)，这定理在一般情况下也是对的.

§5. 应　用

前几节里已经建立了同调理论的基本性质. 如果我们相信这已经成为这个理论的公理基础，那么我们就已经讨论过了所有的性质. 所以我们已经能作计算和应用了，至此为止，我们只计算过 $H_i(S^n)$（用整系数）. 若 $i=0$ 或 n，它等于 Z，否则为 0. 这一点计算也可导致不平凡的结果. 例如，它蕴涵了当 $n\neq m$ 时，欧氏空间 E^n 和 E^m 不能同胚. 这似乎没有说出什么了不起的道理，但是如果你想一下，就会发现你其实不会证明它. 更有趣的是，所有的无限维 Hilbert 空间，不论其维数的势如何，都是同胚的. 这意味着同调理论对于无限维流形用处不大，这是同调理论的大困难之一.

在流形理论中，局部同调是一个重要概念. 它可以一般地定义如下：令 X 为任一拓扑空间（恒设 X 是 Hausdorff 的），$x_0\in X$ 是其中一点，群 $H_*(X,X-x_0)$ 称为 x_0 处的局部同调群. 这定义看起来并不象是局部的. 然而，若 U 是 x_0 的任一邻域，则

$$\{U,X-x_0\}$$

是切除的，因之包含映射 $(U,U\cap(X-x_0))=(U,U-x_0)\longrightarrow(U\cup X-x_0,X-x_0)=(X,X-x_0)$ 诱导出一个同调间的同构

$$H_*(U,U-x_0)\xrightarrow{\sim}H_*(X,X-x_0),$$

所以局部同调毕竟还是一个局部概念. 但是上面的同构包含了一个重要的信息，即可用切除把局部的和整体的变量联系起来，这个想法将是在流形理论中反复用到的基本道理. 若 X 是一个拓扑流形，$x_0\in X$ 有一个邻域 U 使得

$$(U,U-x_0)\simeq(R^n,R^n-0)\quad(n=\dim X).$$

于是有

$$H_i(R^n,R^n-0)=\begin{cases}Z, & i=n;\\ 0, & i\neq n.\end{cases}$$

这样，流形有简单的局部同调.

象流形上的其它东西一样，我们需要知道局部同调在坐标变换下的行为，就是说我们需要研究由此导出的同态. 设 $f:(X,x_0)\longrightarrow(Y,y)$ 是一个映射，再设 $x_0\in f^{-1}(y_0)$ 是一个孤立点，于是有 x_0 的邻域 U 和 y_0 的邻域 V 使得

$$f(U)\subset V.$$

$f(U-x_0)\subset f(V-y_0)$（因为 $U\cap f^{-1}(y_0)=\{x_0\}$）换言之，$f:(U,U-x_0)\longrightarrow(V,V-y_0)$. 所以有诱导映射

$$f_*:H_n(U,U-x_0)\longrightarrow H_n(V,V-y_0)$$

$(n=\dim X=\dim Y)$. 因为这两个群都是 $\mathbb{Z}$，所以 f_* 由下面的方程来决定

$$f_*(\alpha)=\lambda\beta,$$

α,β 各为 $H_n(U,U-x_0)$ 和 $H_n(V,V-y_0)$ 的生成元，λ 是一个整数. λ 称为 f 在 x_0（关于所取生成元）的局部映射度(local degree)，记作 $\deg_{x_0}(f)$.

$H_n(U,U-x_0)$ 的生成元的选取与定向有关. 在 $\mathbb{R}^n$ 中固定一个定向，我们可以取一个 n-单形 $\sigma=(v_0,v_1,\cdots,v_n)$ 使 $0\in\sigma^\circ$ 而顶点的次序（即基底 $v_1-v_0,\cdots,v_n-v_0$ 之次序）与 $\mathbb{R}^n$ 的定向一致，包含映射 $(\sigma,\partial\sigma)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-0)$ 诱导出一个同构

$$H_n(|\sigma|,|\partial\sigma|)\longrightarrow H_n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-0),$$

因为这个包含是强形变收缩. 另一方面 $[v_0,\cdots,v_n]\in H_n(\sigma,\partial\sigma)$ 是一个生成元. 很清楚，选取 $H_n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-0)$ 的一个生成元和选取 $\mathbb{R}^n$ 的一个定向是一回事.

令 $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 是一个光滑映射且

$$f(0)=0,\quad \{0\}=f^{-1}(0),$$

而且 0 是一个正则值，于是 f 诱导出一个映射

$$f:(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-0)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-0),$$

其在 $x=0$ 处的微分也是一个映射

$$(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-0)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-0).$$

我们指出，f 和 $df(0)$ 彼此同伦. $\mathbf{R}^n$ 既是可缩的，作为一对空间的映射

$$(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n-0)\longrightarrow(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n-0)$$

是同伦的，其同伦 H_t 不得将任意的 $x\neq 0$ 变成 0，即

$$H_t(x)=\begin{cases} f(tx)/t, t\neq 0; \\ df(0,x), t=0. \end{cases}$$

这样就把问题化成 f 为线性的情况，即可使 $f\in GL(n)$. 但是从线性代数很容易看见 $GL(n)$ 只有两个同伦类：其一使 $\det(f)>0$，另一使 $\det(f)<0$. 第一类以 $f=\mathrm{id}$ 为代表元，它保持定向和生成元 $[v_0,v_1,\cdots,v_n]$，第二类，假如以

$$f(v_1-v_0)=-(v_1-v_0),$$
$$f(v_i-v_0)=(v_i-v_0)\ (i>1)$$

为代表元，它逆转定向和生成元 $[v_0,v_1,\cdots,v_n]$. 这样通过同调来定义的在正则点 x 处的局部映射度和前面通过考查 df_x 对定向的影响来定义的局部指标是一回事.

令 $f: S^n\longrightarrow S^n$ 是一连续映射. 因为 $H_n(S^n)=Z$，可以用下式来定义 f 的整体映射度

$$f_*(L)=\deg(f)\cdot L,$$

这里 $L\in H_n(S^n)$ 是一个生成元. 它很象第七章用 de Rham 上同调群所定义的光滑映射的映射度，但是现在是对任意连续映射定义的，而且一目了然 $\deg(f)$ 是一个整数与第七章里的相同，$\deg(f)$ 是局部指标之和，设 f 是光滑的，而 q 是它的一个正则值，于是

$$f^{-1}(q)=\{p_i\}$$

是有限集. 取 q 的一个邻域 V 与 p_i 的互相分离的邻域 U_i，使对每一个 U_i，

$$f_i: (U_i,U_i-p_i)\longrightarrow(V,V-q)$$

是一个微分同胚，我们可得以下的图式而证明我们的结论.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & \xrightarrow{f_*} & H_n(S^n) \\
H_n(S^n) & & & & \uparrow\sim \\
\sim\swarrow\ \searrow & & & & \\
H_n(S^n, S^n-p_i) & & H^n(S^n, S^n-\{p_i\}) & \xrightarrow{f_*} & H_n(S^n, S^n-q) \\
\uparrow\sim\text{切除} & & \uparrow\sim\text{切除} & & \downarrow\sim\text{切除} \\
H_n(U_i, U_i-p_i) & & H_n(\bigcup_i U_i, \bigcup_i (U_i-p_i)) & \xrightarrow{f_*} & H_n(V, V-q) \\
 & \text{包含}\searrow & \| & \nearrow\oplus(f_i)_* & \\
 & & \bigoplus H_n(U_i, U_i-p_i) & &
\end{array}
$$

再一次看到，把整体和局部不变量联系起来的关键仍是切除同构，对于任一流形 X，只要 $H_n(X)=\mathbb{Z}$，上面的论证都是适用的. 所以当 X 是紧连通可定向流形时是这样，而这从 de Rham 定理也就可以想到，但是关于球而有一非常值得注意的事实：一般说来同伦的映射有相同的映射度，对于球面，逆定理也成立. 这就是 Hurewicz 的重要定理，我们现在还不讨论它.

在§1中我们提到古老的 Euler 定理可以这样来理解，即 Euler 示性数是同调的不变量. 我们现在介绍这个思想的简单然而含义深远的推广——Lefschetz 不动点公式. 令 V 为一矢量空间，$\varphi: V \longrightarrow V$ 为一线性映射，把 φ 写成一个矩阵 $\varphi=(\varphi_{ij})$，迹的定义是

$$\mathrm{Tr}(\varphi)=\sum_i \varphi_{ii}.$$

众所周知 $\mathrm{Tr}(\varphi)$ 与 φ 的矩阵表示法无关，现在令 $C=(C_i)$ 是一个(体上的)链复形而 $h: C\longrightarrow C$ 是链的自同态，所谓 Lefschtz 数 $\lambda(h)$ 定义为

$$\lambda(h)=\sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(h_i).$$

当 $h=1$ 时，$\lambda(h)$ 就是 Euler 示性数 $\chi(C)$. 可以证明 $\lambda(h)$ 和 Euler 示性数一样是同调不变量，即若 $h_*: H_*(C)\longrightarrow H_*(C)$ 是诱导的同态，则

$$\lambda(h)=\lambda(h_*)=\sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(h_{i*}).$$

现在可以提出

Lefschetz 不动点定理 令 K 为一有限的单纯复合形，$f:|K|\longrightarrow|K|$ 是一连续映射，若 Lefschetz 数

$$\lambda(f)=\sum_i(-1)^i\mathrm{Tr}(f_{i*})\neq 0,$$

$f_*:H_*(|K|)\longrightarrow H_*(|K|)$ 是在奇异同调（以一个体为系数）上诱导的同态，则 f 有不动点.

证 设 f 没有不动点，证明 $\lambda(f)=0$. 因为 $|K|$ 为紧，必有某个 $\varepsilon>0$，使对一切 $x\in|K|$，$d(x,f(x))\geqslant\varepsilon$，$d$ 表示距离. 将 K 重分为 K' 使 K' 中每个单形的直径均 $<\varepsilon/3$，再将 K' 重分为 K'' 使 f 有单形逼近 $\varphi:K''\longrightarrow K'$. 因为 $f(x)$ 和 $\tilde{\varphi}(x)$ 在同一单形中，$d(f(x),\tilde{\varphi}(x))<\varepsilon/3$. 于是可证对任一单形 $\sigma\in K'$，$|\sigma|\cap\tilde{\varphi}(|\sigma|)=\varnothing$ 这是因为：若 $x\in|\sigma|\cap\tilde{\varphi}(|\sigma|)$，$x=\tilde{\varphi}(y)$，则有

$$\begin{aligned}d(y,f(y))&\leqslant d(y,x)+d(x,f(y))\\&=d(y,x)+d(\tilde{\varphi}(y),f(y))\leqslant 2\varepsilon/3,\end{aligned}$$

这与 $d(y,f(y))\geqslant\varepsilon$ 矛盾.

现在考虑链映射

$$\varphi_{\#}\mathrm{sd}:C(K')\longrightarrow C(K'),$$

$\mathrm{sd}:K'\longrightarrow K''$ 是 § 4中所定义的重分映射，上面所证意味着对每个 $[\sigma]\in K'$，链 $\varphi_{\#}\mathrm{sd}[\sigma]$ 中并不包含 $[\sigma]$ 项，或者用矩阵表示即是对角线上之元全为0. 所以我们在每个维数上都有 $\mathrm{Tr}(\varphi_{\#}\mathrm{sd})=0$，从而 $\lambda(\varphi_{\#}\mathrm{sd})=0$，再用同调，则因 $\varphi_*=f_*$ 即知定理成立.

此书一开始，我们已证在二维球面 S^2 上没有处处非零的矢量场. 现在我们可以大大地推广这个结果.

定理 在 Euler 示性数 $\chi(M)\neq 0$ 的紧流形 M 上，不存在处处不为0的矢量场.

证 令 X 是 M 上的一个矢量场，记住对每个 $P\in X$，都有一条经过 P 的最大积分曲线 $\alpha(t,P)$，不难看到，当 M 为紧时，$\alpha(t,P)$ 对一切 $t\in\mathbb{R}$ 都有定义，于是我们有一个整体流

$$\alpha:\mathbb{R}\times M\longrightarrow M,\qquad (t,P)\longmapsto\alpha(t,P).$$

对每个 $t\in\mathbb{R}$，映射 $\alpha_t: M \longrightarrow M$ 当然同伦于恒等映射($H_s(P)=\alpha(st,P)$)。因此 Lefschetz 数 $\lambda(\alpha_t)=\lambda(1)=\chi(M)\neq 0$. 由 Lefschetz 定理，$\alpha_t$ 应该有不动点. 令 $A_k=\alpha_{2^{-k}}$的不动点集，记住 α 具有群性质 $\alpha(t,\alpha(s,P))=\alpha(t+s,P)$，容易看到 $A_{k+1}\subset A_k$. 因此$\{A_k\}$是非空紧集的下降序列，从而$\bigcap A_k\neq\varnothing$，于是必有一个 P_0，使对一切 k 均有 $\alpha(2^{-k},P_0)=P_0$；再由群性质，$\alpha(m2^{-k},P_0)=P_0$对所有整数 k 与 m 都成立，由连续性，$\alpha(t,P_0)=P_0$对一切 t 成立，很清楚 $X(P_0)=0$.

上面的定理再一次说明了"障碍"的概念. 其所以不能有处处非0的矢量场就在于 $\chi(M)\neq 0$挡住了路，现在对这种情况有了较深的了解，因为我们懂得了障碍的确切性质：它是整体的、拓扑的(所以不管你有多少分析技巧也无能为力)，它也促使我们想一些更深入的问题：例如 $\chi(M)$是仅有的障碍吗？远不是这回事. 同调论的用处时常在于它能指出最简单的这类拓扑障碍.

§6. CW 复形和进一步的计算

我们已经逐渐地认识到奇异同调是作形式的讨论最方便的工具. 按照这种看法，单纯同调可以看作是一种计算的手段(虽然实际上远不止于此). 然而，从纯粹计算的观点看来，单纯同调还不是最有效的方法. 一个已给的空间的一种特定的三角剖分法并不一定好找，即使找到了一种，所得链复形也可能用起来太麻烦. 所以我们介绍一种更一般类型的三角剖分——CW 复形. 这个概念是由 J. H. C. Whitehead 提出的，作为研究同伦论的工具，但是也时常成为更简单的计算同调的方法.

令 K 是一个单纯复形. 对每个 $n\geqslant 0$，令

$$K^n=\{\sigma\in K \mid \dim\sigma\leqslant n\},$$

为 K 的"n-骨架"(n-skeleton). 我们可以认为空间$|K|$是由$|K^0|\subset|K^1|\subset\cdots\subset|K^n|\subset\cdots$这样一步步造出来的. 在$|K^{n-1}|$这一步就把更高一维的 n-单形$|\sigma|$沿其边缘$|\partial\sigma|$粘在$|K^{n-1}|$上而得到下一步

的$|K^n|$. 现在我们来推广这种粘的过程，设 X,Y 为 Hausdorff 拓扑空间，$A\subset X$. 且 $f:A\longrightarrow Y$ 为连续映射，在 X 与 Y 的分离并(disjoint union)$X\sqcup Y$ 中，把 $x\in A$ 和 $f(x)\in Y$ 等同起来，形式上我们定义了一个等价关系$\sim$：$x\sim x'$ 即指 $x=x'$或者

(1) 若 $x,x'\in X, x\sim x'\Leftrightarrow x,x'\in A, f(x)=f(x')$；

(2) 若 $y,y'\in Y, y\sim y'\Leftrightarrow y=y'$；

(3) 若 $x\in X, y\in Y, x\sim y\Leftrightarrow x\in A$，而 $f(x)=y$.

记商空间$(X\sqcup Y)/\sim$为 $X\sqcup_f Y$，称为由 Y 通过 $f:A\longrightarrow Y$ 而连接 X 之空间. 我们用 π 记投影 $X\sqcup Y\longrightarrow X\sqcup_f Y$，推广就在于这一点，即连接映射 f 不一定如包含映射$|\partial\sigma|\longrightarrow|K^{n-1}|$那样是一对一的.

下而是一些简单的事实.

1) $\pi:Y\longrightarrow\pi(Y)\subset X\sqcup_f Y$ 是一个同胚，将 Y 与 $X\sqcup_f Y$ 的一个子集等同起来，记作 $Y\subset X\sqcup_f Y$.

2) 若 $A\subset X$ 为紧，则 $\pi(X)$和 $\pi(A)$是 $X\sqcup_f Y$ 的闭子集. $\pi:X-A\longrightarrow\pi(X-A)\subset X\sqcup_f Y$ 是一个同胚，将 $X-A$ 与 $X\sqcup_f Y$ 的一个子集等同起来，记作 $X-A\subset X\sqcup_f Y$.

3) 若 $A\subset X$ 是 X 中的一个邻域收缩核(neighborhood retract)，即有 A 在 X 中的一个邻域 U 使 $A\subset U$ 为一个强形变收缩核，则 $Y\subset X\sqcup_f Y$ 也是一个邻域收缩核. 因为 $\pi(U\sqcup Y)$是 Y 在 $X\sqcup_f Y$ 中的一个邻域($\pi^{-1}\pi(U\sqcup Y)=U\sqcup Y$ 是开的). 若

$$H_t:\quad U\times I\longrightarrow U$$

是一个收缩，且 $H_t|A=1$，则 $\tilde{H}:(U\sqcup Y)\times I\longrightarrow U\sqcup Y$ 且 $\tilde{H}_t|Y=1$与等价关系相容. 因此求商以后即可定义一个收缩 $\hat{H}:\pi(U\sqcup Y)\times I\longrightarrow\pi(U\sqcup Y)$且 $\hat{H}_t|\pi(Y)=1$.

4) 以上产生了一个情况：映射

$$\pi:(X,A)\longrightarrow(X\sqcup_f Y,Y)$$

称为一个“相对”同胚，因为

$$\pi: X-A \longrightarrow \pi(X-A)=X\coprod_f Y-Y$$

是余集上的一个同胚. 但还有过于此，它把 A 之一个邻域 U，A 是其强形变收缩核，变到 Y 的邻域 $\pi(U\coprod Y)$，而 Y 又是它的一个强形变收缩核，所以我们把 π 叫做"强相对同胚". 我们有下面一串包含映射

$$\begin{array}{ccc} (X,A)\longrightarrow(X,U) \longleftarrow & (X-A,U-A) & \\ & \downarrow \pi & \\ & (X\coprod_f Y-Y,\pi(U\coprod Y-Y)) & \\ & \downarrow & \\ & (X\coprod_f Y,\pi(U\coprod Y)) \longleftarrow (X\coprod_f Y,Y) & \end{array}$$

所有这些包含映射都诱导出同调之间的同构，其原因：就第一个和最后一个包含映射而言是由于邻域收缩；第二个和第四个是由于切除；中间的一个则是由于同胚. 于是 $(X, A) \longrightarrow (X\coprod_f Y, Y)$ 在同调之间诱导出同构.

若 $X=D^n$ 是一个圆盘而 $A=\partial D^n=S^{n-1}$ 为其边缘，以上所述都成立. 我们称 $Y\longmapsto D^n\coprod_f Y$ 为通过贴附映射 $f: S^{n-1}\longrightarrow Y$ 而将 n-胞腔 (n-cell) 贴附. 映射 $\pi: D^n \longrightarrow D^n\coprod_f Y$ 称为特征映射 (characteristic map)，其象 $\pi(D^n)=e\subset D^n\coprod_f Y$ 称为 $D^n\coprod_f Y$ 中的一个 n-胞腔. $e^\circ=\pi(D^n-\partial D^n)$称为一个开的 n-胞腔. 注意，e°一定同胚于开圆盘$(D^\circ)^n$，e°是 $D^n\coprod_f Y$ 中的一个开集.

没有不能同时贴附多于一个 n-胞腔的理由，若 $\{E_i\}$ 是一族 n-圆盘，且有映射 $f_i: \partial E_i \longrightarrow Y$，只需作分离的并 $\coprod_i E_i\coprod Y$ 并将 $x\in\partial E_i$ 与 $f_i(x)\in Y$ 等同起来即可. 一个空间 X 称为一个 CW-复形，如果

$$\varnothing=X^{-1}\subset X^0\subset\cdots\subset X^{n-1}\subset\cdots\subset X,$$

X^n 是由 X^{n-1}贴附 n-胞腔而得，为简单起见，我们假设 X 只有有限多个胞腔（因此 X 是紧的）. 这样假设好处是——显然映射 $f: X$

$\longrightarrow Y$ 当且仅当它在每个胞腔 $e\subset X$ 上为连续时才是连续的. 如果胞腔为数无限，则除非有特殊条件，这可能并不对. 这个条件即所谓对于“弱”（weak）拓扑的 w-条件，“CW 复形”的字母 W 即是指此，字母 C 表示“闭包有限”（closure finite），其意义如下：由定义 X 的所有开胞腔 e°都是互相分离的，但是闭胞腔 e 可能与其它胞腔相交. 闭包有限就是指每个 e 只能与有限多个胞腔相交. $X^n\subset X$ 称为 X 的 n-骨架. 注意，开的 n-胞腔 e°只是在 X^n 中开. 最后，若令 $X^{-1}=A$ 而不是空集，我们就称（X，A）为相对 CW 复形. 例如（X，X^n）就是一个相对 CW 复形.

现在我们要讨论 CW 复形 X 的同调性质. 为简单起见，设 X 是有限的. 从上面的讨论即知

$$H_i(X^n,X^{n-1})=\begin{cases}0, & i\neq n,\\ R(\text{基环})\text{—— 对 } X \text{ 的每个胞腔取一个} & \\ \qquad\qquad\text{—— 之直和}, & i=n.\end{cases}$$

令 $W_n(X)=H_n(X^n,X^{n-1})$. 构造一个链复形$(W_n(X),\partial_n)$. 为此，更为一般，令（X，A，B）是空间的一个“三元组”，即 $B\subset A\subset X$，于是有以下的一些复形.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & S(B) & \xrightarrow{\text{id}} & S(B) & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & S(A) & \longrightarrow & S(X) & \longrightarrow & S(X,A) & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\text{id}} & & \\
0 & \longrightarrow & S(A,B) & \longrightarrow & S(X,B) & \longrightarrow & S(X,A) & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

其实我们只不过是说

$$[S(X)/S(B)]/[S(A)/S(B)]=S(X)/S(A)$$

罢了．最后一行仍然是分解正合的，这样就给出一个正合序列

$$\longrightarrow H_i(A,B)\longrightarrow H_i(X,B)\longrightarrow H_i(X,A)$$

$$\xrightarrow{\Delta} H_{i-1}(A,B)\longrightarrow\cdots,$$

它叫做三元组(X,A,B)的正合序列．我们定义$\partial_n: W_n(X)\longrightarrow W_{n-1}(X)$如下：

$$W_n(X)=H_n(X^n,X^{n-1})\longrightarrow H_{n-1}(X^{n-1})\longrightarrow H_{n-1}(X^{n-1},X^{n-2})$$

$$=W_{n-1}(X).$$

于是，有$\partial_{n-1}\partial_n=0$，因为$\partial_{n-1}\partial_{n-2}$中有

$$H_{n-1}(X^{n-1})\longrightarrow H_{n-1}(X^{n-1},X^{n-2})\longrightarrow H_{n-2}(X^{n-2}),$$

它当然是0．这样，我们就有一个基本的事实：

定理 若X是一个CW复形，则$H_*(W(X))\simeq H_*(X)$.

换言之，我们可以用复形$W(X)$来计算$H_*(X)$，而$W(X)$则可以用X分解为胞腔来描述．例如，若X只有很少几个胞腔，$W(X)$处理起来是很简单的．这个定理证明很简单．我们先给出几个引理．

引理1 对于$p\geqslant q\geqslant n$或$n>p\geqslant q$均有$H_n(X^p,X^q)=0$.

证 对$p-q$用归纳法证明．对于三元组(X^p,X^{q+1},X^q)前述序列包含下面这样一段

$$0=H_n(X^{q+1},X^q)\longrightarrow H_n(X^p,X^q)\longrightarrow H_n(X^q,X^{q+1})=0.$$

引理2 当$q\geqslant n$时，$H_n(X,X^q)=0$.

证 任意$[a]\in H_n(X,X^q)$都可以用某个$a\in S(X^p)$来表示，这里$p\geqslant q$，于是$[a]$在

$$\mathrm{Im}(H_n(X^p,X^q)\longrightarrow H_n(X,X^q))$$

中，但当$q\geqslant n$时，由引理1，$H_n(X^p,X^q)=0$．故得引理之证．

引理3 若$q>n$及$q\geqslant r$，则$H_n(X^q,X^r)=H_n(X,X^r)$.

证 三元组(X,X^q,X^r)的序列中包含下面这样一段

$$0=H_{n+1}(X,,X^q)\longrightarrow H_n(X^q,X^r)\longrightarrow H_n(X,X^r)$$

$$\longrightarrow H_n(X, X^k) = 0.$$

定理的证明 令 $k \leqslant n-2$，我们有以下的图

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) & & & & H_{n-1}(X^{n-2}, X^k) = 0 \\
 & & \downarrow & \searrow \partial_{n+1} & & & \downarrow \\
0 = H_n(X^{n-1}, X^k) & \to & H_n(X^n, X^k) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(X^{n-1}, X^k) \\
 & & \downarrow & & \partial_n \searrow & & j_* \swarrow \\
 & & H_n(X^{n+1}, X^k) & & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 = H_n(X^{n+1}, X^n) & & & &
\end{array}$$

现在

$$\begin{aligned}
H_n(X, X^k) &\simeq H_n(X^{n+1}, X^k) \quad （引理3） \\
&\simeq H_n(X^n, X^k)/\mathrm{Im}\partial \\
&\simeq \mathrm{Im} i_*/\mathrm{Im}(i_*\partial) \quad （因为 i_* 是一对一的） \\
&\simeq \ker \partial/\mathrm{Im}(\partial_{n+1}) \quad （因为横行是正合的） \\
&\simeq \ker j_*\partial/\mathrm{Im}\partial_{n+1} \quad （因为 j_* 是一对一的） \\
&\simeq \ker \partial_n/\mathrm{Im}\partial_{n+1} \\
&= H_n(W(X)).
\end{aligned}$$

再取 $k=-1$ 即可.

例 我们给出复射影空间 $\mathbf{CP}^n$ 的一个 CW-剖分如下：令 $\mathbf{CP}^{n-1} \subset \mathbf{CP}^n$ 为子集 $\{[z_0, \cdots, z_n] \mid z_n = 0\}$ 而 $S^{2n-1} \xrightarrow{\pi} \mathbf{CP}^{n-1}$ 为自然的投影 $(z_0, \cdots, z_{n-1}) \longrightarrow [z_0, \cdots, z_{n-1}, 0]$. 现在映射

$$D^{2n} \longrightarrow \mathbf{CP}^n,$$

$$z = (z_0, \cdots, z_{n-1}) \longmapsto [z_0, \cdots, z_{n-1}, \sqrt{1-|z|^2}]$$

诱导出一个映射 $D^{2n} \bigsqcup_{\pi} \mathbf{CP}^{n-1} \longrightarrow \mathbf{CP}^n$ 而它很明显是一个同胚，这说明 $\mathbf{CP}^n$ 可以从 $\mathbf{CP}^{n-1}$ 连接一个 $2n$-胞腔而得. 显然，这说明 $\mathbf{CP}^n$ 有一个 CW-剖分，在从0到 $2n$ 的每一个偶数维上均有一个胞腔. 故复形 W 就是

$$0 \longrightarrow W_{2n} = \mathbf{R} \longrightarrow 0 \longrightarrow W_{2n-2} = \mathbf{R} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow W_2$$

$$=\mathbf{R}\longrightarrow 0\longrightarrow W_0=\mathbf{R}\longrightarrow 0.$$

由此，得

$$H_i(\mathbf{CP}^n,\ \mathbf{R})=\begin{cases}\mathbf{R},\ i\ \text{为偶},\ 0\leqslant i\leqslant 2n;\\ 0,\ \text{其它的}\ i.\end{cases}$$

我们曾经计算过 de Rham 群而得

$$\dim H^{2i}(\mathbf{CP}^n)\geqslant 1.$$

现在这里只有等号成立，再结合第十一章的 Poincaré 对偶定理，从而可最终完成这一计算.

在上面的例中，当 i 为奇数时 $W_i=0$，这就必然得出边缘算子 $\partial=0$这一结论，一般说来，我们是需要说明如何计算 $W(X)$中的算子 ∂ 的.

令 $e\subset X$ 是一个 n-胞腔而 $\partial e=e-e^\circ$，我们有包含映射 $i_e:(e,\partial e)\longrightarrow(X^n,X^{n-1})$，而它诱导出一个映射 $i_{e*}:H_n(e,\partial e)\longrightarrow H(X^n,X^{n-1})$ 使前者成为后者的一个直和因子. 令 X^n/X^{n-1}是由 X^n 将 X^{n-1}捏(collapse)为一点而得的空间，于是投影

$$(X^n,\ X^{n-1})\longrightarrow(X^n/X^{n-1},\ *)$$

是一个强相对同胚，因此不改变同调；另一方面，空间 X^n/X^{n-1}在几何上很容易想象，它只不过是许多球面 $e/\partial e$ 粘结在一点 $*$，我们称它为一束球面 (bouquet of spheres)，记作 $\bigvee_e e/\partial e$，于是有明显的投影映射

$$\bigvee_e e/\partial e\longrightarrow\tau/\partial\tau,$$

即将所有 $e\neq\tau$ 的 e 送到点 $*$，而将 τ°中的点不变，换言之，它就是映射

$$P_\tau:X^n/X^{n-1}\longrightarrow X^n/(X^n-\tau^\circ)=\tau/\partial\tau.$$

这样

$$H_n(e/\partial e)\xrightarrow{i_{e*}}H_n(X^n/X^{n-1})\xrightarrow{P_{\tau*}}H_n(\tau/\partial\tau)$$

显然满足

$$P_{\tau*}i_{e*}=\delta_{e\tau},$$

从而把 $H_n(X^n/X^{n-1})$ 分解为直和 $\bigoplus_e H_n(e/\partial e)$.

对于每一个 n-胞腔 e，由定义都有一个特征映射 $\varphi_e:(D^n,S^{n-1})\longrightarrow(e,\partial e)$，使得

$$\varphi_e|S^{n-1}:S^{n-1}\longrightarrow X^{n-1},$$

即是：贴附映射 φ_e 是强相对同胚．它诱导出一个真正的同胚

$$\overline{\varphi_e}:D^n/S^{n-1}\longrightarrow e/\partial e,$$

但 $D^n/S^{n-1}\simeq S^n$．一个明显的相对同胚是

$$\pi:\ (D^n,\ S^{n-1})\longrightarrow(S^n,\ *)$$

$$x=(x_1,\ \cdots,\ x_n)\longmapsto(\lambda x_1,\ \cdots,\ \lambda x_n,\ \mu),$$

这里 $\lambda=\sqrt{1-|x|^2}$，$\mu=2|x|^2-1$，$*=(0,\ \cdots,\ 0,\ 1)$；于是我们有同胚

$$\widetilde{\varphi_e}:S^n\overset{\pi}{\simeq}D^n/S^{n-1}\xrightarrow{\overline{\varphi}_e}e/\partial e.$$

现在我们能描述 $\partial:W_n(X)\longrightarrow W_{n-1}(X)$ 了．∂ 可以用整数元矩阵 $[e,\tau]$ 表示，对每一个 n-胞腔 e 和一个 $(n-1)$-胞腔 τ 各有这样一个矩阵元，即有

$$\partial e=\sum_\tau[e,\ \tau]\ \tau,$$

整数 $[e,\ \tau]$ 称为关联数（incidence number）．下面的图

$$\begin{array}{ccccc}
H_n(D^n,S^{n-1}) & \xrightarrow[\approx]{\partial} & H^{n-1}(S^{n-1}) & & \\
\downarrow{\scriptstyle\varphi_{e*}} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_{e*}} & & \\
H_n(X^n,X^{n-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(X^{n-1}) & & \\
\| & & \downarrow & & \\
W_n(X) & & H_{n-1}(X^{n-1},X^{n-2}) & \xrightarrow{\approx} & H_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \\
 & \searrow{\scriptstyle\partial_n} & | & & \downarrow{\scriptstyle p_{\tau*}} \\
 & & W_{n-1}(X) & & H_{n-1}(\tau/\partial\tau) \\
 & & & & \uparrow{\scriptstyle\approx\tilde{\varphi}_{\tau*}} \\
 & & & & H_{n-1}(S^{n-1})
\end{array}$$

说明 $[e, \tau]$ 就是下面映射的映射度

$$\begin{array}{ccccccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\varphi_e} X^{n-1} \xrightarrow{p} X^{n-1}/X^{n-2} \xrightarrow{P_\tau} & \tau/\partial\tau & \xleftarrow{\tilde{\varphi}_\tau} & S^{n-1} \\ \downarrow & & & & \uparrow \\ & & \tilde{\varphi}_\tau^{-1} \circ P_\tau \circ p \circ \varphi_e & & \end{array}$$

生成元要适当选择，即是说 e 和 τ 要定向. 这可以用来实际计算. 例如，设 $\tilde{\varphi}_\tau^{-1} \circ P_\tau \circ p \circ \varphi_e$ 是光滑映射，而以 $b \in S^{n-1}$, $b \neq *$ 为一个正规值. 这时 b 可以看成是 $b \in \tau^\circ \subset X^{n-1}$ 而可以用 $\varphi_e^{-1}(b)$ 的局部指标来计算 $[e, \tau]$.

例2 和复射影空间一样，实射影空间 RP^n 也有一个 CW-剖分，对每一个维数 $k \leqslant n$ 都有一个 k-胞腔 e_k. 对于 e_k 的贴附映射 $\varphi^k: S^{k-1} \longrightarrow \mathrm{RP}^{k-1}$ 是

$$x = (x_0, \cdots, x_{k-1}) \longmapsto [x_0, \cdots, x_{k-1}].$$

每一点 $[x]$ 只要 $x_{k-1} \neq 0$ 都在 e°_{k-1} 中，我们有

$$(\varphi^{k-1})[x] = \{x, -x\}.$$

因为对径映射

$$\mu: S^{k-1} \longrightarrow S^{k-1}, \quad x \longmapsto -x$$

之映射度是 $(-1)^k$，我们可得关系式

$$\partial e_k = [1 + (-1)^k] e_{k-1},$$

所以，以 Z 为系数域的复形 $W(X)$ 是

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 \longrightarrow & W_n & \longrightarrow & W_{n-1} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & W_2 & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_0 & \longrightarrow 0 \\ & \| & & \| & & & & & & & \\ 0 \longrightarrow & Z & \xrightarrow{1+(-1)^n} & Z & \longrightarrow \cdots \xrightarrow{0} & Z & \xrightarrow{2} & Z & \xrightarrow{0} & Z & \longrightarrow 0. \end{array}$$

由此可以算出

$$\tilde{H}_k(\mathrm{RP}^n, Z) = \begin{cases} 0, & k \text{ 为偶或 } k > n; \\ Z_2, & k \text{ 为奇且 } 0 < k < n; \\ Z, & k = n \text{ 而 } n \text{ 为奇}. \end{cases}$$

当 $n=2$ 时，这里的结果和前面用单纯复形计算的一样. 读者会体会得到这里的计算更为经济. 这里的 CW-剖分对每一个维数只用

一个胞腔. 在单纯理论中，至少用了16个2-单形才对 RP^2 作出了一单纯剖分. 再举一个平凡的例子. n 维球面 S^n 也有一个 CW-剖分，它有两个胞腔，一个0-胞腔 $*$ 和一个 n-胞腔，以及一个平凡的贴附映射 $S^{n-1}\longrightarrow *$.

最后一点说明：一个单形剖分当然也是一个 CW-剖分. 如果我们象上面那样把连接数计算到底的话，而且时刻记住单形的定向，那么最后恰好得到

$$\partial\,[v_0,\ \cdots,\ v_k] = \sum_i (-1)^i\,[v_0,\ \cdots,\ \hat{v}_i,\ \cdots,\ v_k].$$

所以，我们又一次证明了单纯同调就是奇异同调. 说实话，这只不过是取明显的计算的形式来证明这个结论罢了.

参 考 文 献

[1] Dold, A., *Lectures on Algebraic Topology*, Springer Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1972.

[2] Pontrjaginagin, L. S., *Foundations of combinatorial Topology*, Graylock, 1952.

[3] Spanier, E. H., *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, 1966.

第十章　上同调

§1. 引　言

上一章中把上同调定义为同调的形式对偶，建立它是因为流形 M 的 de Rham 群 $H_R^*(M)$恰好是奇异同调 $H_*(M,R)$的对偶——通过积分实现．所以奇异上同调是表明 de Rham 群的拓扑不变性之自然的方法．作为同调的形式对偶，上同调自然和同调有许多相似的性质．其实，上一章里建立的形式性质，对于上同调也都有类似的命题，但对于上同调，诱导同态与同调的诱导同态方向相反．回忆一下，若 $f:X\longrightarrow Y$ 是一个映射，它诱导出一个同态

$$f_{\#}:S(X)\longrightarrow S(Y).$$

由此得出奇异同调间的同态

$$f_*:H_*(X)\longrightarrow H_*(Y).$$

但因上链是

$$S^*(X)=\mathrm{Hom}(S(X),R)\ (R:\text{基域}),$$

所以我们现在在上链上得到的诱导同态是

$$f^{\#}:S^*(Y)\longrightarrow S^*(X).$$

由此再过渡到同调所得的同态，方向自然也相反，即

$$f^*:H^*(Y)\longrightarrow H^*(X)$$

(传统上用了一个不恰当的名词："上" 同调 "co-" homology，它其实是 "逆" 变函子—— "contra-" variant functor，而同调这函子反而是"协"变"co-"variant——的．Hilton 和 Wiley 曾建议把 cohomology 的字头 "co" 改为 "contra" ——上同调改为逆同调，可惜毫无结果)．这个看来无甚差别其实有深远的含义，使得上同调虽远远

不如同调之直观(一个上链作为一个"泛函"是很难"看得见"),却肯定地是更有力的工具，其理由在于上同调有乘积这个附加的构造，使它成为一个代数(或一个环)，而不象同调只是一个模（或一个群）.

拓扑学中一个自然的运算是取两个空间的笛卡儿乘积 $X\times Y$. 人们自然想了解，它们的同调即$H_*(X\times Y)$,$H_*(X)$和 $H_*(Y)$ 的关系，但是这个问题并没有直截了当的答案，然而至少可以看到下述的情况——设 X 与 Y 是 CW 复形,$X\times Y$ 显然也是,而$e\times\tau$为胞腔，这里 e 和 τ 分别为 X 和 Y 的胞腔. 用链复形的话来说. 这意味着

$$W(X\times Y)=W(X)\otimes W(Y).$$

它给出关系式

$$H_*(X)\otimes H_*(Y)\longrightarrow H_*(X\times Y),$$
$$[\alpha],[\beta]\longmapsto[\alpha\otimes\beta],$$

以及

$$H^*(X)\otimes H^*(Y)\longrightarrow H^*(X\times Y),$$
$$[\varphi]\times[\psi]\longmapsto[\varphi\otimes\psi].$$

至此为止，上同调和同调仍旧是平行的理论. 若令 $X=Y$，我们有对角映射

$$\Delta:X\longrightarrow X\times X,\ x\longmapsto(x,x).$$

取诱导映射再和上面的映射合起来，有

$$H_*(X)\otimes H_*(X)\longrightarrow H_*(X\times X)\xleftarrow{\Delta_*}H_*(X),$$

$$H^*(X)\otimes H^*(X)\longrightarrow H^*(X\times X)\xrightarrow{\Delta^*}H^*(X).$$

因为 Δ^* 的方向适当,第二行就可定义一个乘积,而第一行很不幸,什么都给不出（当然这样说也不全对，见§7).

上面的观察来自 Lefschetz，后来 Steenrod 作了详细的解释(Steenrod 在对乘积的了解上也有过大贡献). 这件事以及同调和上同调之间的其它对偶关系，就是本章的主题.

§ 2. Pontrjagin 对偶性

这一节是准备知识，我们想把同调和上同调的对偶弄确切. 主要结论是他们并不总是真正地互相对偶的.

我们总是考虑一个固定的基环 R. 对于一个模(即 R-模)M，其对偶 M^* 如通常一样即线性泛函 $\varphi: M \longrightarrow R$ 所成之模 M^*. 令 M, N 为模，而

$$B: M \times N \longrightarrow R$$

是一个双线性形式（即 $B: M \otimes N \to R$ 是张量积上的线性泛函）. 于是 B 诱出一个映射

$$\tilde{B}: M \longrightarrow N^*,$$
$$x \longmapsto B\ (x,\ \cdot).$$

所谓 B 是一个对偶性，即指 $\tilde{B}$ 是一个同构，即若 $B(x,y)=0$对一切 y 成立$\Leftrightarrow x=0$，而且 N^* 中一切元 $\varphi \in N^*$ 都可写成 $\varphi(\cdot)=B(x,\cdot)$, x 是 M 的某个元.

注意，我们是按一定次序来做这件事的. 因为 B 还诱出另一个映射

$$\hat{B}: N \longrightarrow M^*,$$
$$y \longmapsto B(\cdot, y),$$

即使 $\tilde{B}$ 是同构，$\hat{B}$ 也可能不是. 例如我们有自然的形式

$$D: M^* \times M \longrightarrow R,$$
$$(\varphi,\ x) \longmapsto \varphi(x).$$

于是 $\tilde{D}: M^* \longrightarrow M^*$ 就是恒等映射，它当然是同构，但是

$$\hat{D}: M \longrightarrow M^{**},$$
$$x \longmapsto \hat{x}$$

是由 $\hat{x}(\varphi)=\varphi(x)$给出的，而它可能不是同构. 事实上，$\hat{D}$ 为同构等价于说 $\tilde{B}$ 为同构$\Leftrightarrow \hat{B}$ 为同构，这当基环 R 为体而我们处理的模（即矢量空间）为有限维时为真. 所以这只是简单的模型.

设 $C=\{C_i,\partial\}$ 是一个 R 上的链复形，$C^*=\{C^i,\delta\}$是对偶的上链复形．我们有自然的对偶性 D，

$$D: C^i\times C_i \longrightarrow R,$$
$$(\varphi,\ c)\longmapsto \varphi(c).$$

由定义$(\delta\varphi)(c)=\varphi(\partial c)$，这说明 D 诱导出一个配对（pairing）

$$H^*(C)\times H_*(C)\longrightarrow R,$$
$$[\varphi],[c]\longmapsto[\varphi(c)]$$

称为赋值配对或 Pontrjagin 对偶性．但是它并不总是一个对偶性．取对偶的基本的左正合性质，若

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{\alpha}N\xrightarrow{\beta}L\longrightarrow 0$$

是正合的，在对偶之后只能得到如下的正合序列

$$0\longrightarrow L^*\xrightarrow{\beta^*}N^*\xrightarrow{\alpha^*}M^*.$$

把它应用到下面的图中

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 0 & & & & & & \\
 & & & & & & \downarrow & & & & & & \\
0\to & Z_{i+1} & \xrightarrow{i} & C_{i+1} & \xrightarrow{\partial} & & B_i\to 0 & & 0 & & & & \\
 & & & & & & \downarrow j & & \downarrow & & & & \\
 & & & & 0\longrightarrow & & Z_i & \xrightarrow{i} C_i \xrightarrow{\partial} & B_{i-1} & \longrightarrow 0 & & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \downarrow j & & & & \\
 & & & & & & H_i & & 0\to Z_{i-1} & \xrightarrow{i} & C_{i-1} & \xrightarrow{\partial} & B_{i-2}\longrightarrow 0 \\
 & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & & & & & 0 & & H_{i-1} & & & & \\
 & & & & & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & & & & & 0 & & & &
\end{array}$$

得

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 0 & & & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & & & \\
 & & & & [H_{i-1}(C)]^* & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & & & [H_i(C)]^* & & \\
0 \to & B_{i-2}^* & \to & C_{i-1}^* & \xrightarrow{i^*} Z_{i-1}^* & \cdots \to 0 & & & & & \\
 & & & & \downarrow j^* & & & & \downarrow & & \\
 & & & 0 \to & B_{i-1}^* & \xrightarrow{\partial^*} & C_i^* & \xrightarrow{i^*} & Z_i^* & \cdots \to 0 & \\
 & & & & \vdots & & & & \downarrow j^* & & \\
 & & & & 0 & & & 0 \to & B_i^* & \xrightarrow{\partial^*} C_{i+1}^* & \to Z_{i+1}^*
\end{array}
$$

若 $\varphi \in C_i^*$，$[\partial^* j^* i^*(\varphi)](c) = \varphi(ij\partial c) = \varphi(\partial c)$，所以

$$\partial^* j^* i^* = \delta.$$

设 $\delta\varphi = 0$. 因为 ∂^* 是一对一的，故有 $j^* i^*(\varphi) = 0$. 所以 $i^*(\varphi) \in [H_i(C)]^*$. 映射

$$[\varphi] \longmapsto i^*(\varphi)$$

正是对偶性

$$H^i(C) \longrightarrow H_i(C)^*.$$

为了证明它是一对一的，设 $i^*(\varphi) = 0$. 如果中间一行是正合的，我们可以退回到 B_{i-1}^*，若上一行与左一列也都是正合的，则还可以追踪到 C_{i-1}^*，说明 $\varphi = \delta\psi$；若中间一行也是正合的，则 Z_i^* 中的任一个东西都可以追回到 C_i^* 而有全射. 所以对于真正对偶性的障碍在用虚箭头指出的①，②两处，那么，在什么条件下可以除去这种障碍呢？回到

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} L \longrightarrow 0$$

如果 L 是自由的，则序列是分裂的，从而

$$0 \longrightarrow L^* \xrightarrow{\beta^*} N^* \xrightarrow{\alpha^*} M^* \longrightarrow 0$$

将是正合的（甚至是分裂的），在我们的情况下 L 就是 B_{i-1}，B_{i-2}和 $H_{i-1}(C)$. 若 $C=S(X)$是空间 X（或(X,A)）的奇异复形，则 $B(X,A)$ 总是自由的，但是 $H_{i-1}(C)=H_{i-1}(X,A)$就不在我们控制之中了. 所以有

定理（Pontrjagin 对偶性） 若模 $H_{i-1}(X, A; R)$ 是自由的，则赋值配对

$$H^i(X,A;R)\times H_i(X,A;R)\longrightarrow R$$

是对偶性. 特别，若 R 是一个体则总是这样.

以上只是所谓上同调的万有系数定理之特例. 我们只指出，若 R 是一个体，而 (X, A) 是一个相对有限 CW 复形，则 $H^*(X,A;R)$ 和 $H_*(X,A;R)$ 确实是通过赋值配对而对偶的.

§3. 乘积空间和 Künneth 公式

我们已在 §1看到笛卡儿乘积 $X\times Y$ 的同调是定义上同调的乘积运算的关键，若 X 和 Y 都是CW 复形，则 $X\times Y$ 也自然地是CW 复形而且以 $\sigma\times\tau$ 为其胞腔，σ，τ 分别是 X 与 Y 的胞腔（这也是 CW 复形优于单纯复形之一点. 当 X，Y 有单形剖分时，$X\times Y$ 并没有“自然的”单形剖分）. 由此可以看出，$W(X\times Y)=W(X)\otimes W(Y)$，但这还不完全，还需要刻画 $W(X\times Y)$中的边缘算子 ∂. 记住，对于 X 中的 n-胞腔 e，有一个元$[e]\in H_n(X^n,X^{n-1})$与之对应. 为了求$\partial[e]$，先取 e 之几何边缘 $\partial e=\bar{e}-e^\circ\subset X^{n-1}$，$\partial e$ 将与有限个$(n-1)$-胞腔 e_i 相交，其连接数为$[e,e_i]$，然后令 X^{n-2}塌缩(collapse)以得出

$$[e_i]\in H_{n-1}(X^{n-1},X^{n-2})=H_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}),$$

于是有

$$\partial[e]=\sum_i[e,e_i][e_i]$$

总之，在几何边缘中令 X^{n-2}塌缩即可得到 $\partial[e]$ 的代数公式. 为了

在 $X\times Y$ 中作这件事，定义空间对的乘积为

$$(X,A)\times(Y,B)=(X\times Y,(X\times B)\cup(A\times Y))$$

较为方便. 例如，若 $X=D^n$，$Y=D^m$ 为圆盘，则 $X\times Y=D^n\times D^m=D^{n+m}$. 而我们有 $\partial(D^n\times D^m)=(\partial D^n\times D^m)\cup(D^n\times\partial D^m)$，即

$$(D^{n+m},\partial D^{n+m})=(D^n,\partial D^n)\times(D^m,\partial D^m).$$

由此式可知，$e\times\tau$ 的几何边缘是

$$\partial(e\times\tau)=(\partial e\times\tau)\cup(e\times\partial\tau),$$

它是在 $(X^{n-1}\times Y^m)\cup(X^n\times Y^{m-1})\subset(X\times Y)^{n+m-1}$ 中. 在其中令 $(X\times Y)^{n+m-2}$ 塌缩，从而给出

$$\partial([e]\otimes[\tau])=\partial[e]\otimes[\tau]\pm[e]\otimes\partial[\tau],$$

符号 ± 视定向而定，这就启发我们给出以下的

定义　令 A，B 为复形，则 $A\otimes B$ 表示以下的复形

$$(A\otimes B)_k=\bigoplus_{i+j=k}A_i\otimes B_j,$$

而边缘算子 ∂ 定义为

$$\partial(a\otimes b)=\partial a\otimes b+(-1)^{\deg a}a\otimes\partial b. \qquad (*)$$

∂ 的定义中用语不太准确，应该说

$$(a\otimes b)\longmapsto\partial a\otimes b+(-1)^{\deg a}a\otimes\partial b$$

显然是一个双线性算子，从而定义 $A\otimes B$ 上的一个映射 ∂ 并适合 (*). 定义中的因子 $(-1)^{\deg a}$ 是为了保证 $\partial\partial=0$，这一点读者可以自己验证.

作一般的讨论，需要进到奇异理论. 我们立刻就遇到麻烦，因为 $S(X\times Y)=S(X)\otimes S(Y)$ 显然一般不成立，或者除去维数为0的情况，因为这时 $S_0(X\times Y)=S_0(X)\otimes S_0(Y)$. 但是从已有的经验，大可不必着急，因为很可能 $S(X\times Y)$ 和 $S(X)\otimes S(Y)$ 具有相同的同调，例如在切断定理中就是这样. 但是现在的问题更为广泛，因为我们没有一个子复形，从而也就没有作为同伦等价对象的包含映射，仅有的可以看到的联系是一个等同关系

$$A_0:S_0(X\times Y)\simeq S_0(X)\otimes S_0(Y),$$

$$\sigma\times\tau\ \leftrightarrow\ \sigma\otimes\tau$$

(σ 和 τ 就是 X 和 Y 中的点). 但这已经足够了，因为我们有一个很一般的定理：

定理 (Eilenberg-Zilber)　函子 $S(X)\otimes S(Y)$ 与 $S(X\times Y)$ 是同伦等价的. 确切地说，存在自然的链映射

$$\varphi: S(X)\otimes S(Y)\longrightarrow S(X\times Y),$$

$$\psi: S(X\times Y)\longrightarrow S(X)\otimes S(Y),$$

使得 $\varphi_0=A_0^{-1}$，$\psi_0=A_0$. 任意的这种链映射自动地是同伦等价，而且除相差一个同伦之外是唯一的.

此定理虽然范围广泛，其实它的思想很简单. 只需用零调承载子的方法作出定理中所需要的一切就行了. 也就是只需注意，处处都用 $H_*(\Delta_*)$ 代替标准单形 Δ_k 就行了. 但是有一点十分关键，即我们的作法必须都是函子的，亦即自然的. 例如在作 φ 时，必须要有可交换性：

$$\begin{array}{ccc}
S(X)\otimes S(Y) & \xrightarrow{\varphi_{X,Y}} & S(X\times Y)\\
\downarrow{\scriptstyle f_*\otimes g_*} & & \downarrow{\scriptstyle (f\times g)_*}\\
S(X')\otimes S(Y') & \xrightarrow[\varphi_{X',Y'}]{} & S(X'\times Y')
\end{array}$$

这里 $f: X\longrightarrow X'$，$g: Y\longrightarrow Y'$ 是两个映射. 零调承载子方法意味着可以作出许多选择. 对这种作法可以举一个例. 例如说，因为 $\partial\alpha=0$ 对 $\alpha\in S(\Delta_k)$ 成立，而且 $H_*(\Delta_k)$ 又是零调的，一定存在 β 使 $\alpha=\partial\beta$，选一个 β 而且规定你想要找的东西是 β. 对于一个空间来说，这样做毫无问题，对所有的空间同时作出选择使所有有关的图式都是可交换的这一点也是可以做到的，而 Eilenberg 和 Zilber 的才智正在于此. 他们的办法后来就叫做零调模型定理 (acyclic model theorem). 我们不讲它的细节，但是现在正是弄清函子和自然性概念的好机会. 我们懂得，代数拓扑不变量诸如同调 H_* 是给几何空间 X 照了一张代数的相片：$X\leadsto H_*(X)$，但不仅于此，它还给几何映射 $f: X\longrightarrow Y$ 也照了一张代数的相片：$(f: X\longrightarrow Y)\leadsto(f_*: H_*(X)\longrightarrow H_*(Y))$. 最后，也是最重要的是映射之间

的关系以某种形式保存下来了：$(fg)_* = f_* g_*$. 只有所有这一切都成立时，才把这个不变量称为函子. 当我们需要比较函子时，很自然地我们是要比较其所有的相片，而不只是它在一个几何空间上的“值”. 在这个意义下，函子之间的比较或“同构”称为“自然的”或“函子的”.

Eilenberg-Zilber 定理的要点在于可用 $S(X) \otimes S(Y)$ 代替 $S(X \times Y)$，只要它们可以归化为等同关系 Δ_0就行，具体的代换方法是无关紧要的. 所以当我们选用了一种代换法之后，就写作

$$S(X) \otimes S(Y) \xleftarrow{\text{EZ}} S(X \times Y).$$

下面就是代换法之一.

例 令 $\Delta_k = \langle e_0, e_1, \cdots, e_k \rangle$ 为标准 k-单形，$0 \leqslant l \leqslant k$. 所谓前 l-面就是映射

$$F^l: \Delta_l \longrightarrow \Delta_k,$$

它把 Δ_l 的顶点映为 Δ_k 的前 $l+1$个顶点 $e_0, e_1, \cdots, e_l$. 后 $(k-l)$-面则是映射

$$B^{k-l}: \Delta_{k-l} \longrightarrow \Delta_k,$$

它把 Δ_{k-l}的顶点映为 Δ_k 的后 $k-l+1$个顶点 $e_l, \cdots, e_k$. 作投影 $\pi_1: X \times Y \longrightarrow X, \pi_2: X \times Y \longrightarrow Y$. 定义

$$\varphi: S_k(X \times Y) \longrightarrow [S(X) \otimes S(Y)]_k,$$

$$\sigma \longmapsto \sum_l (\pi_1 \circ \sigma \circ F^l) \otimes (\pi_2 \circ \sigma \circ B^{k-l}),$$

这是 Alexander 和 Whitney 作出的一个 EZ.

Eilenberg-Zilber 定理把 $H_*(X \times Y)$的计算化为一个纯粹的代数问题. 已知复形 A 和 B，怎样计算 $H_*(A \otimes B)$?可是这又是一个没有简单答案的问题. 很象取对偶的情况，问题中心仍在于$\otimes$不是一个正合函子. 设已给正合序列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} L \longrightarrow 0.$$

只能得出

$$M \otimes B \xrightarrow{\alpha \otimes 1} N \otimes B \xrightarrow{\beta \otimes 1} L \otimes B \longrightarrow 0$$

为正合．让我们看一下，这在几何上表示什么．

令 $a \in A$，$b \in B$ 为两个循环．由 $A \otimes B$ 中边缘算子 ∂ 的定义，有

$$\partial(a \otimes b) = \partial a \otimes b \pm a \otimes \partial b = 0.$$

事实上，我们还可以得出一个适当的自然同态

$$\alpha: H_*(A) \otimes H_*(B) \longrightarrow H_*(A \otimes B),$$

$$[a] \otimes [b] \longmapsto [a \otimes b],$$

最好的情况是 α 为同构，有时确为如此．一个例子是

引理 若 A 为自由的，$\partial A = 0$，即 $H_*(A) = A$，则 α 为同构．

证 若 A 为以下形式

$$A_k = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ R, & k = n, \end{cases}$$

即 A 中之元全集中在一个维数 n 上，这引理是明显的．一般情况下的 A 则是这种集中的复形之直和．

今定义复形 Z 与 D 如下：

$$Z_i = Z_i(A) \quad (A\text{ 中的循环}),$$

$$D_i = B_{i-1}(A) \quad (A\text{ 中的边缘}),$$

注意 D 中指标的变化，再注意在 D 与 Z 中边缘算子均为0．我们有正合序列

$$0 \longrightarrow Z \longrightarrow A \longrightarrow D \longrightarrow 0.$$

设 D 是自由的，于是序列是分裂的．与 B 作张量积，即得一个正合序列

$$0 \longrightarrow Z \otimes B \longrightarrow A \otimes B \xrightarrow{j} D \otimes B \longrightarrow 0.$$

取其同调，即得一个长正合序列

$$\cdots \longrightarrow H_i(A \otimes B) \xrightarrow{j_*} H_i(D \otimes B) \xrightarrow{\Delta_i} H_{i-1}(Z \otimes B) \longrightarrow \cdots.$$

由此又有一个短正合序列

$$0 \longrightarrow \frac{H_t(Z \otimes B)}{\operatorname{Im}\Delta_{t+1}} \longrightarrow H_t(A \otimes B) \longrightarrow \ker \Delta_t \longrightarrow 0.$$

回想一下连接同态 Δ_t 的定义就可以看到现在它正是由包含映射 $D \xrightarrow{i} Z$ 所诱导的. 用上之引理，即有

$$\begin{array}{ccc} D \otimes H(B) & \xrightarrow{i \otimes 1} & Z \otimes H(B) \\ \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow \\ H(D \otimes B) & \xrightarrow{(i \otimes 1)_*} & H(Z \otimes B) \end{array}$$

我们还有一个正合序列

$$0 \longrightarrow D \xrightarrow{i} Z \longrightarrow H(A) \longrightarrow 0.$$

若 $H(A)$ 是自由的，此序列必是分裂正合的，所以

$$0 \longrightarrow D \otimes H(B) \xrightarrow{i \otimes 1} Z \otimes H(B) \longrightarrow H(A) \otimes H(B) \longrightarrow 0$$

也是正合的，所以 $\ker(i \otimes 1) = 0$, $\operatorname{coker}(i \otimes 1) = H(A) \otimes H(B)$. 如果我们讨论奇异同调，整个复形 $S(X, A)$ 都是自由的，但边缘 $B(X, A)$ 和循环 $Z(X, A)$ 则不一定，所以需要更特殊一些. 设基环 R 是一个主理想环. 因为我们有一个基本的事实——

主理想整环定理 在主理想整环上之自由模，其子模仍是自由的.

于是 $B(X, A) \subset Z(X, A) \subset S(X, A)$ 都是自由的，余下仍需注意的条件只有同调 $H(A)$ 是否自由，注意到 A 和 B 是对称的，即有

定理(Künneth 公式) 只要 $H_*(X)$ 与 $H_*(Y)$ 中有一个是自由的，则

$$\alpha: H_*(X) \otimes H_*(Y) \longrightarrow H_*(X \times Y)$$

是同构.

上述定理还不是最一般的形状. 对于上同调和种种相对的情况也都有相应的情况和相应的定理. 它们都有一些技巧性的要求，但我不打算在这些细节上再费时间，所以只是给出以后要用的结果.

定理 只要 $H_*(X,A)$或 $H_*(Y,B)$为自由，而在$\{X\times Y\}$中$\{X\times B, A\times Y\}$是切除的，则

$$\alpha: H_*(X,A)\otimes H_*(Y,B)\longrightarrow H_*((X,A)\times(Y,B))$$

是同构.

对于上同调，我们看到若 $\varphi\in A^*$，$\psi\in B^*$，则可以定义 $\varphi\otimes\psi\in(A\otimes B)^*$为

$$(\varphi\otimes\psi)(a\otimes b)=\varphi(a)\cdot\psi(b).$$

这就给出一个映射

$$\gamma: A^*\otimes B^*\longrightarrow(A\otimes B)^*,$$

它不一定是同构. 但是例如当 A, B 为自由且有有限基底时，它都是同构. 由此，再用 EZ: $S(X\times Y)\longrightarrow S(X)\otimes S(Y)$，即得一个映射

$$S^*(X)\otimes S^*(Y)\longrightarrow S^*(X\times Y).$$

因而有一个映射

$$\beta: H^*(X)\otimes H^*(Y)\longrightarrow H^*(X\times Y).$$

也可得到它的相对形式

$$\beta: H^*(X,A)\otimes H^*(Y,B)\longrightarrow H^*((X,A)\times(Y,B)).$$

于是有

定理 若 $H^*(X, A)$ 或 $H^*(Y, B)$ 是自由的，而 $\{X\times B, A\times Y\}\subset X\times Y$ 又是切断的，则 β 为同构.

在上述这些 Künneth 公式中的基环 R 都设为主理想整环. 最常用的情况是 R 为一个体，或整数环.

§4. “上”积（Cup Product）与“卡”积（Cap Product）

现在我们可以做§1中提到的工作，即定义上同调的乘积运算了. 其最简单的形式如下：

令 X 为一空间，$X\times X$ 为其自身的笛卡儿积. 有对角映射

$$\Delta: X \to X \times X, \quad x \longmapsto (x, x).$$

应用 Eilenberg-Zilber 等价性，即得对角链映射

$$\tilde{\Delta}: S(X) \xrightarrow{\Delta^*} S(X \times X) \xrightarrow{\mathrm{EZ}} S(X) \otimes S(X).$$

取其对偶，并用自然映射 γ（见 § 3），即得上链复形上的一个链映射

$$S^*(X) \otimes S^*(X) \xrightarrow{\gamma} [S(X) \otimes S(X)]^* \xrightarrow{\tilde{\Delta}^*} S^*(X).$$

最后，取其上同调，即有

$$H^*(X) \otimes H^*(X) \longrightarrow H^*[S^*(X) \otimes S^*(X)] \longrightarrow H^*(X),$$

$$u \otimes v \quad \longmapsto \quad u \smile v,$$

我们称这个乘积为上积，记作$\smile$．注意，若 $\deg u = k$，$\deg v = l$，则 $\deg(u \smile v) = k + l$，有时 $u \smile v$ 也简记为 uv.

在应用中，要用到它的相对形式．还有一个与之相伴的运算称为卡积．为了表达清楚，我们提纲挈领地讲代数的情况．

仍设有基环 R. 对于链复形 $C = \{C_i, \partial\}$ 有对偶的上链复形 $C^* = \{C_i^*, \delta\}$ 但我们要稍微修改一下上边缘算子 δ:

$$\delta\varphi(C) = (-1)^i \varphi(\partial C), \; i = \deg\varphi,$$

这显然不影响上同调．我们把一切都当作链复形处理以求统一．为此，把 C^* 看成有负整数指标的链复形

$$(C^*)_{-i} = C_i^*.$$

因为这样就有

$$\delta: (C^*)_{-i} = C_i^* \longrightarrow C_{i+1}^* = (C^*)_{-i-1}.$$

我们再规定，若 $\deg\varphi \neq \deg c$，则 $\varphi(c) = 0$. 以下凡有次数的 a 其次数都写成 $|a|$.

令 B 为任一链复形．考虑一个映射

$$C^* \times B \times C \longrightarrow B,$$

$$(\varphi, b, c) \longmapsto (-1)^{(|b| + |c|)|\varphi|} \varphi(c) b.$$

显然，它对其各个因子都是线性的，所以它定义一个线性映射

$$/: C^* \otimes B \otimes C \longrightarrow B,$$

$$\varphi \otimes b \otimes c \longmapsto /\varphi \otimes (b \otimes c) = (-1)^{(|b|+|c|)|\varphi|}\varphi(c)b,$$

我们称它为一个“斜划（slant）运算”. 注意若 B 是一个集中的复形：$B_0 = R$，$B_i = 0$ $(i>0)$，则“/”除了可能相差一个符号外就是§2讲的赋值运算. 我们说/是一个链映射，因为

$$\partial(\varphi \otimes b \otimes c) = \delta\varphi \otimes b \otimes c + (-1)^{|\varphi|}\varphi \otimes \partial b \otimes c$$
$$+ (-1)^{|\varphi|+|b|}\varphi \otimes b \otimes \partial c$$

所以

$$/\partial(\varphi \otimes b \otimes c) = (-1)^{(|\varphi|+1)(|b|+|c|)+|\varphi|}\varphi(\partial c)b$$
$$+ (-1)^{|\varphi|+|\varphi|(|b|+|c|-1)}\varphi(c)\partial b$$
$$+ (-1)^{|\varphi|+|b|+|\varphi|(|b|+|c|-1)}\varphi(\partial c)b.$$

若 $|\varphi| = |c|$，则

$$/\partial(\varphi \otimes b \otimes c) = (-1)^{|\varphi|(|b|+|c|)}\varphi(c)\partial b = \partial/\varphi \otimes b \otimes c.$$

若 $|\varphi| \neq |c|$，则 $/\partial(\varphi \otimes b \otimes c) = 0$. 这是因为，若 $|\varphi| \neq |c|$ 且 $|\varphi| \neq |c| - 1$，$/\partial(\varphi \otimes b \otimes c)$ 之各项均为0，而当 $|\varphi| = |c| - 1$ 时，第一、第三项之符号分别为

$$(-1)^{|\varphi|(|b|+|c|)+|b|+|c|+|\varphi|}, \quad (-1)^{|\varphi|(|b|+|c|)+|b|},$$

彼此相反.

现在进入基本的情况，设有复形 A，B，C 及一个“对角”链映射

$$\Delta: A \longrightarrow B \otimes C.$$

于是有链映射

$$B^* \otimes C^* \xrightarrow{\ \gamma\ } (B \otimes C)^* \xrightarrow{\ \Delta^*\ } A^*,$$

$$C^* \otimes A \xrightarrow{\ 1 \otimes \Delta\ } C^* \otimes B \otimes C \xrightarrow{\ /\ } B.$$

再进取其同调即有两个映射，分别称为上积“$\smile$”与卡积“$\frown$”如下：

$$\smile: H^*(B) \otimes H^*(C) \longrightarrow H^*(A),$$

$$\frown: H^*(C) \otimes H_*(A) \longrightarrow H_*(B).$$

若用同调类的代表元来表示则可描述如下：

令 $[\varphi] \in H^*(B), [\psi] \in H^*(C), [a] \in H_*(A)$. 记

$$\Delta a = \sum_i b_i \otimes c_i,$$

于是

$$[\psi] \smile [a] = [\sum_i (-1)^{|\psi||b_i|} \psi(c_i) b_i],$$

$$[\varphi] \smile [\psi] = [\xi],$$

ξ 是上链

$$\xi(a) = (\varphi \otimes \psi) \Delta a = \sum_i \varphi(b_i) \psi(c_i).$$

因

$$|[\varphi] \smile [\psi]| = |\varphi| + |\psi|, |[\psi] \frown [a]| = |a| - |\psi|,$$

所以若 $|a| < |\psi|$，则 $[\psi] \frown [a] = 0$，而在 $B=R$，$A=C$ 的特殊情况下，$[\psi] \frown [a] = \langle [\psi], [a] \rangle$ 正是 Pontrjagin 配对.

这些运算的基本性质：

(1) 上积和卡积都是自然的，即是说：若有一个复形与链映射的图

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Delta} & B \otimes C \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g \otimes h} \\ A_1 & \xrightarrow{\Delta_1} & B_1 \otimes C_1 \end{array}$$

而除了相差一个同伦之外是可交换的，即是说 $\Delta_1 f$ 与 $(g \otimes h) \Delta$ 是链同伦的，则

$$\begin{array}{ccc} H^*(B) \otimes H^*(C) & \xrightarrow{\smile} & H^*(A) \\ \uparrow{\scriptstyle g^* \otimes h^*} & & \uparrow{\scriptstyle f^*} \\ H^*(B_1) \otimes H^*(C_1) & \xrightarrow{\smile} & H^*(A_1) \end{array}$$

以及

$$\begin{array}{ccc} H^*(C)\otimes H_*(A) & \xrightarrow{\frown} & H_*(B) \\ \uparrow h^* & \downarrow f_* & \downarrow g_* \\ H^*(C_1)\otimes H_*(A_1) & \xrightarrow{\frown} & H_*(B_1) \end{array}$$

都是可换的，亦即

$$g^*[\varphi]\smile h^*[\psi] = f^*([\varphi]\smile[\psi]),$$

$$g_*(h^*[\psi]\frown[a]) = [\psi]\frown f_*[a].$$

(2) 可结合性. 设有对角映射的同伦可换图

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Delta_1} & B_1\otimes C \\ \downarrow \Delta_2 & & \downarrow \Delta_4\otimes 1 \\ B\otimes C_1 & \xrightarrow{1\otimes\Delta_3} & B\otimes D\otimes C \end{array}$$

其中

$$\Delta_3: C_1 \longrightarrow D\otimes C, \quad \Delta_4: B_1 \longrightarrow B\otimes D.$$

则有

$$([\xi]\smile[\varphi])\smile[\psi] = [\xi]\smile([\varphi]\smile[\psi]), \qquad (*)$$

$$[\varphi]\frown([\psi]\smile[a]) = (-1)^{|\varphi||\psi|}([\varphi]\smile[\psi])\frown[a], \quad (**)$$

这里

$$[\varphi]\in H^*(D),[\psi]\in H^*(C),[\xi]\in H^*(B),[a]\in H_*(A).$$

令$0\longrightarrow A\xrightarrow{i}B\xrightarrow{j}C\longrightarrow 0$为复形的正合序列. 若 B 有一对角映射

$$\Delta: B\longrightarrow B\otimes B,$$

我们说 i 保持对角映射，若 $\Delta(A)\subset A\otimes A$，亦即下图为可换：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Delta} & A\otimes A \\ \downarrow i & & \downarrow i\otimes i \\ B & \xrightarrow{\Delta} & B\otimes B \end{array}$$

这时可以定义另一对角映射

$$\Delta_1: C\longrightarrow B\otimes C$$

如下：对于 $c\in C$，取一个 $b\in B$ 使 $j(b)=c$；再令

$$\Delta_1(c)=(1\otimes j)(\Delta b).$$

若 $j(b')=j(b)=c$，则由正合性，必有 $a\in A$ 使 $b'=b+ia$，所以

$$\Delta b'=\Delta b+\Delta i(a)=\Delta b+(i\otimes i)\Delta a.$$

但因 $(1\otimes j)(i\otimes i)\Delta a=(i\otimes ji)\Delta a=0$，所以 Δ_1 是适当定义的.

同样，我们又可定义 $\Delta_2:C\to C\otimes B$ 为

$$\Delta_2(c)=(j\otimes 1)\Delta b \qquad (j(b)=c).$$

Δ_1 和 Δ_2 在上同调中定义上积和卡积：

$$\smile:\quad H^*(B)\otimes H^*(C)\longrightarrow H^*(C),$$

$$\frown:\quad H^*(C)\otimes H_*(C)\longrightarrow H_*(B),$$

$$\smile:\quad H^*(B)\times H_*(C)\longrightarrow H_*(C).$$

(3) 令 $\partial:H_k(C)\longrightarrow H_{k-1}(A)$，$\delta:H^{k-1}(A)\longrightarrow H^k(C)$ 为连接的同态，在此情况下，令 $[c]\in H_*(C)$，$[\varphi]\in H^*(C)$，$[\psi]\in H^*(B)$，$[\xi]\in H^*(A)$，有

(i) $j_*([\varphi]\frown[c])=j^*[\varphi]\frown[c]$；

(ii) $\partial([\psi]\frown[c])=(-1)^{|\psi|}i^*[\psi]\frown\partial[c]$；

(iii) $\delta[\xi]\frown[c]=(-1)^{|\xi|}i_*([\xi]\frown\partial[c])$.

我们来验证(ii). 为了计算 $[\psi]\frown[c]$，令 $\Delta_2(c)=(j\times 1)\Delta d$，这里 $j(b)=c$. 记 $\Delta b=\sum_i b_i'\otimes b$，则 $[\psi]\frown[c]$ 除了可能相差符号之外，可以表示为

$$\sum_i (j(b_i'))\psi(b_i'').$$

由连接同态 ∂ 的定义，$\partial([\psi]\frown[c])=\left[\sum_i(\partial b_i')\psi(b_i'')\right]$. 另一方面 $\partial[c]=[\partial b]$. 为了计算 $i^*[\psi]\frown\partial[c]$，我们取 $\Delta(\partial b)=\partial(\Delta b)=\sum_i(\partial b_i'\otimes b_i''\pm b_i'\otimes\partial b_i'')$ 故 $i^*[\psi]\frown[c]$ 可表为

$$\sum\partial b_i'\cdot\psi(b_i'')+\sum b_i'\otimes\psi(\partial b_i''),$$

但因 $\delta\psi=0$，故第二项为0.

现在可以引入空间. 令 X 为一空间而 $A_1, A_2 \subset X$ 为子空间. 用一个 EZ 映射. 即可得一对角映射

$$\Delta: S(X) \xrightarrow{\Delta_\#} S(X \times X) \longrightarrow S(X) \otimes S(X).$$

记住 $S\{A_1, A_2\} = S(A_1) + S(A_2)$, 即由 $S(A_1) \smile S(A_2)$ 生成的子模, 在 Δ 之下, 它清楚地变成 $S(A_1) \otimes S(X) + S(X) \otimes S(A_2)$. 在投影

$$S(X) \otimes S(X) \longrightarrow S(X, A_1) \times S(X, A_2)$$

之下, 它再为0. 故可得一对角映射

$$S(X, \{A_1, A_2\}) \longrightarrow S(X, A_1) \otimes S(X, A_2).$$

若 $\{A_1, A_2\} \subset A_1 \cup A_2 = A$ 为切断的, 则称 (X, A_1, A_2) 为一个切断的三元组, 这时有乘积

$$\smile: \quad H^*(X, A_1) \times H^*(X, A_2) \longrightarrow H^*(X, A_1 \cup A_2),$$

$$\frown: \quad H^*(X, A_2) \times H_*(X, A_1 \cup A_2) \longrightarrow H_*(X, A_1).$$

因为 Eilenberg-Zilber 映射 EZ 除同伦外是唯一的, 而且是函子的, 故可应用以上一切代数的结果. 但还有别的.

对于链复形 A 和 B, 映射

$$T: \quad A \otimes B \longrightarrow B \otimes A, \qquad a \otimes b \longmapsto (-1)^{|a||b|} b \otimes a$$

是一个链映射, 它是因为

$$\partial T(a \otimes b) = (-1)^{|a||b|} \partial b \otimes a + (-1)^{|b|(|a|+1)} b \otimes \partial a,$$

$$T\partial(a \otimes b) = T(\partial a \otimes b + (-1)^{|a|} a \otimes \partial b)$$

$$= (-1)^{(|a|-1)|b|} b \otimes \partial a + (-1)^{|a||b|} \partial b \otimes a.$$

将它应用于空间 X, 我们有

$$S(X \times Y) \xrightarrow{\hat{T}_\#} S(Y \times X) \xrightarrow{EZ} S(Y) \otimes S(X) \xrightarrow{T} S(X) \otimes S(Y),$$

这里的 $\hat{T}$ 是几何映射 $\hat{T}: X \times Y \longrightarrow Y \times X, (x, y) \longmapsto (y, x)$. 现在 $T \circ \mathrm{EZ} \circ \hat{T}_\#$ 是一个链映射, 由唯一性定理, 它应同伦于 EZ: $T \circ \mathrm{EZ} \circ \hat{T}_\# \simeq \mathrm{EZ}$. 所以它们应给出同样的乘积. 把它算出来就有

(4) (梯级意义下的)可交换性(对于 $[\varphi] \in H^*(X, A_1)$, $[\psi] \in H^*(X, A_2)$, $[\varphi] \smile [\psi] = (-1)^{|\varphi||\psi|} [\psi] \smile [\varphi] \in H^*(X, A_1 \cup A_2)$).

在有了乘积以后, 我们希望有一个单位元, 有时这是可能的.

由于维数的原因，任意单位元$[\varphi]$必有$|\varphi|=0$. $S_0(X)$由 X 中的点组成. 令 $\varphi\in S^0(X)$是以下的0-上链

$$\varphi(x)=1,\ \text{对一切}\ x\in X$$

(记住 R 中有单位元1)，则对任一个1-单形 σ，有

$$\delta\varphi(\sigma)=\varphi(\sigma(1))-\varphi(\sigma(0))=0.$$

所以$[\varphi]\in H^0(X)$是一个上同调类，记此类为1，我们又有

(5) 单位元的存在. 对于$[\psi]\in H^*(X,A)$以及$[a]\in H_*(X,A)$恒有

$$1\smile[\psi]=[\psi],\quad 1\frown[a]=[a].$$

用一个特定的 EZ 来计算就能得到这两个式了. 在 § 3中定义了前面和后面算子 F^l, B^{k-l}以及映射

$$S_k(X\times Y)\longrightarrow[S(X)\otimes S(Y)]_k,$$

$$\sigma\longmapsto\sum_{l=0}^{k}(\pi_1\circ\sigma\circ F^l)\otimes(\pi_2\circ\sigma\circ B^{k-l}).$$

应用这一个 EZ，就能把$[\varphi]\smile[\psi]$和$[\varphi]\frown[a]$显示地算出来

$$[\varphi]\smile[\psi]=[\xi],$$

其中

$$\xi(\sigma)=\varphi(\sigma\circ F^l)\psi(\sigma\circ B^{k-l}),\quad |\varphi|=l,|\psi|=k-l,$$

$$[\varphi]\frown[a]=(-1)^{|\varphi||a|}[a\circ F^{k-l}]\varphi(a\circ B^l).$$

因为对于任意 k 链 a 有 $a\circ B^k$，故得(5).

上面的公式可以用来显示地定义$\smile$和$\frown$. 事实上，Steenrod 就是这样发现它们的. 但是在链的水平上，它们既非结合的，又非可换的. 所以要想看出它们在同调水平上有很好的性态确实需要有些见识. Eilenberg-Zilber 定理只是在发现了事实之后再作解释罢了.

§ 5. Thom 同构定理

在讲了一般的道理后，再来计算. 上积的定义中并未包含有效

的计算方法，即使应用了一个显示的 EZ 映射如 Steenrod 公式也是一样，所以有必要提出更多的工具. 这就是标题中提出的 Thom 同构定理. 它在矢量丛的同调中有基本的重要性.

在有些十分明显的场合，只用形式上的东西就可解决乘积问题. 例如取 n 维球面 S^n，有 $H^0(S^n)=R$，$H^n(S^n)=R$，而其余均为0. 在 $H^0(S^n)$ 中有一个非0上同调类 $1\in H^0(S^n)$. 容易看到，对任意道路连通空间 X，映射 $R\longrightarrow H^0(X):1$（$R$ 中的单位元）$\longmapsto 1$（$H^0(X)$ 中的一个非0类）是一同构. 所以 $H^0(X)$ 就只不过是 R 而没有什么意思. 余下要看的维数只有 $H^n(S^n)=R$. 但是很明显，对于 $u,v\in H^n(S^n)$，$u\smile v=0$，因为 $u\smile v\in H^{2n}(S^n)=0$. 所以，要想得到有意义的乘积，就需要"更多的"上同调，我们所知的上同调就只有射影空间了，以后看到在其中决定上积对于示性类理论有着基本的重要性. 所以现在我们主要研究这一点.

先再稍微回到一般的理论. 上积可以认为是分成两个阶段来定义的，即对角映射

$$\Delta: S(X)\xrightarrow{\Delta_u} S(X\times X)\xrightarrow{EZ} S(X)\otimes S(X)$$

是由真正的对角映射 Δ_u 再继之以一个 EZ 组合而成. 若我们只停留在第一个阶段，则仅由 EZ 也可定义一种"乘积"：

$$\begin{array}{ccc} H^*(X)\otimes H^*(Y)\longrightarrow H^*([S(X)\otimes S(Y)]^*) & \xrightarrow{EZ^*} & H^*(X\times Y), \\ u\otimes v & \longmapsto & u\times v. \end{array}$$

称为"外"上同调积，然后再用 $X=Y$ 时的真正的对角映射 $\Delta: X\longrightarrow X$ 即可得"内"上积，即

$$u\smile v=\Delta^*(u\times v).$$

外积也可以用空间 $X\times Y$ 的内积来表示，即

$$u\times v=(u\times 1)\smile(1\times v).$$

它的证明可以用下面的图用一般理论得出. 在检验这一点前，先注意 $u\otimes v\longmapsto u\times v$ 就是 Künneth 公式中的映射.

$(u\times 1)\smile(1\times v)$ 可以用以下的对角映射算出

$$S(X\times Y)\xrightarrow{\Delta_\#}S((X\times Y)\times(X\times Y))$$

$$\xrightarrow{\text{EZ}}S(X\times Y)\otimes S(X\times Y).$$

而 $u\times v$ 则只用一个 EZ 即可算出

$$S(X\times Y)\xrightarrow{\text{EZ}}S(X)\otimes S(Y).$$

为了比较二者，记住 EZ 有自然性、结合性与最多相差一个同伦的可换性，即以下图除了相差一个同伦外均为可换的.

$$\begin{array}{ccc}
S(X\times Y\times Z) & \xrightarrow{\text{EZ}} & S(X)\otimes S(Y\times Z) \\
\downarrow{\scriptstyle \text{EZ}} & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes\text{EZ}} \\
S(X\times Y)\otimes S(Z) & \xrightarrow{\text{EZ}\otimes 1} & S(X)\otimes S(Y)\otimes S(Z),
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
S(X\times Y) & \xrightarrow{\text{EZ}} & S(X)\otimes S(Y) \\
\downarrow{\scriptstyle \tau_\#} & & \downarrow{\scriptstyle T} \\
S(Y\times X) & \xrightarrow{\text{EZ}} & S(Y)\otimes S(X)
\end{array}$$

在下图中，则或者由自然性而有可换性(左上三角形)或者在其它各处均有同伦可换性：

$$\begin{array}{ccccc}
S(X\times Y) & \xrightarrow{\Delta_\#} & S((X\times Y)\times(X\times Y)) & \xrightarrow{\text{EZ}} & S(X\times Y)\otimes S(X\times Y) \\
\downarrow{\scriptstyle \Delta_X\times\Delta_Y} & \nearrow{\scriptstyle (1\times\tau\times 1)_\#} & \downarrow{\scriptstyle \text{EZ}} & & \downarrow{\scriptstyle \text{EZ}\otimes\text{EZ}} \\
S(X\times X\times Y\times Y) & & S(X)\otimes S(Y\times X)\otimes S(Y) & \xrightarrow{\text{EZ}} & S(X)\otimes S(Y)\otimes S(X)\otimes S(Y) \\
& \searrow{\scriptstyle \text{EZ}} & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes\tau_\#\otimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes T\otimes 1} \\
& & S(X)\otimes S(X\times Y)\otimes S(Y) & \xrightarrow{\text{EZ}} & S(X)\otimes S(X)\otimes S(Y)\otimes S(Y)
\end{array}$$

如果我们从右下角开始向上行后再横过来可计算 $(u\times 1)\smile(1\times v)$，或者先横过来再向上可计算 $u\times v$. 于是得证.

令 $E\xrightarrow{\pi}B$ 是一个实矢量丛(纤维为 n 维). $\dot{E}=E$—零截口. 对每个 $b\in B$，令 $j_b:(E_b,\dot{E}_b)\longrightarrow(E,\dot{E})$ 为包含映射，记住 $(E_b,\dot{E}_b)\simeq$

(R^n, R^n-0)，以及 E_b 之定向相当于取 $H^n(E_b, \dot{E}_b)\simeq Z$ 的一个生成元（用整系数）. 设 $U\subset B$ 是一个子集而使 $E_U\simeq U\times R^n$ 在其上是平凡的. 因为 $H^*(R^n, R^n-0)$ 是自由的，故有 Künneth 定理及图

$$
\begin{array}{ccc}
H^n(E_U, \dot{E}_U) & \xleftarrow[\simeq]{\varphi^*} & H^0(U)\otimes H^n(R^n, R^n-0) \\
\downarrow j_b^* & & \downarrow \\
H^n(E_b, \dot{E}_b) & \xleftarrow[\simeq]{\varphi^*} & H^n(R^n, R^n-0)
\end{array}
$$

所以 $H^n(E_b, \dot{E}_b)$ 的每一个生成元可由元 $\xi_U\in H^n(E_U, \dot{E}_U)$ 来决定，而后者又可由 $H^n(R^n, R^n-0)$ 的一个生成元 η 决定如下：$\xi_U=\varphi^*(1\otimes\eta)$. 此外，还有下面的图：

$$
\begin{array}{ccccc}
H^k(U) & \xrightarrow{\psi} & H^{k+n}(E_U, \dot{E}_U) & & \varphi^*(u\times\eta) \\
 & & \uparrow \wr\, \varphi^* & & \uparrow \\
1\downarrow & & H^{k+n}(U\times R^n, R^n-0) & & u\times\eta \\
 & & \uparrow \wr\, \text{Künneth 同构} & & \uparrow \\
H^k(U) & \longrightarrow & H^k(U)\otimes H^n(R^n, R^n-0) & & \\
u & \longmapsto & u\otimes\eta & &
\end{array}
$$

最后一行的映射 $u\longmapsto u\otimes\eta$ 显然是同构，故 ψ 也是同构. 我们有

$$\psi(u)=\varphi^*(u\times\eta)=\varphi^*[(u\times 1)\smile(1\times\eta)]=\varphi^*(u\times 1)\smile\xi_U.$$

但是由

$$
\begin{array}{ccc}
E_U & \xrightarrow{\varphi} & U\times R^n \\
 & {\scriptstyle\pi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle e} & \\
 & U &
\end{array}
$$

得 $\varphi^*(u\times 1)=\varphi^*e^*(u)=\pi^*(u)$，所以 $\psi(u)=\pi^*(u)\smile\xi_U$.

Thom 同构定理指出，可以用 Mayer-Vietoris 序列将这个局部现象拼起来得到一个整体的结果.

Thom 同构定理 令 $E\xrightarrow{\pi}B$ 是一个实矢量丛，纤维为 n 维. 则 E 为可定向当且仅当有一个类 $\xi\in H^n(E, \dot{E})$ 使 $j_b^*(\xi)\in H^n(E_b, \dot{E}_b)$

对一切 $b\in B$ 均为生成元，此外，映射

$$\psi: H^k(B)\longrightarrow H^{k+n}(E,\dot{E}),\ u\longmapsto \pi^*(u)\smile\xi$$

为同构，对 B 之每一个道路连通成分，ξ 由一点 $j_b^*(\xi)$ 所唯一决定.

证 为简单起见，设 B 是道路连通且为紧的. 以上的讨论恰好说明这定理在平凡化开集 $U\subset B$ 上成立. 令 U,V 是两个这样的开集，所有的东西都是切断的，故有“相对”Mayer-Vietoris 序列

$$\begin{array}{ccccccc}
\to H^{k+n}(E_W,\dot{E}_W) & \to & H^{k+n}(E_U,\dot{E}_U)\oplus H^{k+n}(E_V,\dot{E}_V) & \xrightarrow{J} & H^{k+n}(E_Q,\dot{E}_Q) & \longrightarrow \\
\uparrow{\scriptstyle\psi} & & \uparrow{\scriptstyle\psi\oplus\psi} & & \uparrow{\scriptstyle\psi} & \\
\to H^k(W) & & \to H^k(U)\oplus H^k(V) & \longrightarrow & H^k(Q) & \longrightarrow
\end{array}$$

其中 $W=U\cup V$，$Q=U\cap V$. $k=0$时，因 $J(\alpha,\beta)=j_1^*\alpha-j_2^*\beta$. $j_1: Q\longrightarrow U$，$j_2: Q\longrightarrow V$ 为包含映射. E 之为可定向正好意味着 $j_1^*(\xi_U)=j_2^*(\xi_V)$. 于是我们回到元素 $\xi_W=H^n(E_W,\dot{E}_W)$. 这样定义最左边的 ψ，由“五”引理即知这个 ψ 是一个同构. 又因 B 为紧，故全部证毕.

上面的论证虽然极其简单，却完善地表明了几何和代数的联系：可定向性这个几何条件正是将 ξ_U 与 ξ_V 拼接起来所需的代数条件. 在下一章里，我们还会见到这种类型的论证方法.

在同调方面也有一个 Thom 同构定理的翻版，即下面的映射是一同构：

$$\psi: H_k(E,\dot{E})\longrightarrow H_{k-n}(B),\ a\longmapsto \pi_*(\xi\frown a)$$

$(\xi\frown a\in H_{k-n}(E))$. 最后，若用 Z_2系数，则$j_1^*(\xi_U)=\pm j_2^*(\xi_V)$. 所以对于任意矢量丛，不论其是否可定向，都有一个 Thom 同构定理的 Z_2 翻版.

考虑投影 $\pi: E\longrightarrow B$ 和零截口 $\rho: B\longrightarrow E$. 则 $\pi\rho=1$；另一方面和一个矢量空间一样，有同伦 $\rho\pi\simeq 1$. 所以

$$H^*(E)\underset{\rho^*}{\overset{\pi^*}{\leftrightarrows}}H^*(B)$$

都是同构．由空间对(E,E)的序列开始，有

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\longrightarrow & H^k(E,\dot{E}) & \xrightarrow{j^*} & H^k(E) & \longrightarrow & H^k(\dot{E}) & \xrightarrow{\delta} & H^{k+1}(E,\dot{E}) & \longrightarrow \\
 & \uparrow \psi & & \pi^* \uparrow \downarrow \rho^* & & \| & & \uparrow \psi & \\
 & H^{k-n}(B) & \longrightarrow & H^k(B) & \xrightarrow{\pi^*} & H^k(\dot{E}) & \longrightarrow & H^{k+1-n}(B) & \longrightarrow
\end{array}
$$

底下一个序列叫做矢量丛 $\pi: E \longrightarrow B$ 的 Gysin 序列．考虑映射

$$H^{k-n}(B) \longrightarrow H^k(B),$$

$$u \longmapsto \rho^* j^* \psi(u) = \rho^* j^* (\pi^*(u) \smile \xi) = \rho^* (\pi^*(u) \smile j^* \xi)$$

$$= u \smile \rho^* j^* (\xi).$$

于是令

$$\chi(E) = \rho^* j^* (\xi) \in H^n(B).$$

则见 Gysin 序列中的这个映射其实就是乘以 $\chi(E)$ 称为(可定向)丛 E 的 Euler 类．这个名词显然暗示它与 Euler 示性数多少有点关系，而实际上也是这样，见下一章．

现在，一切工具均已准备就绪．令 $E \longrightarrow \mathbf{CP}^n$ 是 $\mathbf{CP}^n$ 上的典则线丛．作为一个复线丛，E 是可定向的实平面丛．所以我们就有一个类 $\chi = \chi(E) \in H^2(\mathbf{CP}^n)$．记住

$$E = \{([Z], v) \mid [Z] \in \mathbf{CP}^n, v = \lambda Z, v \in C^{n+1}\}.$$

单位球面 S^{2n+1} 可以嵌入到 $\dot{E}$ 中如下：

$$S^{2n+1} \longrightarrow \dot{E}, \quad z \longmapsto ([z], z).$$

和欧氏空间一样，$S^{2n+1} \subset \dot{E}$ 是形变收缩．把这一点放进 Gysin 序列中去，很容易看到，当 $k \leqslant 2n-2$ 时

$$H^k(\mathbf{CP}^n) \longrightarrow H^{k+2}(\mathbf{CP}^n), \ u \longmapsto u \smile \chi$$

是一个同构．我们早已知道，就加法而言，当 $k \leqslant 2n$ 为偶数时 $H^k(\mathbf{CP}^n) = \mathbf{Z}$，故 $H^*(\mathbf{CP}^n)$ 的环结构可由

$$H^*(\mathbf{CP}^n, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}[\chi]/(\chi^{n+1}), \ \deg \chi = 2$$

给出，这里 $(\chi^{n+1}) \subset \mathbf{Z}[\chi]$ 是由 χ^{n+1} 生成的理想子环．同样，对于实射影空间有

$$H^*(\mathbf{RP}^n, Z_2) = Z_2[\chi]/(\chi^{n+1}),\ \deg\chi = 1.$$

对四元数射影空间则有

$$H^*(\mathbf{QP}^n, Z) = Z(\chi)/(\chi^{n+1}),\ \deg\chi = 4.$$

上面我们已说，Euler 类 $\chi(E)$ 与 Euler 示性数有关．从下面的简单然而极其有用的定理可以看到一点线索．上一章里我们看到，应用 Lefschetz 迹公式，具有非0 Euler 示性数的流形上没有处处非0矢量场．现在则有

定理 具有非0 Euler 类 $\chi(E)$ 的矢量丛 $\pi: E \longrightarrow B$ 没有处处非0的截口．

证 设 $\tau: B \longrightarrow E$ 是一个处处非0截口，说得巧妙些，τ 可以分解为 $\tau: B \xrightarrow{\tilde{\tau}} \dot{E} \xrightarrow{i} E$．因 $\chi(E) = \rho^* j^* \xi(E)$，而 $\rho: B \longrightarrow E$ 是0截口．但是，和一个矢量空间一样，任意两个截口均为同伦．例如，$H(b,t) = t\tau(b) + (1-t)\rho(b)$，再由于 j^*，i^* 是正合序列

$$\cdots \longrightarrow H^*(E, \dot{E}) \xrightarrow{j^*} H^*(E) \xrightarrow{i^*} H^*(\dot{E}) \longrightarrow \cdots$$

中连接的两个同态，所以

$$\chi(E) = \rho^* j^* \xi(E) = \tau^* j^* \xi(E) = \tilde{\tau}^* i^* j^* \xi(E) = 0.$$

我们在流形的切丛的情况下已经看到，$\chi(E)$ 是存在处处非0截口的唯一障碍．但是在一般情况下，这是不成立的．

§6. Hopf 不变量

投影映射 $\pi: S^{2n+1} \longrightarrow \mathbf{CP}^n$．在 $n=1$ 时，$\mathbf{CP}^1 = S^2$，所以可以认为 π 是 $\pi: S^3 \longrightarrow S^2$．这个映射称为 Hopf 映射，并重记为 H，它是一个很特别的东西．即使说拓扑学中几乎没有别的例子象它这样产生如此多的想法，得出如此多的结果，这也不为过．我们先从上积的角度来研究它．我们说过，上同调由于有乘积是比同调更为精密的不变量，例如说，可能找到两个空间具有相同的加法上同调但有不同的乘法上同调．这并不太难做．空间 $\mathbf{CP}^2$ 在维数0，2，

4上均有上同调$=Z$，而且对$x\in H^2$，有$x^2\neq 0$. 把一个2维球面和一个4维球而在一个公共点上粘起来（记之为$S^2\vee S^4$），我们得到一个空间与CP^2有相同的加法构造，但一切乘积均为0，于是我们可以断定$S^2\vee S^4$与CP^2不同胚. 但这并没有什么了不起，因为CP^2终究是一个流形，而$S^2\vee S^4$在连接点处显然不是局部欧的，然而它们属于不同伦型. 对于懂得这一点的人，这仍只是一个初等的事实. 但是如果我们只是才从上积懂得这一点的，就可以把这结果重述如下：记住CP^2是由CP^1上加上一个胞腔D^4而得，其贴附映射是$H:S^3\longrightarrow S^2$. 类似地$S^2\vee S^4$也是这样得出的，但贴附映射是常值映射$S^3\longrightarrow S^2$，不难证明，如果两个映射$f, g:S^{n-1}\longrightarrow Y$同伦，则所得空间$D^n\bigsqcup_f Y$，$D^n\bigsqcup_g Y$有相同伦型. 所以可以肯定，Hopf 映射$H:S^3\longrightarrow S^2$与常值映射不同伦.

对任意空间X，记映射$f:S^i\longrightarrow X$的同伦类为$\pi_i(X)$，它们可以成为一个群，称为第i同伦群. 这个定义不太对，其实是指它可以作成一个群，但在这里这一点并不重要. 所以我们要研究$\pi_3(S^2)$. 我们一般地考查$\pi_i(S^n)$. 映射$f:S^i\longrightarrow S^n$如果不是全射，则将同伦于常值映射，因为$S^n-*\simeq R^n$是可缩的. 若$i<n$我们可以认为，因为$\dim S^i<\dim S^n$，所以必定如此. 但是这样论证是不行的，因为还有象 Peano 曲线的怪东西. 然而，当$i<n$时$\pi_i(S^n)=0$却是成立的. 这是单形逼近思想的一个漂亮的应用. f可以用一个单形映射代替而仍保持同伦. 但是当$i<n$时，单形映射$f:S^i\longrightarrow S^n$决不可能是全射，因为$f(S^i)\subset S^n$的i-骨架. 其次再看$i=n$的情况，映射$f:S^n\longrightarrow S^n$的映射度是一个同伦不变量. 所以有映射

$$\pi_n(S^n)\longrightarrow Z,\quad [s]\longmapsto \deg(f),$$

这是一个同构（这还是 Hopf 的结果）. 所以$\pi_n(S^n)\simeq Z$.

注意至此为止$\pi_i(S^n)$与$H_i(S^n)$相同，这是偶然的还是一个定理呢?答案为既是又不是. 它会导致一个一般的定理：Hurewicz 定理，但一般说来，这两个群并不相同. Hopf 映射是第一个反例，因

为它说明$\pi_3(S^2)\neq 0$，而我们知道$H_3(S^2)=0$. 事实上，直到今天，$\pi_i(S^n)$的讨论仍不完全. 所以，函子π_i和H_i是全然不同的. 这有一个非常关键的理由. π_*就形式性质而言，具有H_*的一切性质，只有一个例外，就是它没有 Mayer-Vietoris 性质，或者换个完全相同的说法，它没有切断性质.

从同伦观点看来，连接空间上的上同调有助于计算$\pi_3(S^2)$，对此可以推广：从一个0胞腔开始，连接一个n胞腔就得出一个n维球面S^n；再通过映射

$$f: S^{2n-1}=\partial(D^{2n})\longrightarrow S^n$$

把一个$2n$胞腔连接到S^n上就得出一个"投影"空间$X(f)$. 显然，在$0,n$和$2n$维上都有$H^*(X(f))=Z$. 取H^n和H^{2n}的生成元α,β，有

$$\alpha^2:=\alpha\smile\alpha=\lambda\beta,$$

λ是某整数，这就完全决定了$H^*(X(f))$，我们称$|\lambda|$为f不变量，记作$\gamma(f)$. 对CP^2进行计算证明对于 Hopf 映射$H: S^3\longrightarrow S^2$，有

$$\gamma(H)=1$$

(注意$\gamma(f)=0$对奇数n成立，所以只有$f: S^{4n-1}\longrightarrow S^{2n}$有意义). 用四元数和 Cayley 数取类似作法还有两个这样的映射$S^7\to S^4$和$S^{15}\longrightarrow S^8$.

还有没有更多的映射$S^{2n-1}\longrightarrow S^n$的 Hopf 不变量也是1?这个问题粗看起来实在不高明. 为什么不会有呢?更奇怪的是，为什么偏偏要挑选1这个数呢?为了说明这一点，我们再观察 Hopf 映射

$$H: S^3\longrightarrow S^2,\qquad (z_0,\ z_1)\longmapsto [z_0,\ z_1].$$

记住，若$z_0\neq 0$，则$[z_0,z_1]\longrightarrow z_1/z_0$变$S^2-[0,1]\simeq R^2$. 所以认为，$S^2=R^2\cup(\infty)$，$H$就可以写成

$$H: S^3\longrightarrow S^2,\qquad (z_0,\ z_1)\longmapsto z_1/\bar{z}_0,$$

这里用$\bar{z}_0$代替了z_0. 因为在$S^1\times S^1=\{(z_0,z_1)\mid |z_0|=|z_1|=\frac{1}{\sqrt{2}}\}\subset S^3$上，Hopf 映射正是

$$S^1\times S^1\longrightarrow S^1,\ (z_0,\ z_1)\longmapsto z_1/\bar{z}_0=z_1z_0,$$

即通常的复数乘法．事实上，另外两个 Hopf 映射也就是这样用四元数代数和 Cayley 数做成的（大家都知道四元数，Cayley 数则是由一对四元数再赋以一个非结合乘法而成的，所以它们不能构成一个代数）．所以，只要能找到一个乘法

$$\mu: S^n \times S^n \longrightarrow S^n,$$

就能作出一个 Hopf 不变量为1的映射

$$\tilde{\mu}: S^{2n+1} \longrightarrow S^{n+1}.$$

找乘法是一个代数问题，但它有重要的几何含义．我们是想定义一个乘法

$$\mu: \quad R^{n+1} \times R^{n+1} \longrightarrow R^{n+1}$$

使 R^{n+1} 成为一个代数，而且使 μ 是双线性的、连续的，还希望 μ 没有零因子，所以 $\mu(S^n \times S^n) \subset R^{n+1} - 0$．最后，我们要求 μ 有单位元1．在这些条件下，可以作出一些矢量场．令 $1, e_1, \cdots, e_n$ 是 R^{n+1} 的一个基底而定义

$$\rho_i(x) = xe_i = \mu(x, e_i), \ i = 1, 2, \cdots, n,$$

因为 μ 没有零因子，故矢量 $\rho_1(x), \cdots, \rho_n(x)$ 线性无关．用 Gram-Schmidt 方法，可得 S^n 的 n 个线性无关矢量场 $\bar{\rho}_1(x), \cdots, \bar{\rho}_n(x)$，证明了 $T(S^n)$ 是平凡的．所以 Hopf 不变量与找 S^n 上的矢量场有关，这显然是一个有兴趣的问题．

因为 S^1，S^3 和 S^7 都有乘法，它们都是平凡的；又因所有偶数维球面都有 $\chi(S^n)=2$，它们不会有处处非零的矢量场．这是两个极端，一般情况下，在 S^n 上有多少个线性无关的矢量场，这是一个有趣的问题，已经研究过多年了，到60年代 Adams 才完全解决了这个问题．Adams 发现，只有 S^1，S^3 和 S^7 有平凡的切丛，而只有由它们的乘法作成的 Hopf 映射才有 Hopf 不变量1.

Hopf 不变量原来是不能用上同调来定义的，因为当时还没有上积．和许多其它重要的代数拓扑不变量一样，Hopf 不变量有几何的内容．再一次考查 Hopf 映射

$$H: S^3 \longrightarrow S^2, \qquad (z_0, z_1) \longmapsto z_1/z_0.$$

已给一点 $c\in S^2$，关系式 $z_1=cz_0$ 定义了 $\mathbf{C}^2=\mathbf{R}^4$ 中的一个（实）平面. 条件 $|z_0|^2+|z_1|^2=1$ 则定义了此平面上的一个圆周. 若我们令 $c\in S^2$ 变化，这些作为纤维的圆 $H^{-1}(c)$ 怎样排列来填满 S^3 呢？为了更清楚，取 $S^3-(0,0,0,1)=S^3-(0,i)$，用球极射影（stereographic projection）将它映射到 $\mathbf{R}^3$ 上：

$$(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3)\longmapsto\frac{1}{1-x_3}(x_0,\ x_1,\ x_2).$$

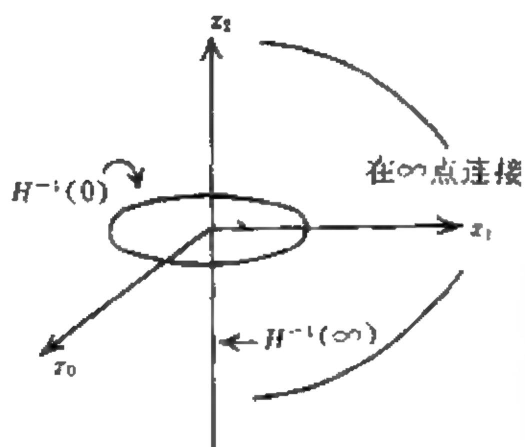


图 10—1

对于 $c=0$，圆 $H^{-1}(0)$ 恰好是 (x_0,x_1) 平面上的单位圆；对于 $c=\infty$，我们有 $(0,1)\in H^{-1}(\infty)$，所以在 $\mathbf{R}^3$ 中，$H^{-1}(\infty)$ 恰好是圆上除去一点，它恰好是 x_2 轴. 见图10—1. 圆 $H^{-1}(0)$ 和 $H^{-1}(\infty)$ 是连环起来的，而且恰好连环一次，这就是 Hopf 不变量为1的意义.

我们在§1就解释过，上同调之有乘积是因为对角映射 $\Delta:X\longrightarrow X\times X$ 所诱导的上同调之间的同态恰好是指向正确方向的. 对于同调，我们得到的图是

$$H_*(X)\xrightarrow{\Delta_*}H_*(X\times X)\xleftarrow{\alpha}H_*(X)\otimes H_*(X),$$

α 是 Künneth 映射. 这不会给出一个乘积，但是并不是什么都完了. 如果我们以一个体中之元为系数，则 α 是同构. 所以我们可以用其逆而得到另一映射

$$H_*(X)\xrightarrow{\Delta_*}H_*(X\times X)\xrightarrow{\alpha^{-1}}H_*(X)\otimes H_*(X).$$

这样就可以定义一种积了，而且可以自然地称之为“上积”（Coproduct）. 另一个办法是对空间 X 自身附带一个映射

$$\mu:\quad X\times X\longrightarrow X,$$

得乘积

$$H_*(X)\times H_*(X)\xrightarrow{\alpha_*}H_*(X\times X)\xrightarrow{\mu_*}H_*(X).$$

若取 X 为一 Lie 群 G 并以一个体为系数域，则二者兼而有之．这时，$H_*(G)$既有由群运算诱导而得的乘积，又有由对角映射诱导的上积，这些叫做 Hopf 代数(又是 Hopf)．上同调 $H^*(G)$也是一个 Hopf 代数，其积是由对角映射而得(和平常一样)，上积都由群运算而得．此外，Pontrjagin 对偶性也成立，因为系数在一个体中，它把二者联系起来，所以我们讨论的其实是同一个 Hopf 代数．

上积的存在，对于一个代数是一个严格的条件．Hopf 只用这个条件即可证明

定理 令 A 是一个特征为0的体上的 Hopf 代数，则其代数部分(即 A 中之乘积)可以描述为其奇次元所生成的外代数：$A=\Lambda(x_1,x_2,\cdots,x_r)$，即 A 是由 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 生成的，它们中间有关系式 $x_i^2=0,x_ix_j+x_jx_i=0$，并无别的关系．

例如，它可以应用于 G 为紧 Lie 群，而系数为有理数或实数的 $H^*(G)$，这时，生成元的个数 r 与各个 x_i 的次数都有几何意义．r 是 G 的秩，$\deg(x_i)$则可以 G 的 Lie 代数之 Dynkin 图看出．

更一般地说，一个具有乘法但不一定是群的空间称为 Hopf 空间(因为 $H^*(X)$是一个 Hopf 代数)．这种空间很自然地出现在拓扑学中(例如环空间(loop space)，分类空间(classifying space)等等)，所以在这方面有很广泛的研究，但不幸的是，其中绝大多数之 $H^*(X)$是无限维的，因而 Hopf 定理不适用．

第十一章　Poincaré 对偶性

§1. 引　言

在前面两章里，我们已造好了同调论的一般工具，从理论上说，这个工具可以应用于任何空间. 但在实际上，是在流形理论中得到最有成果的应用，所以现在我们更深入地研究这个方向.

流形同调的基本事实是 Poincaré 对偶性，粗略地说，即对一个 n 维紧可定向流形 M，k 维同调 $H_k(M)$ 与 $n-k$ 维上同调 $H^{n-k}(M)$ 同构（取整系数）. 这个结论是流形的某些本质的几何对称性的反映，而且最初也确实是从几何上看出来并加以证明的. 后来则又用更加不变的（原来的证明要用三角剖分）、更加函子的，并且更加方便的形式来重述. 即 M 的定向决定了一类 $[M]\in H_n(M)$ 称为基本类，从几何上看，这就是构成 M 的所有（适当定向的）n-单形之和. 于是由卡积定一个映射

$$H^k(M)\longrightarrow H_{n-k}(M),\ u\longmapsto u\frown[M],$$

这就是产生对偶性的所谓 Poincaré 对偶映射. 在本章中，我们想证明的是这个"现代化"的版本，但是检阅一下其几何思路以了解对偶性从何而来，这是很重要的.

令 K 为一单纯复形，我们将作一个新的对偶复形 K^* 使对多面体 $X=|K|$ 再给出一个剖分. 作法如下：令 K' 为 K 的重心重分. 对原来复形 K 的每个顶点 $v\in K$，定义其对偶胞腔 v^* 是 K' 中所有以 v 为顶点的单形 τ' 之并，即 $v^*=\bigcup\{\tau'\in K'\mid v\leq\tau'\}$. 对每个单形 $\sigma\in K$，则定义其对偶胞腔 σ^* 为

$$\sigma^*=\bigcap\{v^*\mid v\leq\sigma\}.$$

容易看到$\bigcup\sigma^*=|K|$，而且$\sigma^*\bigcap\tau^*$也是对偶胞腔之并．实际上

$$\sigma^*\bigcap\tau^*=\bigcup\{\mu^*|\mu\geq\sigma,\mu\geq\tau\}. \tag{1}$$

所以，这些对偶胞腔也给出$|K|$的一个剖分，而且在其连接上也有某种正规性．右图就是一个简单的例子．然而这里还有问题，对偶胞腔不一定是例如CW 剖分意义下的胞腔，剖分也不一定是例如CW 意义下的“复形”．对于流形第一个困难显然不存在．第二个困难较小，1-胞腔μ^*的一个边缘点（上面的一个）并不是0-胞腔．若令Y＝上图之边缘，则对偶胞腔确实形成相对(X,Y)的一个CW 剖分，所以有边流形M，$(M,\partial M)$用对偶胞腔是一个相对CW 复形．

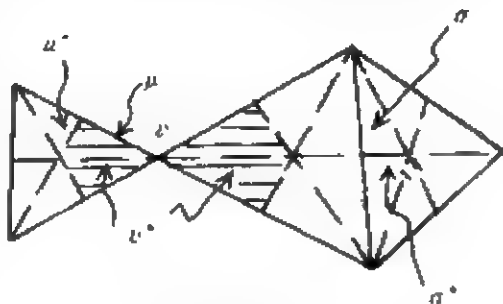


图　11—1

现在要把链复形$C(K)$和上链复形$C^*(K^*)$联系起来．对每个$\sigma^*\in K^*$，令$\tilde{\sigma}$为下述上链

$$\tilde{\sigma}(\tau^*)=\begin{cases}1, & \sigma=\tau,\\0, & \sigma\neq\tau,\end{cases}$$

这些基本的上链$\tilde{\sigma}$生成$C^*(K^*)$．由此可以写出

$$\delta\tilde{\sigma}=\sum\lambda_{\tau^*}\tilde{\tau},\ \lambda_{\tau^*}=\text{整数}.$$

欲使$\lambda_{\tau^*}\neq0$，必须有$(\delta\tilde{\sigma})(\tau^*)=\tilde{\sigma}(\partial\tau^*)\neq0$，即$\sigma^*\in\partial\tau^*$，但是由对偶复形的作法，只有在$\tau\in\partial\sigma$时才能这样．事实上，注意到定向，可以证明$C(K)$中的边缘公式

$$\partial\sigma=\sum\lambda_\tau\tau$$

会在$C^*(K^*)$中给出一个一样的边缘公式

$$\delta\tilde{\sigma}=\sum\lambda_\tau\tilde{\tau}.$$

因为$\dim\sigma^*=n-\dim\sigma$　$(n=\dim M)$，由此显然有

$$H_k(M)=H_k(K)\simeq H^{n-k}(K^*)=H^{n-k}(M).$$

而当M有边时，则给出

$$H_k(M) \simeq H^{n-k}(K^*) = H^{n-k}(M, \partial M).$$

同样，可以把 K^* 的同调与 K 之上同调连接起来.

这种作法其实还包含了更多的思想. 例如，会注意到胞腔 σ 和对偶胞腔 σ^* 在一点（σ 之重心）横截（transversally）相交. 证明上边缘公式时要用到它，这一点将推广到流形上的相交理论，而它是同调理论对于流形的最有用的应用之一.

§2. 基 本 类

我们要证明，对一个紧的可定向 n 维流形，定有一个基本类 $[M] \in H_n(M)$，以后用它来定义 Poincaré 对偶性. 在一个三角剖分中，$[M]$ 相当于所有 n-单形之和，但我们现在不用三角剖分，所以要在奇异理论中研究. 虽然我们感兴趣的基本上是紧的情况，但局部的考虑将迫使我们越出紧流形的范围，所以现在不作这个假设. 但是为简单起见，我们却要设 M 是连通的（否则就得分块处理）. 同样，这里不需要光滑性，所以，在开头假设 M 是一个连通的 n 维拓扑流形. 在一个固定的系数环 R 中取同调及上同调，暂时还不必确定 R 是什么，但是以后总取它为 Z 或 Z_2.

令 $B \subset A \subset M$ 为两个子集，于是有包含映射 j：$(M-A) \subset (M-B)$ 及其诱出的同态

$$j_* : H_*(M, M-A) \longrightarrow H_*(M, M-B),$$

这种情况经常发生，所以有时会略去 j_* 这个记号.

若 $B=\{P\}$ 只是一个点，$H_*(M, M-P)$ 是局部同调，其值是

$$H_i(M, M-P) = \begin{cases} R, & i=m, \\ 0, & i \neq m. \end{cases}$$

若 $P \in A$，我们称

$$(j_P)_* : H_*(M, M-A) \longrightarrow H_*(M, M-P)$$

是“限制”映射.

命题 2.1 若 $K \subset M$ 是紧子集，则

(i) $H_i(M, M-K)=0$，若 $i>n$；

(ii) 元 $a\in H_n(M, M-K)$ 为 0 当且仅当限制映射 $(j_P)_*(a)\in H_n(M, M-P)$ 对一切 $P\in K$ 均为 0.

命题 2.1 的证明法体现了证明流形上的整体结果的基本原理. 如果看到某个局部结果，而又查明了它们在一个 Mayer-Vietoris 序列中性态很好，那么就会有一个整体结果，在 Thom 同构定理中，我们已经看到这一点，现在我们又要再次用它.

引理 若命题 2.1 对 K_1，K_2 与 $K_1\cup K_2$ 均成立，则它对 $K_1\cup K_2$ 也成立.

证 因 K_1，K_2 为紧，故 $\{M-K_1, M-K_2\}$ 是开的，从而也是切除的，其相对 Mayer-Vietoris 序列是

$$\cdots\longrightarrow H_i(M, M-K_1\cup K_2)\longrightarrow$$
$$H_i(M, M-K_1)\oplus H_i(M, M-K_2)$$
$$\longrightarrow H_i(M, M-K_1\cap K_2)\longrightarrow\cdots.$$

由此立即可得：当 $i>n$ 时 $H_i(M, M-K_1\cup K_2)=0$；$i=n$ 时，有

$$0=H_{n+1}(M, M-K_1\cap K_2)\longrightarrow H_n(M, M-K_1\cup K_2)$$
$$\xrightarrow{\varphi} H_n(M, M-K_1)\oplus H_n(M, M-K_2).$$

由交换图

$$\begin{array}{ccc} H_n(M, M-K_1\cup K_2) & \xrightarrow{j_{i*}} & H_n(M, M-K_i) \\ \downarrow (j_P)_* & & \downarrow (j_P)_* \\ H_n(M, M-P) & \xrightarrow{1} & H_n(M, M-P) \end{array} \quad P\in K_i, i=1,2$$

（其中 j_1，j_2 是包含映射）及引理假设可知：若对 $a\in H_n(M, M-K_1\cup K_2)$ 及一切 $(j_P)_*(a)=0$，则 $j_{1*}(a)=j_{2*}(a)=0$. 记住 $\varphi(a)=(j_{1*}(a), j_{2*}(a))$，现在 φ 为单射，故 $a=0$.

命题 2.1 的证明步骤：

(1) $K=\{P\}$ 是一点，这时没有什么要证，这就是我们取为起点的不足道的局部结果.

(2) $K=\square$是坐标邻域$U\simeq R^n$中的一矩形区域. 令$P=$矩形中心,则$M-K\subset M-P$是一个形变收缩,所以$H_*(M,M-K)\xrightarrow{\sim}H_*(M,M-P)$, 而 (2) 归结为 (1).

(3) $K\subset U\simeq R$是 (2) 中区域的有限并, 而一切矩形之面均平行于坐标平面. 任意两个这种矩形之交仍是一个矩形域. (3) 可以由上之引理得出.

(4) $K\subset U\simeq R^n$是一般的紧集. 令$a=[C]\in H_i(M,M-K)\simeq H_i(U,U-K)$由链$C$表示. 由定义$\partial C\cap K=\varnothing$. 因$\partial C$为紧,故可用一些矩形域来覆盖$K$以得一个较大的 (3) 中那种紧集$L$, 而且也使$\partial C\cap L=\varnothing$, 于是$[C]$定义$H_i(M,M-L)$中一个类, 记作$a'$并使

$$H_i(M,M-L)\longrightarrow H_i(M,M-K),\quad a'\longmapsto a.$$

若$i>n$, $a'=0$若$i=n$而且对一切$P\in K$限制均为0. 则显然a'之限制亦为0, 从而$a'=a=0$.

(5) 一般情况下, 任意紧集$K\subset M$都是 (4) 中那种紧集的有限并.

命题2.1的(ii)蕴涵了$H_*(M,M-K)$的某种唯一性,例如说,若M为紧而取$K=M$, 则$a\in H_*(M)$为0,当且仅当a对一切P在$H_*(M,M-P)$中的限制均为0; 当M为连通时,"一切"这一个限定语可以改成"某些", 这是因为有下面的引理.

均匀性引理 若M是一个连通流形, $P,Q\in M$为两点, 则必存在一个同胚$\varphi: M\longrightarrow M$使$\varphi(P)=Q$,而且$\varphi$同伦于恒等映射.

设它成立. 因$\varphi(P)=Q$且φ为同胚,故$\varphi(M-P)\subset M-Q$. 于是有

$$\begin{array}{ccc} H_*(M) & \xrightarrow{\varphi_*} & H_*(M) \\ \downarrow{\scriptstyle (j_P)_*} & & \downarrow{\scriptstyle (j_Q)_*} \\ H_*(M,M-P) & \xrightarrow{\varphi_*} & H_*(M,M-Q) \end{array}$$

但是顶上一行的 φ，是恒等映射.

证　令 P，Q 为直线 R^1 上的两点，则图 11—2 表示 $\varphi: R^1 \longrightarrow R^1$，$\varphi \simeq \mathrm{id}$，而且在一紧集之外 $\varphi = \mathrm{id}$.

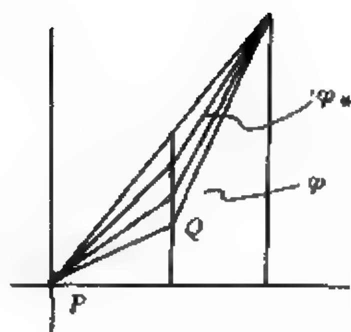


图　11—2

由此，显然可以在一个坐标邻域内移动这些点，但因 M 是连通的，任意两点 P，Q 都可以用坐标邻域的有限链 U_0，U_1，…，U_l 连起来，即，$P \in U_0$，$Q \in U_l$，且 $U_i \cap U_{i+1} \neq \varnothing$，$i=0$，1，…，$l-1$. 这样，我们得到

命题 2.2　若 M 是紧且连通的，则对任意点 $P \in M$，限制映射

$$(j_P)_*: H_n(M) \longrightarrow H_n(M, M-P)$$

均为单射.

我们自然想知道 $(j_P)_*$ 何时为同构，因为 $H_n(M, M-P) = R$，这就相当于在 $\mathrm{Im}(j_P)_*$ 中找出 $H_n(M, M-P)$ 的一个生成元来（例如，当 R 是一个体时，只需要 $(j_P)_* \neq 0$ 即可）. 前面我们已经看到，$H_n(M, M-P)$ 的生成元就是 P 点的局部定向，所以很明显，我们现在所做的就是想把局部定向拼成整体定向.

若 M 为光滑的，P 点的局部定向可以用切空间 $T_P(M)$ 的定向来表示. 一个整体定向会对每一点 $P \in M$ 都指定 $T_P(M)$ 的一个定向. 但是反过来，在每一点 P 指定一个定向却不一定足以形成一个整体定向，必须要有某种相容性或者说连续性条件. 首先，在一个坐标邻域 $\varphi: U \longrightarrow R^n$ 中，所有切空间 $T_P(M)$ 都可以从同一个来源 $R^n \longrightarrow (\varphi(P), R^n) = T_{\varphi(P)}(R^n) \longrightarrow T_P(M)$ 得到定向. 然后就要求同一个 $T_P(M)$ 从两个不同来源 φ 和 ψ 应得到相同定向，即 $d(\varphi\psi^{-1})$ 应保持定向. 这就是相容性条件. 现在我们没有光滑性，从而也没有切空间，但我们可以用局部同调 $H_n(M, M-P)$ 代替 $T_P(M)$，然后再把上面这一套改一个说法. 令 $K \subset U$ 为一紧集而 $\varphi(K) = D^n \subset R^n$ 是单位球体，若 $P \in K$，则限制映射

$$H_n(M, M-K) \longrightarrow H_n(M, M-P)$$

是一个同构，这是因为，在 R^n 中包含映射 $R^n - D^n \longrightarrow R^n - Q$, $Q = \varphi(P)$ 是一个强形变收缩，而这一点可以从图 11—3 看到.

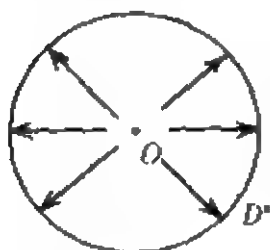


图 11—3

取一个生成元 $P_K \in H_n(M, M-K) \simeq R$，我们就有，对一切 $P \in K$，P_K 限制成为 $H_n(M, M-P)$ 的一个生成元. 这个 P_K 就是邻域 K 中局部定向的"共同来源". 相容性是很清楚的. 若 P_{K_1}，P_{K_2} 是两这局部定向，则对 $P \in K_1 \cap K_2$ 限制 $P_{K_1}(P)$ 与 $P_{K_2}(P)$ 必须相等. 这就引导到下面的

定义 函数 $\rho: P \longmapsto \rho(P) \in H_n(M, M-P)$ 称为连续的，如果每一点 $P \in M$ 都有一个邻域 K 以及一个类 $\rho_K \in H_n(M, M-K)$ 使得对于一切点 $Q \in K$ 均有 $\rho(Q) = (j_Q)_* \rho_K$.

这样一连续函数称为一个截口，一个截口 ρ 而使 $\rho(P) \in H_n(M, M-P)$ 称为一个定向. 一个流形 M，如果存在定向就称为在 R 上（R=系数环）可定向的. 这个说法的合理性在于有

命题 2.3 若 M 是在以前的几何意义下的光滑可定向流形，则它在现在的意义下在任意环 R 上可定向.

证 显然只需用一族紧的坐标邻域 $\{K_i\}$ 覆盖 M，再找 $H_n(M, M-K_i)$ 的一族相容的生成元 $\{\rho_{K_i}\}$，取 $\varphi_i: U_i \longrightarrow R^n$ 使 $\varphi_i(K_i) = D^n \subset R^n$ 为单位球体，且 $\varphi_i \varphi_j^{-1}: R^n \longrightarrow R^n$ 保持定向（对一切 i, j. 这是可能的）因为 M 是可定向的. 若 $P \in K_i \cap K_j$ 而 $P_i = \varphi_i(P)$，$P_j = \varphi_j(P)$，则比较 $\rho_{K_i}|_P$ 和 $\rho_{K_j}|_P$ 的问题就只是研究诱导映射

$$H_n(R^n, R^n - P_i) \xrightarrow{(\varphi_j \varphi_i^{-1})_*} H_n(M^n, M^n - Q_i)$$

的问题. 但是记住，对这两个群都给了一个生成元，它是由奇异单形 $\sigma: \Delta^n \longrightarrow R^n$ 来表示的，而 P_i, $Q_i \in \mathrm{Int}\sigma$，我们以前就证明了. 所谓保持定向就是指 $(\varphi_j \varphi_i^{-1})_*$ 保持这个生成元.

若 $\varphi_j \varphi_i^{-1}$ 逆转几何意义下的定向，则 $(\varphi_j \varphi_i^{-1})_*[\sigma] = -[\sigma]$,

除非在环 R 中有 $1=-1$. 这个情况与保持定向的情况总是不同的，所以我们得到一个弱得多的关于代数可定向性的结果.

命题 2.4 若 R 是具有特征 2 的环（即在 R 中 $2=0$），则任意流形 M 在 R 上可定向.

现在回到 M 在 R 上可定向的情况并设 ρ 是一个定向. 考虑下面的论断：对于紧子集 $K\subset M$，必有一个类 $\rho_K\in H_*(M,M-K)$ 使得 $(j_P)_*(\rho_K)=\rho(P)\in H_*(M,M-P)$ 对一切 $P\in K$ 成立. 显然，如果这个论断对 K 为真，而 $L\subset K$，则它当然也对 L 为真，这一点可由下面图式看出

$$\begin{array}{ccc} H_*(M,M-K) & & \\ \downarrow & \searrow & \\ H_*(M,M-L) & \longrightarrow & H_*(M,M-P) \end{array}$$

同样，如果这个论断对 K_1 和 K_2 都成立，则由 MV（Mayer-Vietoris）原理，它对 $K_1\cup K_2$ 也成立. 这是因为，在 MV 序列

$$\longrightarrow H_*(M,M-K_1\cup K_2)\xrightarrow{\varphi} H_*(M,M-K_1)\oplus$$

$$H_*(M,M-K_2)\xrightarrow{\psi} H_*(M,M-K_1\cap K_2)$$

中 ψ 是由 $\psi(a,b)=j_{1*}(a)-j_{2*}(b)$ 给出的，这里

$$j_1:\ (M,\ M-K_1)\longrightarrow(M,\ M-K_1\cap K_2),$$

$$j_2:\ (M,\ M-K_2)\longrightarrow(M,\ M-K_1\cap K_2)$$

都是包含映射. 于是 $(j_P)_*\psi(\rho_{K_1},\rho_{K_2})=0$ 对一切 $P\in K_1\cap K_2$ 成立，由命题 2.1, $\psi(\rho_{K_1},\rho_{K_2})=0$. 所以存在一类

$$\rho_{K_1\cup K_2}\in H_*(M,M-K_1\cup K_2)$$

使 $\varphi(\rho_{K_1\cup K_2})=(\rho_{K_1},\ \rho_{K_2})$，这个类显然就是我们所需要的. 因为我们可以用紧坐标邻域 $\{K_i\}$ 覆盖 M 面对每个 K_i 上述论断均为真，所以这个论断对一切紧子集都成立. 总之，M 上的一个定向 ρ 等价于对每个紧子集 K 指定一个类 $K\longrightarrow\rho_K\in H_*(M,M-K)$，并使他们彼此相容. 在 M 本身为紧的特例下，可以取 $K=M$，所以

一个定向 ρ 就是一个同调类 $\rho\in H_*(M)$ 使得 $\rho(P)\in H_*(M,M-P)$ 对一切 $P\in M$ 均是生成元. 由命题 2.1 当 M 为连通时，这个同调类 ρ 可由它在任一点上所取的值 $\rho(P)$ 来决定. 事实上，对于一切 $P\in M$，

$$H_*(M)\longrightarrow H_*(M,M-P),P\longmapsto\rho(P)$$

都是一个同构. 这一个定向类也称为一个基本类，记作 $[M]$.

所以，当 M 是紧的、连通的且在 R 上可定向时，$H_*(M)\simeq R$. 也很容易决定当 M 在 R 上不可定向时会发生什么. 这里可能发生在 R 不是特征 2 的时候. 例如，取 R 为一整环 (integral domain)，从任一点 $P_0\in M$ 开始，并取一个生成元 $\rho(P_0)\in H_*(M,M-P_0)$，若 Q 是任意的另外一点，用一串紧的邻域 K_0, …, K_l 把 P, Q 连接起来，即使 $P\in K_0$, $Q\in K_l$，而且 $K_i\cap K_{i+1}\neq\varnothing$, $i=0,1,\cdots,l-1$. 于是 $\rho(P_0)$ 通过包含映射

$$H_*(M,M-K_0)\simeq H_*(M,M-P_0)$$

在 $H_*(M,M-K_0)$ 中决定了一个生成元，然后它又通过包含映射

$$H_*(M,M-K_0)\simeq H_*(M,M-P_1),P_1\in K_0\cap K_1$$

决定 $H_*(M,M-P_1)$ 的一个生成元，这样做下去，最后就会得到一个生成元 $\rho(Q)\in H_*(M,M-Q)$，如果 $\rho(Q)$ 与链 K_0, K_1, …, K_l 的取法无关，就可以有定向类 ρ. 因为现在不是这样的情况，则必存在一个闭的循环，即有一点 $*\in K_0\cap K_l\neq\varnothing$，使得当我们完成这个循环时，会得到不同的生成元. 在 Z 中，这就意味着我们得到了 1 和 -1. 见下面的图

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_*(M) & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 & H_*(M,M-*) & \xrightarrow{\varphi} & H_*(M,,M-*) & \\
 & \sim\nearrow & & & \nwarrow\sim \\
H_*(M,M-K_0) & & H_*(M,M-K_1)\cdots & & H_*(M,M-K_l) \\
 & \sim\searrow & \swarrow\sim & & \nearrow\sim \\
 & & H_*(M,M-P_1)\ \cdots & H_*(M,M-P_l) &
\end{array}$$

我们刚才的情况是：横的映射 φ 将 $H_*(M,M-*)$ 的一个生成元

$\rho(*)$映成了其另一不同的生成元 $\varphi(\rho(*))$. 现在，若 $a\in H_n(M)$ 是任意元，我们有

$$H_n(M)\longrightarrow H_n(M, M-*),\quad a\longmapsto\lambda\rho(*), \lambda\in R.$$

所以有

$$\lambda\rho(*)=\lambda\varphi(\rho(*)).$$

但因 R 是整环，故 $\lambda=0$；又因 $H_n(M)\longrightarrow H_n(M,M-*)$是单射，故 $a=0$，所以，对于紧的、连通的、在 R 上不可定向的流形 $H_n(M,R)=0$. 总结起来，有

定理 令 M 为一紧的、连通的 n 维流形，而 R 为一整环，则 M 在 R 上可定向，当且仅当

$$H_n(M,R)\simeq R,$$

这时，限制映射

$$H_n(M,R)\longrightarrow H_n(M,M-P;R)$$

对任意 $P\in M$ 均为同构（若 M 不可定向，则它是 0 映射），而 $H_n(M, R)$的生成元叫一个定向类或基本类.

最明显的特征为 2 的环是 $R=Z_2$，即 mod 2 整数环，所以以 Z_2 作系数就完全抹去了定向这个几何概念；另外一个极端是 $R=Z$ 即整数环. 事实上，这时有一个一般的定理称为万有系数定理(universal coefficient theorem). 它指出，若 M 在 Z 上可定向，则它在任意整环 R 上也可定向，所以在实际上，Z 和 Z_2 包括了所有的情况.

§3. Poincaré 对偶定理

定理（Poincaré 对偶定理） 令 M 为一紧 n 维流形，而且在 R 上可定向，$[M]\in H_n(M)$为基本类，则

$$\frown[M]: H^k(M)\longrightarrow H_{n-k}(M),\quad u\longmapsto u\frown[M]$$

是一个同构.

证明的基本原理和我们前面做过的一样，是 MV 原则：首先在

局部情况下得一个不足道的定理，然后再看能否用 MV 原则把它们拼起来以得出这个定理的整体形式，所以我们先需知道这个不足道的定理是什么．在这里我们遇见了一些困难，M 局部地看来和 R^n 是一样的，但 R^n 不是紧的．说 $H^k(R^n)\simeq H_{n-k}(R^n)$ 肯定是不对的．但是若 $P\in R^n$ 是一个点，则

$$H^k(P)\longrightarrow H_{n-k}(R^n,R^n-P),\quad u\longmapsto u\frown\rho$$

都是一个同构．这里 $\rho\in H_n(R^n,R^n-P)$ 是其一个生成元．因为使上式双方均非 0 的 k 值只有 $k=0$．在这时，$H^0(P)$ 是由“单位”上同调类 1 生成的，而前而又已看到在上积（和卡积）中，1 的作用都是单位元，即

$$1\frown\rho=\rho.$$

所以这就是不足道的局部的 Poincaré 对偶性．

但是我们不能用点来构成整个 M，所以下一步就需要扩大 P．我们可以取 K 为以 P 为心的球体而且 $H^*(P)$ 和 $H^*(K)$ 相同．我们也有定向类 $\rho_K\in H_n(R^n,R^n-K)$，但是不幸得很，在

$$H^k(K)\otimes H_n(R^n,R^n-K)\longrightarrow H_{n-k}(R^n,R^n-K)$$

中，没有卡积配对．但是我们可以回避这一点如下，取一个包含 K 的更大的球体 V，使 $P\in K\subset V$ 均为形变收缩核．这时我们确实有了卡积配对

$$H^k(V)\oplus H_n(V,V-K)\longrightarrow H_{n-k}(V,V-K).$$

但是由于收缩 $H^k(V)\simeq H^k(K)$ 是同构，而由于切除，$H_n(V,V-K)\longrightarrow H_n(R^n,R^n-K)$ 也是同构（因为所谓 V 是 K 的邻域，现在就注意 $\{V,R^n-K\}$ 是切除的）．很明显，只要 K 有一个邻域 V，而且 K 是 V 的形变收缩核，我们就一定能这样做：

$$\begin{array}{ccccc}
H^k(V)\otimes H_n(V,V-K) & \longrightarrow & H_n(V,V-K) \\
\downarrow i_* \qquad\quad \downarrow j_* & & \downarrow j_* \\
H^k(K)\otimes H_n(M,M-K) & \longrightarrow & H_n(M,M-K)
\end{array}$$

$$u\otimes\rho\longmapsto j_*(i_*^{-1}(u)\cap j_*^{-1}(\rho_k)).$$

这样，我们希望证明对于一切紧集 $K\subset M$，只要 K 是一个邻域收缩核，这都是一个同构. 若 M 为紧，取 $K=M$ 即得 Poincaré 对偶定理. 然而直接去求证还有一些技术上的困难. 例如对偶性的配对与 V 的选 法有关，还有，若 K_1，K_2，都是邻域收缩核，要论证 $K_1\cup K_2$ 与 $K_1\cap K_2$ 也是邻域收缩核，这并非轻而易举. 如果先多建立一些工具，可能就会容易一些.

所谓有向集 D 就是其中具有次序 $\leq$ 的集，使得对于 $\alpha,\beta\in D$ 必有一个 $\gamma\in D$ 使 $\alpha\leq\gamma,\beta\leq\gamma$. 设有一族 R-模 $\{M_\alpha\}$，$\alpha\in D$，而指标集 D 有向. 设对 $\alpha\leq\beta$ 有同态 $\varphi_{\beta\alpha}: M_\alpha\longrightarrow M_\beta$，适合以下的迁移条件

(i) $\varphi_{\alpha\alpha}=\mathrm{id}$；

(ii) 若 $\alpha\leq\beta\leq\gamma$，则 $\varphi_{\gamma\beta}\varphi_{\beta\alpha}=\varphi_{\gamma\alpha}$.

这时，我们称 $\{M_\alpha|\alpha\in D\}$ 为有向族并且可以用下面的万有性质来定义有向极限(directed limit)(M,φ_α)：

(1) 对每个 $\alpha\in D$，$\varphi_\alpha: M_\alpha\longrightarrow M$ 是同态，对每一对 $\alpha\leq\beta$，有可换图

$$\begin{array}{ccc} M_\alpha & \xrightarrow{\varphi_{\beta\alpha}} & M_\beta \\ & \varphi_\alpha\searrow \quad \swarrow\varphi_\beta & \\ & M & \end{array}$$

即 $\varphi_\beta\varphi_{\beta\alpha}=\varphi_\alpha$.

(2) 若 (N,ψ_α) 是满足(1)的另外一系，则必有唯一的同态 $\varphi: M\longrightarrow N$ 使下图为可换

$$\begin{array}{ccc} M_\alpha & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & M \\ & \psi_\alpha\searrow \quad \swarrow\varphi & \\ & N & \end{array}$$

即 $\psi_\alpha=\varphi\varphi_\alpha$.

所以有向极限只要存在必定是唯一的. 为了证明它存在. 令 $\bigoplus M_\alpha$ 为一切 M_α 的直和，在其中，令 A 是由所有 $\{x-\varphi_{\beta\alpha}(x)\,|\,x\in M_\alpha,\beta\geq\alpha\}$ 这种形状的元生成的子模，令 $M=\bigoplus M_\alpha/A$，$\pi: \bigoplus M_\alpha\longrightarrow$

M 以及 $\varphi_a: M \longrightarrow M$ 为下面映射的组合

$$\varphi_a: M_a \xrightarrow{\text{包含}} \bigoplus M_a \xrightarrow{\pi} M.$$

要证明 $\{M, \varphi_a\}$ 适合所有要求是很容易的. 事实上，大家会注意到，D 的有向性完全没有用到. 由定义，对于 $x_a \in M_a$，$\varphi_a(x_a)$和$\varphi_\beta\varphi_{\beta a}(x_a)$相等，即是说，在极限 M 中，$x_a \in M_a$ 和它的"后"象$\varphi_{\beta a}(x_a)$相等. 若 D 为有向，则有

引理 M 中每个元均可写为 $\varphi_a(x_a)$，这里 $x_a \in M_a$ 是某个元.

证 肯定，$x \in M$ 一定是一个有限和 $\sum \varphi_{a_i}(x_i)$ 的形状. 取 $a \geq a_i$（对一切 i）并令

$$x_a = \sum \varphi_{a a_i}(x_i) .$$

即得引理之证.

由此很容易得到有关有向极限的基本事实，即它保存正合性.

令 $\{M_a, \varphi_{\beta a}\}$ 和 $\{N_a, \psi_{\beta a}\}$ 为有向族，所谓同态 $f: \{M_a\} \longrightarrow \{N_a\}$ 就是一族同态 $f_a: M_a \longrightarrow N_a$ 而使当 $a \leq \beta$ 时，下面的图可换

$$\begin{array}{ccc} M_a & \xrightarrow{f_a} & N_a \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi_{\beta a}} & & \downarrow{\scriptstyle\psi_{\beta a}} \\ M_\beta & \xrightarrow[f_\beta]{} & N_\beta \end{array}$$

这时，可得到一个极限映射 $f: M \longrightarrow N$，使得对每一个 $a \in D$，下图为可换

$$\begin{array}{ccc} M_a & \xrightarrow{f_a} & N_a \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi_a} & & \downarrow{\scriptstyle\psi_a} \\ M & \xrightarrow[f]{} & N. \end{array}$$

我们有

引理 令 $\{M_a\} \xrightarrow{f} \{N_a\} \xrightarrow{g} \{L_a\}$ 是有向族的同态. 若对每个 $a \in D$，序列

$$M_a \xrightarrow{f_a} N_a \xrightarrow{g_a} L_a \qquad (*)$$

是正合的，则其极限序列也是正合的：

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L.$$

证 $gf=0$ 不必证. 现令 $g(x)=0, x\in N$. 令 $x=\psi_\alpha(x_\alpha), x_\alpha\in N_\alpha$，则

$$g(x)=\xi_\alpha g_\alpha(x_\alpha), \quad \xi_\alpha: L_\alpha \longrightarrow L.$$

由定义，必有 $\beta\geq\alpha$ 使 $\xi_{\beta\alpha}(g_\alpha(x_\alpha))=0=g_\beta(\psi_{\beta\alpha}(x_\alpha))$，因为

$$M_\beta \xrightarrow{f_\beta} N_\beta \xrightarrow{g_\beta} L_\beta$$

是正合的，故必有 $y\in M_\beta$ 使

$$f_\beta(y_\beta)=\psi_{\beta\alpha}(x_\alpha).$$

令 $y=\varphi_\beta(y_\beta)\in M$，有

$$f(y)=\psi_\beta f_\beta(y_\beta)=\psi_\beta\psi_{\beta\alpha}(x_\alpha)=\psi_\alpha(x_\alpha)=x.$$

故证毕.

总括起来，一个有向系的有向极限或多或少象是一个并，M 中的每个元 x 都是从某个 M_α 中的某个元 x_α 来的. 若 x_α 在极限 M 中变成了 0，那末它一定在某一个有限的阶段 β 上（$\beta\geq\alpha$）就已经成了 0. 现在把这应用到 $K\subset M$ 的情况，这里 K 是 M 的子集，集 $\{V \mid V\supset K$ 是 K 的邻域$\}$ 按包含关系而有序，即 $U\geq V$ 意指 $U\subset V$，这时，有包含映射

$$H_*(M, M-V)\longrightarrow H_*(M, M-U).$$

它显然适合相容性条件，所以可能有极限，但这不会给出任何新东西.

引理 若 $K\subset M$ 为紧，则

$$\varinjlim H_*(M, M-V)=H_*(M, M-K).$$

证 对于 K 的每个邻域 V，我们有包含映射

$$H_*(M, M-V)\longrightarrow H_*(M, M-K).$$

取极限后，定义一个映射

$$\varinjlim H_*(M, M-V)\longrightarrow H_*(M, M-K).$$

命题 2.1 证明的第 (4) 步已证明这是一个同构，例如，$\alpha=[C]\in H_*(M,M-K)$，$H_*(M,M-V)$中定义一个同调类 α'，而在包含映射下变为 α，这说明上述极限的映射是全射. 一对一可用完全同样的方法去证.

当 $U\subset V$ 时，上同调 $H^*(V)\to H^*(U)$指向正确的方向，所以我们可以取有向极限$\varinjlim H^*(V)$. 包含映射 $K\subset V$ 于是定义一个映射

$$\varinjlim H^*(V)\longrightarrow H^*(K),$$

但是和同调的情况不一样，上述的链的论证法不再起作用. 所以有向极限可能给出一个新的对象. 我们定义它为 K 的 Alexander-Cěch 上同调，记作

$$\check{H}^*(K)=\varinjlim H^*(V).$$

当自然映射 $\check{H}^*(K)\to H^*(K)$为同构时，我们说 K 整齐地嵌入 (tautly imbedded) 于 M 中. 例如，当 K 有一个邻域 V 使 $K\subset V$ 为强形变收缩核时，就是这样.

$\check{H}^*$ 在下述意义下是一个完备化，K 的每一个邻域 V 都有其 Cěch 上同调 $\check{H}^*(V)$，而当 $U\subset V$ 时仍有自然同态$\check{H}^*(V)\to\check{H}^*(U)$，所以我们有了一个有向系$\{\check{H}^*(V)|V$ 是 K 的邻域$\}$，于是似乎可以作出一个"超 Cěch"上同调，很容易证明不会有这样的事.

引理 自然映射$\varinjlim\check{H}^*(V)\longrightarrow\check{H}^*(K)$恒为同构.

我们就只差一点技术性的准备了. 一个有向集 D 的子集 C 称为共尾 (cofinal) 的，若对任一 $\alpha\in D$，在 C 中必可找到 $\beta\in C$ 使 $\beta\geq\alpha$. 若 $\{M_\alpha|\alpha\in D\}$ 是 D 上的有向系，则 $\{M_\alpha|\alpha\in C\}$ 是 C 上的有向系 (显然 C 也是有序的). 容易看到，自然映射

$$\varinjlim_{\alpha\in C} M_\alpha\longrightarrow\varinjlim_{\beta\in D} M_\beta$$

是一个同构，换言之，在考虑有向极限时，只需用 cofinal 集；若 $K\subset M$ 在流形中紧，显然 K 的紧邻域集在其一切邻域的集中是 cofinal 的.

现在一切都准备就绪. 令 $K\subset M$ 是可定向流形的紧子集，其

定向为 ρ；对 K 的每个邻域 V 均有一切除映射 $(V,\ V-K)\longrightarrow(M,\ M-K)$ 及卡积配对

$$\begin{array}{ccc}
H^k(V)\otimes H_n(V,V-K) & \longrightarrow & H_{n-k}(V,V-K) \\
\big\downarrow 1\otimes j_* & & \big\downarrow j_* \\
H^k(V)\otimes H_n(M,M-K) & \longrightarrow & H_{n-k}(M,M-K), \\
u\otimes\rho_K & \longmapsto & j_*(u\frown j_*^{-1}(\rho_K)).
\end{array}$$

卡积与类 ρ_K 的自然性指出，求极限后可以定义映射

$$\frown\rho_K:\check{H}^k(K)\longrightarrow H_{n-k}(M,M-K),$$

记作 $u\longmapsto u\frown\rho_K$. 于是有

Poincaré-Lefschetz 对偶性定理 对任意紧子集 $K\subset M$，$\frown\rho_K$ 是一个同构.

当 M 为紧时，可取 $K=M$，这时自然有 $\check{H}^*(M)=H^*(M)$，从而得到本节开始时说的 Poincaré 对偶性.

现在来建立 MV-原则. 设此定理对 K_1，K_2 和 $L=K_1\cap K_2$ 都成立，我们要看它能否推广到 $K=K_1\cup K_2$. 令 V_1，V_2 各为 K_1，K_2 的邻域，而 $V=V_1\cup V_2$，$W=V_1\cap V_2$，于是有 MV 序列：

$$\cdots\to H^{k-1}(V_1)\oplus H^{k-1}(V_2)\to H^{k-1}(W)\to H^k(V)\to H^k(V_1)\oplus\cdots H^k(V_2)\to\cdots$$

$$\longrightarrow H_{n-k+1}(M,M-K_1)\oplus H_{n-k+1}(M,M-K_2)\longrightarrow H_{n-k+1}(M,M-K)\to H_{n-k}(M,M-K)\to\cdots$$

这里直的映射是卡积. 由上一章建立的关于卡积的种种自然性质，可知这个图是可换的，最多相差符号. 取极限后，上面一行将被代以 Cěch 上同调群

$$\begin{array}{ccccc}
\longrightarrow\check{H}^{k-1}(K_1)\oplus\check{H}^{k-1}(K_2) & \longrightarrow & \check{H}^{k-1}(L) & \longrightarrow & \\
\big\downarrow\frown\rho_{K_1}\oplus\frown\rho_{K_2} & & \big\downarrow\frown\rho_L & & \\
\check{H}^k(K)\quad \check{H}^k(K_1)\oplus\check{H}^k(K_2)\to\cdots & & & & \\
\big\downarrow\frown\rho_K\qquad\big\downarrow\frown\rho_{K_1}\oplus\frown\rho_{K_2} & & & &
\end{array}$$

由有向极限的基本性质，它仍是正合的. 但这时，由“五”引理，

即知在 $\check{H}^k(K)$ 处的 $\frown\rho_K$ 是同构.

现在，证明一般定理已经是轻而易举的了.

(1)　当 $K=\{P\}$ 为一点时，定理是成立的，这当然是由于 $\check{H}^*(P)=H^*(P)$，而此式又因 $P\subset M$ 是邻域收缩核而成立. 故 (1) 就是前面说过的局部定理.

(2)　若 $K=\square$ 是坐标邻域 $U\simeq R^n$ 中的长方体时成立，$\square$ 的面规定与坐标平面平行.

(3)　两个这种长方体相交于同样类型的长方体上，故由 MV 原则，定理对 (2) 中长方体之有限并成立.

(4)　若 $K\subset U\simeq R^n$ 是包含于一坐标邻域内的任一紧集，(3) 中那样的集构成 K 的邻域族的一个 cofinal 族，取极限并作完备化知此定理对 K 成立.

(5)　任一紧集 $K\subset M$ 都是 (4) 中那样的 K 之有限并.

作为一个推论，可以得到经典的 Alexander 对偶定理.

定理　若 $K\subset R^n$ 为紧，则

$$\check{H}^k(K)\xrightarrow{\frown\rho_K}H_{n-k}(R^n,R^n-K)\xrightarrow{\partial}H_{n-k-1}(R^n-K)$$

是同构.

这之所以成立，自然是因为 ∂ 是一同构.

对偶性定理有种种推广，例如，它有一个相对的形式，对于紧集对 (K,L)，我们可以定义

$$\check{H}^*(K,L)=\varinjlim\{H^*(V,V\cap L)\,|\,V \text{ 是 } K \text{ 的邻域}\}.$$

于是有对偶性同构

$$\check{H}^k(K,L)\longrightarrow H_{n-k}(M-L,M-K)$$

(证明是由前面的绝对情况加“五”引理). 我们也能把它推广到 M 有边的情况，这时，局部同调 $H_*(M,M-P)$ 只有当 $P\notin\partial M$ 时才是“对”的. 定向 ρ 仍可由相容的族 $\{\rho_K\}$ 给出，$\rho_K\in H_n(M,M-K)$，但 $K\cap\partial M=\varnothing$，对偶定理的形状与上面完全一样. 若 M 是紧

的，可以证明，当 K 充分大时，$\partial M \subset M-K$ 是一个形变收缩核，所以基本类 $\rho_K \in H_*(M, M-K) \xleftarrow{\sim} H_*(M, \partial M)$ 成为 $H_*(M, \partial M)$ 中的类$[M]$. 此外，$K \subset M$ 也是一个形变收缩核，所以对偶性成为

$$H^k(M) \longrightarrow H_{n-k}(M, \partial M), \quad u \longmapsto u \frown [M].$$

§ 4. Thom-Pontrjagin 构造

我们已经用过 MV 原则两次，一次用于证明 Thom 同构定理，另一次则用于 Poincaré 对偶定理. 这两个定理在局部情况下多少是平凡的，但都 有一个特点，即可以用 Mayer-Vietoris 序列把局部结果拼成整体的结果. 这两个定理不但具有这个共同的路数，其实它们是互相等价的. 虽然我们不打算把这一点全部讲清楚，但我们要提出产生这种联系的关键的几何事实.

回忆一下，Thom 同构定理讲的是一个矢量丛，$\pi: E \longrightarrow B$，而 Poincaré 对偶性则是关于流形的一个定理，假设底空间 B 是一个流形，就可以同时讲它们了，这时 E 显然也是流形. 我们设 B 为紧，也设 E 作为一个流形是可定向的，其定向类为 ρ，同时还设 $\pi: E \longrightarrow B$ 作为一个矢量丛也是可定向的，其 Thom 类为 $U \in H^k(E, \dot{E})$. 记住 $\dot{E}=E-$零截口，因为零截口$\simeq B$ 为紧. 故有同调类 $\rho_B \in H_{n+k}(E, \dot{E})$ ($n=B$ 之维数，$k=E$ 之纤维的维数，$n+k=$ 流形 E 的维数)，于是我们可以得到一类 $\rho_B \frown U \in H_n(E)$. 因为 $\pi_*: H_*(E) \longrightarrow H_*(B)$ 是一个同构，所以可以往下投影而又得到一个类 $\pi_*(\rho_B \cap U) = \bar{\rho} \in H_n(B)$. 这个类是什么样？既然它维数也对，可不可能它就是 B 的基本类？为了验证这一点，我们要取一点 $b \in B$ 而看 $\bar{\rho} \in H_n(B) \longrightarrow H_n(B, B-b)$ 是否成为 $H_n(B, B-b)$ 的生成元. 令 $E_b \subset E$ 为 E 在 b 上之纤维，$\tilde{0} \in E_b$ 为其中的零元，V 为 b 在 B 中的一个邻域，使得 $(V, V-b) \simeq (R^n, R^n-0)$. 首先，使 E 下降为 B 的同伦变 $E-E_b$ 为 $B-b$，所以有

$$\begin{array}{ccccc} H^k(E,\dot{E})\otimes H_{n-k}(E,\dot{E}) & \longrightarrow & H_n(E) & \longrightarrow & H_n(E,E-E_b) \\ & & \pi_*\wr\downarrow & & \downarrow\wr\pi_* \\ & & H_n(B) & \longrightarrow & H_n(B,B-b) \end{array}$$

而这两个 π_* 都是同构. 所以我们可以在上面一行的 E 处来作. 由定义

$$\begin{array}{ccc} H^k(E,\dot{E}) & \xrightarrow{i_1^*} & H^k(E_b,E_b-\tilde{0}) \\ & i^*\searrow \quad \nearrow i_2^* & \\ & H^k(V\times R^k, V\times(R^k-0)) & \end{array}$$

$i_1^*(U)$是 $H^k(E_b,E_b-\tilde{0})$的生成元,i_2^* 是同构,因为$(0\times R^k,0\times(R^k-0))\subset(V\times R^k,V\times(R^k-0))$是形变收缩,所以$i^*(U)\in H^k(V\times R^k,V\times(R^k-0))$是一个生成元. 我们知道,Künneth 映射

$$H^*(V)\otimes H^*(R^k,R^k-0)\longrightarrow H^*(V\times(R^k,R^k-0))$$

是一个同构，而我们用它来定义过外上积

$$a\otimes b\longmapsto a\times b.$$

显然，在维数 k 上，$i^*(U)=1\times u$,这里 $u\in H^k(R^k,R^k-0)$是一个生成元,$1\in H^0(V)$是单位类.

由定义

$$\begin{array}{c} H_{n+k}(E,\dot{E})\xrightarrow{j_{1*}}H_{n+k}(E,E-\tilde{0}) \\ \nearrow\sim j_{2*} \\ H_{n+k}(V\times R^k,(V\times(R^k-0))\cup((V-b)\times R^k)) \\ \| \\ H_{n+k}[(V,V-b)\times(R^k,R^k-0)] \end{array}$$

$j_*(\rho_B)$是 $H_{n+k}(E,E-\tilde{0})$的生成元，而 j_{2*}是一个切除，由 Künneth 公式

$$H_*(V,V-b)\otimes H_*(R^k,R^k-0)\longrightarrow H_*[(V,V-b)\\ +(R^k,R^k-0)]$$

是同构，可以用来定义外同调积 $a\otimes b\longmapsto a\times b$. 令 $b\in H_k(R^k,R^k-0)$，使得在 Pontrjagin 对偶之下 $\langle u,b\rangle=1$，于是，$j_{2*}^{-1}j_{1*}(\rho_B)$的形

状显然是 $a\times b$, 这里 $a\in H_n(V,V-b)$ 必定是生成元. 现在我们有乘积的自然性

$$
\begin{array}{ccccc}
H^k(E,\dot{E})\otimes H_{n+k}(E,\dot{E}) & \longrightarrow & H_n(E) & \longrightarrow & H_n(E,E-E_b) \\
\| \qquad \downarrow j_{1*} & & & \nearrow & \uparrow h_* \\
H^k(E,\dot{E})\otimes H_{n+k}(E,E-\tilde{0}) & & & & \\
\downarrow i^* & & & & \\
H^k[V\times(R^k,R^k-0)]\otimes H_{n+k}[(V,V-b)\times(R^k,R^k-0)] & & & & \\
\downarrow & & & & \\
H_n[(V,V-b)\times R^k] & & \longrightarrow & & \\
\downarrow \wr\, \pi_* & & & & \\
H_n(V,V-b) & & & &
\end{array}
$$

这里 h_* 是一个切断. 我们显然有

$$(1\times u)\frown(a\times b)=(1\frown a)\times\langle u,b\rangle=a\times 1,$$

最后的 1 是 $H_0(R^k)$ 的生成元, 这正说明

$$\overline{\rho}: H_n(B)\longrightarrow H_n(B,B-b)\leftarrow H_n(V,V-b)$$

变为 a.

Thom 同调映射是由

$$\psi: H_l(E,\dot{E})\longrightarrow H_{l-k}(B),$$

$$c\longmapsto \pi_*(U\frown c)$$

给出的. 通过它将 B 与 E 中的零截口等同起来, 我们就有 $\dot{E}=E-B$. 令 φ_E, φ_B 各为 E 与 B 中的 Poincaré 对偶映射, 有

$$H^l(B)\xrightarrow{\varphi_E}H_{n+k-l}(E,\dot{E})\xrightarrow{\psi}H_{n-l}(B),$$

$$\xi\longmapsto(i^*\xi)\frown\rho_E\quad\longmapsto\pi_*(U\frown(i^*\xi\frown\rho_E)).$$

但是除了最多相差一个符号, 我们有

$$\pi_*[U\frown(i^*\xi\frown\rho_E)]=\pi_*[i^*\xi\frown(U\frown\rho_E)]$$

$$=\xi\frown\pi_*(U\frown\rho_E)=\xi\frown\overline{\rho}.$$

换言之 $\psi\circ\varphi_E=\varphi_B$. 这就建立了 Poincaré 对偶映射与 Thom 同调映

射的关系．例如，由 Poincaré 对偶定理即可得 Thom 同构定理．

上述情况在几何中总是出现．这是由于所谓的“管状邻域定理”．令 M 为一光滑流形，$N\subset M$ 为一光滑子流形（一个正规子流形）．然后回想法丛 $\nu(N, M)$ 的概念．这是 N 上的一个矢量丛其定义为商丛 $(T(M)|N)/T(N)$，“法”字通常表示“垂直”于切空间 $T(N)$ 的方向．这只不过意味着用内积作

$$0\longrightarrow T(N)\longrightarrow T(M)|N\longrightarrow \nu(N,M)\longrightarrow 0$$

这样一个分解，对于一个矢量空间，这不是什么问题，而对于一个矢量丛，也可以毫无困难地做到，所以有

$$T(M)|N=T(N)\oplus T(N)^{\perp},$$

以及

$$T(N)^{\perp}\cong\nu(N,M).$$

但是并不一定必须这样来看出 $\nu(N,M)\subset T(M)|N$ 是一个子丛，在没有内积的情况，$\nu(N,M)$ 的名称叫做“横截”丛更好，而横截方向是任一个非切向的方向．如果我们从 N 上一点出发，沿一个矢量场的积分曲线，而其初始方向是横截的，那么很清楚，我们将会离开 N 走入围绕 N 的流形 M 之中．从直观上看很容易懂得．如果从 N 上一切点出发，沿着一切横截的方向走，则必可还得 N 的某个邻域内之各点．下面的定理就是这个直观的事实之确切的表达．

管状邻域定理（The tubular neighborhood theorem） 令 $N\subset M$ 是光滑流形 M 的一个光滑子流形，$\nu(N, M)$ 是 N 在 M 中的法丛，则必有 N 在 M 中的一个邻域 V 以及一个微分同胚 $\varphi: \nu(N, M)\longrightarrow V$（到 V 上），使在 φ 下，子流形的包含关系 $N\subset M$ 与 N 作为零截口在 $\nu(N, M)$ 中的包含相等同．此外，φ 之象 V 可以取为任意小（即对 N 之任一邻域 U，我们都可取 $V\subset U$）．

事实上，这个定理的完整形式比上述内容还要多些．那里还会讲到，如果这样的微分同胚有两个：φ 与 ψ，它们之间的关系如何（互相同痕 isotopic）．那里还讲到唯一性，即若 V 不但是 N 的

邻域，而且是 N 上的矢量丛 $V\longrightarrow N$，则作为矢量丛有 $V\cong\nu(N,M)$。总而言之，根本的要点在于“抽象的”对象 $\nu(N,M)$ 可以具体地实现为 N 在 M 中的一个邻域. 承认这些以后，即有切断

$$(V,\dot{V})=(V,V-N)\longrightarrow(M,M-N).$$

这又使我们能够定义一个映射

$$H^i(N)\xrightarrow{\varphi}H^{i+k}(V,\dot{V})\xleftarrow{\sim}H^{i+k}(M,M-N)\xrightarrow{j^*}H^{i+k}(M),$$

这里 $k=N$ 之余维数 $=\dim M-\dim N$. 第一个映射 φ 即 Thom 同构. 这就是所谓 Thom-Pontrjagin 构造，因为它经常用到，所以通常有一个专用的记号. 令 $i:N\longrightarrow M$ 为包含映射，上面的映射记作 $i!$，注意 $i!$ 是一个“方向不对”的映射，因为通常的在上同调上诱导的映射 i^* 是指向另一个方向的（但 $i!$ 也使次数增加）. 二者的关系很容易描述

$$\begin{array}{ccccc}
H^i(N) & \xrightarrow{\varphi} & H^{i+k}(V,\dot{V}) & \xleftarrow{\sim} & H^{i+k}(M,M-N) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle j_1^*} & & \downarrow{\scriptstyle j^*} \\
H^{i+k}(N) & \xleftarrow{i_1^*} & H^{i+k}(V) & \xleftarrow{i_2^*} & H^{i+k}(M) \\
\uparrow & & & & \downarrow \\
\llcorner & \text{---------} & i^* & \text{---------} & \lrcorner
\end{array}$$

记住，对于 Thom 类 $U\in H^k(V,\dot{V})$，$i_1^*j_1^*(U)=\chi\in H^k(N)$ 就是从 $\nu(N,M)$ 的 Euler 类. 从上面的图中我们发现

$$i^*\circ i!(\xi)=i_1^*j_1^*(\pi^*\xi\smile U)=(i_1^*\pi^*\xi)\smile(i_1^*j_1^*U)=\xi\smile\chi,$$

即是说 $i^*\circ i!$ 就是乘以 Euler 类 χ.

因为 $i!$ 中涉及 Thom 同构，我们自然设想它会与 Poincaré 对偶性也有关. 这也很容易描述. 设 N 与 M 都是紧的可定向的. 我们对 $\nu(N,M)$ 这样赋定向，使若在其后继以 $T_p(N)$ 的定向就会得到 $T_p(M)$ 的定向. 记住，若 $\rho_N\in H_{n+k}(V,\dot{V})$ 是 V 的定向，而 $U\in H^k(V,\dot{V})$ 为 Thom 类，则

$$\pi_*(U\cap\rho_N)\in H_n(N)$$

是 N 的定向类. 事实上，我们已采用一个规定即是用这个定向为 N 的正向，于是有

$$i_*[N]=i_*\pi_*(U\frown\rho_N)=i_{2*}i_{1*}\pi_*(U\frown\rho_N)=i_{2*}(U\frown\rho_N).$$

由图

$$\begin{array}{ccccc}
U & & \rho_N & & \\
\cap & & \cap & & \\
H^k(V,\dot{V}) & \otimes & H_{n+k}(V,\dot{V}) & \longrightarrow & H_n(V) \\
\downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow i_{2*} \\
H^k(M,M-N) & \otimes & H_{n+k}(M,M-N) & \longrightarrow & H_n(M) \\
\downarrow j^* & & \uparrow j_* & & \| \\
H^k(M) & \otimes & H_{n+k}(M) & & H_n(M) \\
\cup & & \cup & & \\
i!\,(1) & & [M] & &
\end{array}$$

得 $i_{2*}(U\frown\rho_N)=i!\,(1)\frown[M]$，即

$$i_*[N]=i!(1)\frown[M].$$

它意味着，在 M 中的 Poincaré 对偶性下，同调类$i_*[N]\in H_n(M)$和上同调类 $i!\,(1)\in H^k(M)$互相对偶.

我们把以上所述应用到一个特殊的例子，即对一个流形 M，考虑对角嵌入

$$\Delta:\qquad M\longrightarrow M\times M,\qquad P\longmapsto(P,\ P).$$

但在作计算之前，先作一般的说明. 用一个体 R 为系数环，总有一个上积配对

$$\begin{aligned}
&H^i(M)\otimes H^{n-i}(M)\longrightarrow R,\\
&u\otimes v\qquad\longmapsto B(u,v)=\langle u\cdot v,[M]\rangle.
\end{aligned}$$

当 R 是一个体时，$B(u,v)$是非奇异的，即其诱导的线性映射

$$\begin{aligned}
\tilde{B}:\quad &H^i(M)\longrightarrow[H^{n-i}(M)]^*,\\
&u\longmapsto B(u,\cdot)
\end{aligned}$$

是同构. 其所以如此是因为我们很容易检验，下图是可交换的

$$
\begin{array}{ccc}
H^r(M) & \xrightarrow{\tilde{B}} & [H^{n-r}(M)]^* \\
& {\scriptstyle P}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle P_1} & \\
& H_{n-r}(M) &
\end{array}
$$

这里 P 是 Poincaré 对偶性，P_1 是 Pontrjagin 对偶性. 事实上，对于 $u \in H^r(M)$，有

$$[P_1 \circ P\ (u)]\ (v) = [P_1\ (u \frown [M])]\ (v)$$
$$= \langle v,\ u \frown [M] \rangle = \langle v \smile u,\ [M] \rangle,$$

即有 $P_1 Pu = \pm \tilde{B}(u)$，$P$ 总是同构，而当系数在一个体中时，P_1 也是同构. 换言之，当系数在一个体中时，我们总能用上同调来表示 Poincaré 对偶性.

当系数在体中时，Künneth 映射总是同构，这意味着 $H^*(M \times M)$的任一元都是 $u \times v$ 这种形状的元之线性组合，$u, v \in M^*(M)$. 再记住，由上积的定义

$$u \smile v = \Delta^*(u \times v).$$

令 $\{u_\alpha\}$ 为 $H^*(M)$的一个基底，而 $\{\tilde{u}_\alpha\}$ 是它关于双线性形式 B 的对偶基底，即

$$B(u_\alpha, \tilde{u}_\beta) = \delta_{\alpha\beta}.$$

令 $\mu \in H^n(M \times M)$是对偶于 $\Delta_*[M] \in H_n(M \times M)$的上同调类. 因为$\{u_\alpha \times \tilde{u}_\beta\}$是 $H^*(M \times M)$的基底，我们有展开式

$$\mu = \sum \lambda_{\alpha\beta} \mu_\alpha \times \tilde{\mu}_\beta.$$

为求系数 $\lambda_{\alpha\beta}$，可以将 μ 乘以 $\tilde{u}_\alpha \times u_\beta$ 再在基本类 $[M]$ 上求值. 我们有

$$\langle \mu \smile (\tilde{u}_\alpha \times u_\beta), [M] \times [M] \rangle = \sum_{\gamma, \delta} \lambda_{\gamma\delta} \langle (u_\gamma \times \tilde{u}_\delta) \smile (\tilde{u}_\alpha \times u_\beta) [M] \times [M] \rangle.$$

记住，在 $H^*(M \times M)$中的积其实就是在 $H^*(M) \otimes H^*(M)$中的积，我们就有

$$\langle (u_\gamma \times \tilde{u}_\delta) \smile (\tilde{u}_\alpha \times u_\beta)\ [M] \times [M] \rangle$$

$$= (-1)^{|\tilde{u}_\sigma||\tilde{u}_\alpha|} B(u_\gamma, \tilde{u}_\alpha) B(\tilde{u}_\sigma, u_\beta)$$

$$= (-1)^{|\tilde{u}_\sigma|(|\tilde{u}_\alpha|+|u|)} B(u_\gamma, \tilde{u}_\alpha) B(u_\beta, \tilde{u}_\sigma)$$

$$= (-1)^{|\tilde{u}_\sigma|(|\tilde{u}_\alpha|+|u_\beta|)} \delta_{\gamma\alpha}\delta_{\sigma\beta}.$$

另一方面，我们又有

$$\langle \mu(\tilde{u}_\alpha \times u_\beta), [M]\times[M] \rangle$$

$$= (-1)^{|u|\cdot|\tilde{u}_\alpha \times u_\beta|} \langle \tilde{u}_\alpha \times u_\beta, u \frown [M]\times[M] \rangle$$

$$= (-1)^{|u|\cdot|\tilde{u}_\alpha \times u_\beta|} \langle \tilde{u}_\alpha \times u_\beta, \Delta_* [M] \rangle$$

$$= (-1)^{|u|\cdot|\tilde{u}_\alpha \times u_\beta|} \langle \Delta^* (\tilde{u}_\alpha \times u_\beta), [M] \rangle$$

$$= (-1)^{|u|\cdot|\tilde{u}_\alpha \times u_\beta|} B(\tilde{u}_\alpha, u_\beta)$$

$$= (-1)^{|\tilde{u}_\alpha||u_\beta|} (-1)^{|u|\cdot|\tilde{u}_\alpha \times u_\beta|} \delta_{\alpha\beta}.$$

这就意味着，只有当 $\alpha=\beta$ 时，$\lambda_{\alpha\beta}\neq 0$. 也就是说，$\mu$ 是以下的对角形式

$$\mu = \sum (-1)^{|u_\alpha|} u_\alpha \times \tilde{u}_\alpha. \qquad (*)$$

根据 Thom-Pontrjagin 构造，μ 是由 Thom 类所决定的，或者说是由法丛 $\nu(M, M\times M)$ 的 Euler 类决定的. 这个法丛是什么?我们说 $\nu(M, M\times M)=T(M)$就是 M 的切丛. 这是很容易看到的，显然

$$T(M\times M)|\Delta(M) = \{(v,v')\,|\,v,v'\in T(M), \pi(v)=\pi(v')\}$$

$$\cong T(M)\oplus T(M).$$

而 $T(\Delta(M))\subset T(M\times M)|\Delta(M)$则是它的由 $v=v'$ 所给出的子丛. 从下面的正合序列即可得出上之论断：

$$0 \longrightarrow T(M) \longrightarrow T(M)\oplus T(M) \longrightarrow T(M) \longrightarrow 0,$$

$$v \longmapsto (v,v),$$

$$(v,v) \longmapsto v - v'.$$

由一般的公式 $i^* i_!(\xi)=\xi\smile\chi$ 可知

$$\Delta^* \Delta_!(1) = \chi(T(M))$$

正是 M 的切丛的 Euler 类. 另一方面，$\Delta_!(1)=\mu$ 正是 $\Delta_*[N]$ 的对偶类. 由展开式（*）知，

$$\langle \chi T(M), M \rangle = \langle \Delta^* \mu, [M] \rangle$$

$$= \sum_{\alpha}(-1)^{|u_\alpha|}B(u_\alpha, \hat{u}_\alpha)$$
$$= \sum \alpha(-1)^{|u_\alpha|}.$$

但是很明显，这个和就是

$$\sum(-1)^i \dim H^i(M) = \chi(M),$$

即 M 的 Euler 示性数，关系式

$$\langle \chi(T(M)), [M] \rangle = \chi(M)$$

最终说明了 Euler 类这个名称的由来. 上式也说明了，为什么$\chi(M)$和 $\chi(T(M))$同是 M 上存在处处非零点矢量场的“相同”的障碍(见 Lefschetz 不动点定理和 Thom 同构定理).

§ 5. 相交理论

到此为止，我们对下面的普遍原理已经有了一些了解. 同调按其定义，本性上更多几何，所以比较容易体会到. 另一方面，上同调因为有乘积，所以计算更加方便. Poincaré 对偶性把它们连接起来，可以说是集双方之精华. 上面对 Euler 类的计算就是运用这个原理的生动的例子. 所谓相交理论（intersection theory）更是进一步发掘了这个思想. 一个简单的例子：在环面 $T^2=S^1\times S^1$上有赤道圆 $S_1=S^1\times(*)$和子午圆 $S_2=(*)\times S^1$. 它们相交于一点$(*, *)$. “一”这个数目可以从同调理论中再把它得出来如下.

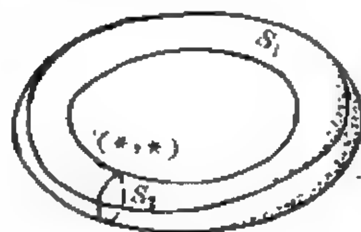


图 11—4

令 $[S^1] \in H_1(S^1)$是其基本类，$\mu\in H^1(S_1)$是其对偶类，即有 $\langle\mu, [S^1]\rangle=1$. 显然，在 $H^*(S^1\times S^1)$中，对偶于$[S_1]$和$[S_2]$的上同调类各为 $\mu\times 1$和$1\times\mu$，我们有

$$\langle(\mu\times 1)\smile(1\times\mu), [S^1\times S^1]\rangle$$
$$= \langle\mu\times\mu, [S^1]\times[S^1]\rangle$$

$$= \langle \mu, [S^1] \rangle \langle \mu, [S^1] \rangle = 1.$$

换言之，用上同调乘积算出了几何对象 S^1 和 S^1 的相交点数.

现在对二维球面 S^2 上的赤道圆 S_1 和子午圆 S_2 来作同样的事.

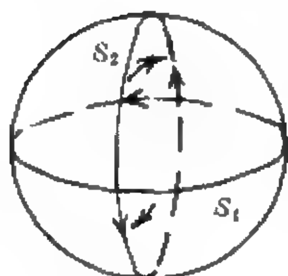


图 11—5

相交数是2，但因 $[S_1]=[S_2]=0=H_1(S^2)$. 故上同调乘积为0，所以，几何和代数结果颇不一致. 若考虑到定向，就会看到这两点定向相反，所以相交数的代数和是 $1+(-1)=0$，结果恰好是对的. 现在我们来讨论一般的几何情况. 令 M 为紧的可定向 n 维流形，N_1，$N_2 \subset M$ 是两个闭的、可定向的维数互补的子流形，即

$$\dim N_1 + \dim N_2 = n.$$

令 $P \in N_1 \cap N_2$ 是一个交点. 我们说 N_1，N_2 横截于 P 点，如果 $T_P(M)$ 是由 $T_P(N_1)$ 和 $T_P(N_2)$ 生成的，即

$$T_P(M) = T_P(N_1) + T_P(N_2).$$

从图11—6可以看到，横截就是非相切的相交

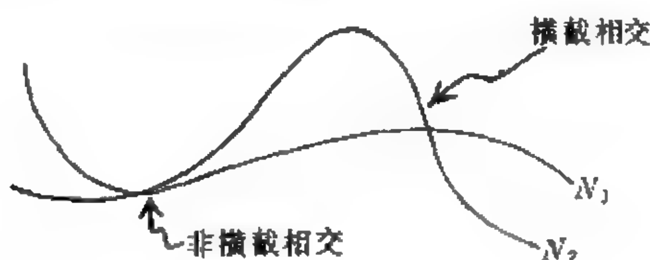


图 11—6

注意上面的和一定是直和：

$$T_P(M) = T_P(N_1) \oplus T_P(N_2),$$

$T_P(M)$ 有两个定向，其一即用来定义 M 在 P 点之定向的，另一个则由 $T_P(N_1)$ 之定向再继以 $T_P(N_2)$ 之定向看得. 我们按通常的方法定义 P 点的局部指标 $\varepsilon(P)=\pm 1$. 根据这两种定向是否相同而定. 取一个坐标邻域 $(U, x_1, \cdots, x_n)$ 使 N_1 由前 p 个坐标 $(x_1, \cdots, x_p)$ 而定，$p=\dim N_1$；再取一个坐标 $(U, y_1, \cdots, y_n)$ 使 N_2 由 $y_1=$

$\cdots = y_p = 0$给出．横截相交意味着

$$(x_1, \cdots, x_n) \longmapsto (x_1, \cdots, x_p, y_{p+1}(x), \cdots, y_n(x)) = z$$

是一个微分同胚，即是说 (U, z) 也是一个坐标邻域，在 (U, z) 中，$N_1 = R^p \times 0$，$N_2 = 0 \times R^q$，$q = n - p$．一个特例是 N_1，N_2交于孤立点 P 处，而当 M 为紧时，这种交点只有有限个．这时，我们定义相交数为

$$N_1 \cdot N_2 = \sum_P \varepsilon(P),$$

注意，这个定义是与次序有关的．例如说，我们有

$$N_2 \cdot N_1 = (-1)^{(\dim N_1)(\dim N_2)} N_1 \cdot N_2.$$

可以预期会有一个相应的上同调定理．即是

相交定理 令 μ_1，μ_2是 $i_{1*}[N_1]$和 $i_{2*}[N_2]$的对偶上同调类，于是 $N_1 \cdot N_2 = \langle \mu_1 \smile \mu_2, [M] \rangle$．

证 我们有

$$\langle \mu_1 \smile \mu_2, [M] \rangle = \langle \mu_1, \mu_2 \frown [M] \rangle = \langle \mu_1, i_{2*}[N_2] \rangle$$
$$= \langle i_2^* \mu_1, [N_2] \rangle,$$

μ_1的定义是

$$\begin{array}{ccccc} H^q(V, V - N_1) & \overset{\sim}{\leftarrow} & H^q(M, M - N_1) & \longrightarrow & H^q(M), \\ U_1 & & & & \mu_1 \end{array}$$

这里 $U_1 \in H^q(V, V - N_1)$是法从 $V = \nu(N_1, M)$的 Thom 类，由自然性，$\langle i_2^* \mu_1, [N_2] \rangle$是

$$\begin{array}{ccc} H^q(V, V - N_1) & \longrightarrow & H^q(V \cap N_2, V \cap N_2 - N_1 \cap N_2), \\ U_1 & \longmapsto & i_2^* U_1 \end{array}$$

$\langle i_2^* U_1, \rho \rangle$，而 ρ 由下式决定

$$\begin{array}{l} H_q(N_2) \to H_q(N_2, N_2 - N_1 \cap N_2) \\ \quad [N_2] \\ \overset{\sim}{\leftarrow} H_q(V \cap N_2, V \cap N_2 - N_1 \cap N_2). \\ \qquad\qquad \rho \end{array}$$

但是 $V \cap N_2 = \bigcup_P V(P)$，而在 P 周围的一个坐标邻域中

$$V(P) \simeq 0 \times R^q.$$

于是

$$H^q(V \cap N_2, V \cap N_2 - N_1 \cap N_2) = \sum_P H^q(V(P), V(P) - P),$$

$$i_2^*(U_1) \longmapsto \sum i_2^* U_1(P),$$

$$H_q(V \cap N_2, V \cap N_2 - N_1 \cap N_2) = \sum_P H_q(V(P), V(P) - P),$$

$$\rho \longmapsto \sum \rho(P).$$



图 11—7

记住按我们的规定，$\nu(N, M)$是这样定向的，使$T_P(N_1)$继以$\nu_P(N_1, M) \simeq T_P(N_2)$后给出$T_P(M)$的定向，另一方面，$\rho$遵照$N_2$的定向，很清楚，对每一点$P \in N_1 \cap N_2$，我们恰好有

$$\langle i_2^* U(P), \rho(P) \rangle = \varepsilon(P).$$

由此即得定理之证.

相交数$N_1 \cdot N_2$之能够定义依赖于一个有利的几何情况，即在各个交点上N_1，N_2都是横截的，而另一方面，上同调积$\langle \mu_1 \smile \mu_2, [M] \rangle$即令没有这个条件也时时有定义. 例如，同调类$i_{1*}[N_1]$和$i_{2*}[N_2]$在$i_1$和$i_2$的同伦下总是不变的，即令将$N_1$，$N_2$作变形，$N_1 \cdot N_2$也不变. 事实上总可以将$N_1 \cdot N_2$加以变形，使它们变成横截. 而这个定理即可保证，不论怎样做，相交数总是不变的.

特定的例子. 我们有

$$S^2 = \mathbf{CP}^1 \subset \mathbf{CP}^2,$$

$$\mathbf{CP}^1 \longrightarrow \mathbf{CP}^2, \ [z_0, z_1] \longmapsto [z_0, z_1, 0].$$

显然$[\mathbf{CP}^1]$对偶于生成元$\mu \in H^2(\mathbf{CP}^2)$，我们说$\mathbf{CP}^1 \subset \mathbf{CP}^2$一定有非平凡的法丛. 因为若不然，我们显然能将$[\mathbf{CP}^1]$沿法丛移动，使

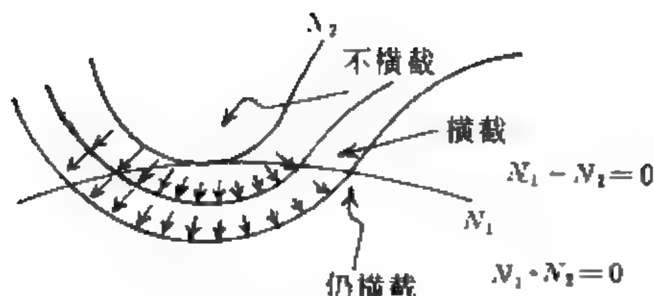


图 11—8

其象与原来的流形相分离. 这意味着 $\mu \smile \mu = \mu^2 = 0$, 这一点我们知道是不对的. 事实上 $\mathbf{CP}^1$在 $\mathbf{CP}^2$中的法丛即典则线从 $E \longrightarrow \mathbf{CP}^1$.

$E = \{([z_0, z_1], v) \mid v \in C^2$ 是线段$[z_0, z_1]$上的一点$\}$, 令 $v = \lambda(z_0, z_1)$, 则映射

$$E \longrightarrow \mathbf{CP}^2, ([z_0, z_1], v) \longmapsto [z_0, z_1, \lambda]$$

使 E 成为 $\mathbf{CP}^1$的一个邻域. 由于管状邻域的唯一性, E 即 $\mathbf{CP}^1$在 $\mathbf{CP}^2$中的法丛. 我们知道$\langle \mu \smile \mu, [\mathbf{CP}^2] \rangle = 1$, 若除去点 $z_0 = 0$, 就可以看见 C^2中的图象, 现在二维球面 $S^2 = \mathbf{CP}^1$即复直线 $w_2 = 0$, 看起来好象可以把 w_1直线推得离开其自身, 但实际上不行, 因为无穷远点 $z_0 = 0$仍然粘住不动, 这就给出相交数1.

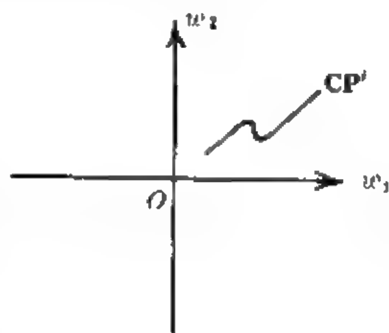


图 11—9

第十二章 纤维丛通论

§1. 引 言

Poincaré 对偶性是流形的基本的同调论事实. 例如，上一章里我们就看到了怎样用它来建立子流形的代数上同调乘积和其几何相交性质的关系. 我们知道，每一个光滑流形都有一个与它紧密相关的对象即切丛. 因此自然会问关于切丛是否有某些基本的同调论的事实. 事实上确实是有的，而且在许多方面丛的同调论比之流形本身的同调论更有用. 理由在于切丛有代数构造. 归根结蒂，切丛是一族参数化的矢量空间. 这使我们能将可对矢量空间来作的一些构造如直和、张量积和对偶空间等等移到切丛上来，这已在第三章中看到了. 其结果是可以在丛的同调理论中建立起一种算术，使之能够计算，从而也更易懂. 这个同调理论就是示性类理论. 虽然我们主要的兴趣在矢量丛，然而在概念上更令人满意的处理法是把视野打开一些，讨论一般的纤维丛概念. 本章的目的就在于此.

问题乍看之下很简单. 因为矢量丛只是一族参数化的矢量空间，似乎把矢量空间代之以一般的“纤维”就会得到纤维丛. 然而，事实上这并非正确的看法. 我们来解释它.

回想一下，矢量丛 $\pi: E\longrightarrow B$ 不只是一族参数化的矢量空间，还要满足局部平凡性条件，即有 B 的开覆盖 $\{U_i\}$ 和一族同胚

$$\begin{array}{ccc} U_i\times V & \xrightarrow{\varphi_i} & \pi^{-1}(U_i) \\ & \searrow \quad \swarrow \pi & \\ & U_i & \end{array}$$

(V 是完全固定的矢量空间)，使对每一点 $b\in U_i$，

$$V \xrightarrow{\varphi_{ib}} \pi^{-1}(b) = E_b, \quad v \longmapsto \varphi_i(b, v)$$

是线性同构. 正是在这里用到了纤维 E_b 为矢量空间的性质. 由于此，对 $b\in U_i\cap U_j$ 有线性映射

$$\varphi_{ij}(b) = \varphi_{ib}^{-1}\circ\varphi_{jb},$$

即对每点 b，有 $\varphi_{ij}(b)\in GL(V)$.

映射

$$\varphi_{ij}: U_i\cap U_j \longrightarrow GL(V), \quad b\longmapsto\varphi_{ij}(b),$$

即迁移函数. 它们满足所谓上循环条件（第三章，§1）

(C) $\qquad \varphi_{ij}\circ\varphi_{jk} = \varphi_{ik}$ 　于 $U_i\cap U_j\cap U_k$ 上.

我们已经看到，迁移函数 $\{\varphi_{ij}\}$ 是丛构造的最本质的东西. 只要指定了适合条件（C）的一族 $\{\varphi_{ij}\}$，所有的丛都可以这样造出来（命题3.1）. 但是请注意，描述 $\{\varphi_{ij}\}$ 时并没有提到"纤维" E_b，而只提到模型空间 V 和群 $GL(V)$. 群 $G=GL(V)$"作用"在模型空间 V 上（其上的线性变换）. 显然，应该推广的是这一对 (G, V). 此外，我们会看到，群 G 将起主要作用.

设 G 为一拓扑群，X 为一拓扑空间，G 在 X 上的作用就定义为一连续映射

$$\mu: G\times X\longrightarrow X, \quad (g, x)\longmapsto gx=\mu(g, x),$$

使之适合一些自然的要求：

(1) $ex=x$，e 为 G 中的恒等元.

(2) $(g_1g_2)x = g_1(g_2x)$.

按上面的写法，因 G 的元素写在左方，将称为左作用. 当然也可完全类似地定义右作用. 我们对 G 和 X 也只作了最少的要求. 如果有更多的构造，例如 G 为 Lie 群而 X 为光滑流形，也可要求 μ 为光滑的而且称之为光滑作用. 若 X 为一矢量空间而且每一个 $x\longmapsto gx$ 都是线性的，就称 μ 为一线性表示或简称为一表示.

由此得出一些初等的概念.

对每一点 $x\in X$，集

$$G_x=\{g|gx=x\}\subset G$$

显然是一个（闭）子群，称为 x 点的迷向子群.

若对一切 $x\in X$，$G_x=\{e\}$，此作用称为自由的. 例如，线性表示决不是自由的，因为 $G_0=G$（0是 X 之原点）.

交 $N=\bigcap_{x\in X}G_x$ 易见是 G 的正规子群. 若 $N=\{e\}$，称此作用为有效的. 所以，自由作用都是有效的. 若 $g\in N$，当然对一切 x 有 $gx=x$，即是说，g 是浪费了的. 所以，有效作用就意味着没有浪费. 例如，我们总可以定义对一切 $x\in X$，$g\in G$ 有 $gx=x$. 这称为平凡作用，它全是浪费了的.

这件事还有一个有用的说法. 对任意空间 X，集

$$H(X)=\{\varphi|\varphi:X\longrightarrow X \text{ 为同胚}\}$$

显然是一个群，即 X 上之同胚群. G 在 X 上的作用定义了一个同态

$$\tilde{\mu}:G\longrightarrow H(X),\ g\longmapsto\tilde{g},$$

$\tilde{g}$ 即同胚 $x\longmapsto gx$. 这时显然有 $N=\ker\tilde{\mu}$. 所以当作用为有效时，可以认为 G 是 $H(X)$ 的子群. 这就使我们能谈起一已知同胚 $\varphi:X\longrightarrow X$ 是否“属于”G 的问题，即是否存在一个 $g\in G$ 使 $\varphi=\tilde{g}$. 当然，即令作用不一定为有效时，这种 g 也可能存在，但对有效作用，g 将是唯一的. 对于每一点 $x\in X$，$\{gx|g\in G\}=G(x)$ 是过 x 的轨道. 由 $g\longmapsto gx$ 所给出的映射 $G\longrightarrow G(x)$ 是映上. $gx=g_1x$ 表示 $g_1^{-1}g\in G_x$，所以 $G(x)=G/G_x$. $G(x)$ 也是下述等价关系～的等价类：$x\sim x_1$ 当且仅当有某个 $g\in G$ 使 $x_1=gx$. 商空间 $X/\sim$ 记作 X/G 并称为此作用的轨道空间.

所谓 G 空间之间的等变（equivariant）映射 $f:X\longrightarrow Y$ 即对一切 $g\in G$ 均有 $f(gx)=gf(x)$ 的连续映射. f 于是诱导出一个映射 $\bar{f}:X/G\longrightarrow Y/G$. 若 f 还是同胚，则 f^{-1} 自然也是等变的，这时称 (G,X) 和 (G,Y) 为等价的作用.

§2. 具有构造群的纤维丛

现在可以给出一般纤维丛的定义了．纤维丛由以下各要素构成：

(1) 底空间 B，全空间 E 以及从 E 到 B 上的连续映射 $\pi: E \longrightarrow B$，π 称为投影．

(2) 空间 F 及其上的有效作用 G 的偶 (G, F)．F 称为纤维，G 称为构造群．

(3) 局部平凡性．B 有一开覆盖 $\mathscr{U} = \{U_i\}$，且对每个 i 均有与投影映射相容的同胚 $\varphi_i: U_i \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U_i)$，即下述图式是可换的：

$$\begin{array}{ccc} U_i \times F & \xrightarrow{\varphi_i} & \pi^{-1}(U_i) \\ & P_1 \searrow \quad \swarrow \pi & \\ & U_i & \end{array}$$

$P_1: U_i \times F \longrightarrow U_i$ 就是到第一个因子的投影．

(4) 相容性．由 (3)，对每点 $b \in U_i \cap U_j$，有一同胚

$$\varphi_{ij}(b) = \varphi_{ib}^{-1} \circ \varphi_{jb}: F \xrightarrow{\varphi_{jb}} \pi^{-1}(b) = E_b \xleftarrow{\varphi_{ib}} F.$$

我们要求 $\varphi_{ij}(b) \in G$，且对每一对 (i, j) 映射

$$\varphi_{ij}: U_i \cap U_j \longrightarrow G, \quad b \longmapsto \varphi_{ij}(b)$$

均为连续的．

丛构造的要点当然是条件 (3) 和 (4)．和一个流形一样，(U_i, φ_i) 是局部坐标而 (4) 即迁移条件．群 G 正是在这里起了作用．由于 φ_i 是同胚，所以 $\varphi_{ij}(b)$ 也是模型空间 F 的同胚，$\varphi_{ij}(b)$ 与恒等映射之差异表示从 U_j 过渡到 U_i 出现的扭曲．但是我们的要求尚多于此：这些扭曲不是任意的同胚．它们必须是某个事前指定的群 G 的作用．这并非是无关紧要的．如果把这个一般定义与第三章给出的矢量丛定义相比较，就看到，矢量丛不仅是一个模型

空间 $F=V$ 为矢量空间的丛. 更重要的是，其构造群必须是一般线性群 $GL(V)$. 从拓扑学的观点来看，$GL(V)\subset H(V)$（V 作为拓扑空间看时，V 上一切同胚之群），确实是一类很特殊的同胚. 而正是由于限于 $GL(V)$ 才使矢量丛上的许多构造（例如张量积）成为可能. 所以研究纤维丛的精神始终是：必须事先确定构造群 G，或更准确地说，事先确定对（G，F）.

例如，从 $\pi:E\longrightarrow B$ 可能有另一族局部坐标系 $\{(V_\alpha,\psi_\alpha)\}$. 和流形的定义一样，如果它与 $\{(U_i,\varphi_i)\}$ 相容，就应该认为它们确定相同的纤维丛. 相容性即指它们来自同一个群 G，即对每一点 $b\in U_i\cap V_\alpha$，同胚

$$\varphi_{ib}^{-1}\circ\psi_{\alpha b}:F\xrightarrow{\psi_{\alpha b}}\pi^{-1}(b)\xleftarrow{\varphi_{ib}}F$$

必在 G 中，而且

$$U_i\cap V_\alpha\longrightarrow G,\quad b\longmapsto\varphi_{ib}^{-1}\circ\psi_{\alpha b}$$

是连续的.

类似地可以定义具有相同纤维(G,F)的纤维丛 E 与 E' 之间的"同态"$\bar{f}:E\longrightarrow E'$. 它首先是一个连续映射并将纤维变成纤维，随之诱导出一个连续映射 $f:B\longrightarrow B'$，使以下图式为可换的：

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\bar{f}} & E' \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi'} \\ B & \xrightarrow[f]{} & B'. \end{array}$$

这样，对每一点 $b\in B$，$\bar{f}$ 映 E_b 到某一个 $E'_{b'}$（$b'=f(b)$）. 其次我们要确定在这些纤维上发生了什么. 即有

（1） 对每一个 $b\in B$，$\bar{f}:E_b\longrightarrow E'_{b'}$ 是同胚，但还不只是一般的同胚；

（2） 对 E 的每个含 b 的局部坐标（U_i，φ_i）和 E' 的每个含 b' 的局部坐标（V_α，ψ_α），同胚

$$\bar{f}_{i\alpha}(b)=\psi_{\alpha b'}^{-1}\circ\bar{f}\circ\varphi_{ib}:F\xrightarrow{\varphi_{ib}}E_b\xrightarrow{\bar{f}}E'_{b'}\xleftarrow{\psi_{\alpha b'}}F$$

在 G 中，且

$$U_i \cap f^{-1}(V_a) \longrightarrow G, \quad b \longmapsto \tilde{f}_{ia}(b)$$

是连续的．这样，和光滑映射的定义一样，

$$\tilde{f}_{ia}(b) = \psi_{a b}^{-1} \circ \tilde{f} \circ \varphi_{ib}$$

是 $\tilde{f}$ 在局部坐标中的表示，而且我们要求它是一个模型映射，即来自 G 的映射．

有一个特例，即 $B=B'$ 而 $f:B\longrightarrow B$ 为恒等映射的情况，这时称 $\tilde{f}$ 为丛映射．如果再次与流形比较，有一个丛映射意味着由局部坐标系 (U_i, φ_i) 和 (V_a, ψ_a) 定义的构造（即具有群 (G, F) 的纤维丛构造）是"同构"（但非严格相同）．

现在看一些例子．首先，矢量丛 $\pi: E\longrightarrow B$ 是一纤维丛，其纤维 $F=V$ 是一矢量空间，而群 $G = GL(V)$，这些前面都已说过了．(虽然原来的说法稍有不同．那时说 E_b"是"矢量空间而每个 φ_{ib}: $V\longrightarrow E_b$ 都是线性映射．不难看到，这与现在的定义是等价的．)

令 $V^* = V-0$ 是矢量空间 V 除去原点，$E^* = E-$（零截口）．因为每个 $g\in GL(V)$ 映 V^* 为 V^*，故有 G-空间 V^*．我们指出 $\pi: E^* \longrightarrow B$ 是以 (G, V^*) 为纤维的纤维丛．这是不足道的．E 中每个局部坐标

$$\varphi_i: U_i \times V \longrightarrow E$$

显然都给出一个局部坐标

$$\varphi_i^*: U_i \times V^* \longrightarrow E^*.$$

E^* 的迁移函数即 E 的迁移函数，即 $\varphi_{ij}(b): V\longrightarrow V$ 在 V^* 上的限制．$E^*\longrightarrow B$ 称为与 E 相关的"球丛"，其理由以后再说．(E^* 的纤维 V^* 并不是球，但与球有相同伦型：单位球 $S(V)\subset V^*$ 是其形变收缩核．)

在 V^* 中给出一个等价关系：$v\sim v'$ 当且仅当有某个标量 $\lambda\neq 0$ 使 $v'=\lambda v$．这样定义了**射影空间** $P(V) = V^*/\sim$．若 $v\sim v'$，则 $g(v') = g(\lambda v) = \lambda g(v)$ 对 $g\in GL(V)$ 成立，因为 g 是线性的．所以由 G 诱导出 $P(V)$ 上的一个作用：$g[v] = [gv]$，现在在 E^* 上定义等价

关系～如下：$v \sim v'$当且仅当

(1) $\pi(v)=\pi(v')$，即 v，v'属于相同纤维 E_b，且

(2) 有一标量 $\lambda \neq 0$使 $v'=\lambda v$. 因为 E_b 是矢量空间，所以此式是有意义的.

所得的商空间 $P(E)=E^*/\sim$ 仍有一投影 $P(E) \longrightarrow B$. 容易看到，这是 B 上的纤维丛，纤维为 $(GL(V), P(V))$，其迁移函数与 E 的相同. 它称为与 E 相关的射影空间丛.

下面作一个新的丛. 令 K 为 V 的标量域，$K^*=K-0$. 于是 K^* 是一个群（K 的乘法群），且以乘法作用于 K 或 K^*上，这样我们就有了一对（K^*，K^*）. 令 $\rho: V^* \longrightarrow P(V)$ 为自然投影. 我们指出，它是以（K^*，K^*）为纤维的纤维丛，这其实只是重复一下以 $P(V)$ 为流形的作法. 我们现在目前的框架下回忆一下. 取 V 的一个基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}$，可以定义

$$U_i=\left\{[v] \mid \quad v=\sum_k \mu_k e_k, \text{且 } \mu_i \neq 0\right\}.$$

U_i 是 $P(V)$ 中适当定义的开集且 $\{U_1, \cdots, U_n\}$ 覆盖 $P(V)$. 对每个 i，

$$\rho^{-1}(U_i)=U_i^*=\left\{v \mid \quad v=\sum_k \mu_k e_k, \text{且 } \mu_i \neq 0\right\} \subset V^*.$$

今定义

$$\varphi_i: U_i \times K^* \longrightarrow U_i^*, \qquad ([v], \mu) \longmapsto \frac{\mu}{\mu_i} v,$$

这里 $v=\sum_k \mu_k e_k$. 这是一个适当定义的同胚. 若 $[v] \in U_i \cap U_j$，我们有

$$U_i \times K^* \xrightarrow{\varphi_i} E^* \xleftarrow{\varphi_j} U_j \times K^*,$$

$$([v], \mu) \longmapsto \frac{\mu}{\mu_i} v=\frac{\nu}{\mu_j} v \longleftarrow\!\!| ([v], \nu),$$

这里 $\nu=(\varphi_{ji}[v])(\mu)=\frac{\mu_j}{\mu_i} \cdot \mu$ 是 $\mu_j/\mu_i \in K^*$ 乘以 μ. 当然

$$U_i \cap U_j \longrightarrow K^*, \qquad [v] \longmapsto \varphi_{ji}[v]=\mu_j/\mu_i$$

是连续的.

更一般地说，$E^* \longrightarrow P(E)$ 也定义一个以 (K^*, K^*) 为纤维的纤维丛. 只需将 $E \longrightarrow B$ 的局部坐标和 $V^* \longrightarrow P(V)$ 的局部坐标综合起来即可. 细节留给读者.

我们还可以描述另一类重要的例子，即齐性空间. 令 G 为一拓扑群而 $H \subset G$ 为一子群. 我们可以作出左陪集空间 G/H. 记住，它是 G 按下述等价关系作出的商空间：$g \sim g_1$ 当且仅当 $g^{-1}g_1 \in H$. 因此，我们有自然投影 $\pi: G \longrightarrow G/H$. 对每一点 $\bar{g} = \pi(g) \in G/H$，"纤维" $\pi^{-1}(\bar{g}) = gH \subset G$ 当然就是左陪集 gH；作为一个空间，它与 H 是同胚的. 这样 $\pi: G \longrightarrow G/H$ 看起来象一个以 H 为纤维的纤维丛. 但若要说得更准确一些，我们还必须指出构造群（及其作用在纤维 H 上的方式）并证明局部平凡性. 为此，注意到群 G 以左乘作用在 G/H 上，即 $g\bar{g}_0 = \overline{gg_0}$. 故若能证明在一点的局部平凡性，例如在 $\bar{e} \in G/H$ 处（$e \in G$ 为恒等元），即有在各点处的局部平凡性. $\bar{e}$ 处的局部平凡性一般不能保证，但在特例下确是有的. 最重要的特例是 G 为 Lie 群而 $H \subset G$ 为一闭子群的情况. 回忆一下（第五章）这时 H 自然是一子流形从而其本身也是 Lie 群，$L(H) \subset L(G)$ 是 H 的 Lie 代数，$V \subset L(G)$ 是零点的一邻域使得 $\exp: V \longrightarrow \exp V = U$ 是 V 到 $e \in G$ 的某邻域 U 上的同胚. 说 H 是一子流形就意味着可以这样取 V 使 $\exp: V \cap L(H) \longrightarrow U \cap H$ 将 V 的一小片 $V \cap L(H)$ 同胚地映到 $e \in H$ 的邻域 $U \cap H$ 上. 现取 $L(H)$ 在 $L(G)$ 中的一个补空间 P，即 $L(G) = L(H) \oplus P$. 令

$$W = \pi\exp(V \cap P) \subset G/H,$$

则 $\pi\exp: (V \cap P) \longrightarrow W$ 应是同胚. 因为若 $X, X' \in P$ 使 $\overline{\exp(tX)} = \overline{\exp(tX')}$，对某个充分小 t 成立，这就意味着

$$\exp(tX)\exp(-tX') = \exp f(t)$$

是 H 中一条曲线，从而其切向量 Y 在 $L(H)$ 中. 但

$$Y = f'(0) = X - X',$$

所以 $Y \in L(H) \cap P = 0$ 而 $X = X'$. 现在考虑

$$\varphi: W \times H \xrightarrow{(\pi\exp)^{-1}\times 1} (V \cap P) \times H \longrightarrow G,$$
$$(\overline{\exp X}, h) \longmapsto (X, h) \longmapsto (\exp X) h,$$

则前已证明者无非即 φ 为一对一的. 显然 $\mathrm{Im}\varphi = \pi^{-1}(W)$, 所以 (W, φ) 是一局部坐标. 对任意其它点 $\bar{g} \in G/H$, 我们简单地取 $(gW, L_g \circ \varphi \circ L_{g^{-1}} = \varphi_g)$ 即得一局部坐标, L_g 表示 g 左乘于 G 和 G/H 上. 我们再核算一下迁移关系. 故令 $\bar{g}_0 = W \cap gW$, 于是 $\bar{g}_0 = \overline{\exp X} = \overline{g\exp X'}$. 若

$$\varphi(\bar{g}_0, h) = \varphi_g(\bar{g}_0, h'),$$

我们就有

$$(\exp X)h = g\exp(X')h',$$

因此

$$\psi(\bar{g}_0) = \exp(-X)g\exp(X') \in H,$$

而

$$h = \psi(\bar{g}_0)h'$$

正是以 H 作左乘, 这样 $\pi: G \longrightarrow G/H$ 确是纤维丛称为以 H 为群, H 为纤维的齐性空间, 群作用就是左乘. 读者要注意, $\pi\exp: V \cap P \longrightarrow W$ 就是以前用来使 G/H 成为一个流形的局部坐标.

作为一个例子, 考虑内积矢量空间 V, 取一标准正交基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 即可将正交线性变换群 $O(V)$ 与矩阵群 $O(n)$ 等同起来. 令 $H \subset O(V)$ 为 $O(V)$ 中这样一些 a 所成的子群, 这些 a 保持最后 k 个向量 $e_{n-k+1}, \cdots, e_n$ 不动, 所以 $H \simeq O(n-k) \subset O(n)$ 是以下形状的矩阵之群

$$\begin{array}{c} \scriptstyle n-k \\ n-k\begin{pmatrix} A & \vdots & 0 \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & I \end{pmatrix}, \end{array}$$

陪集 aH 是由矢量 $\{ae_{n-k+1}, \cdots, ae_n\}$ 决定的. 它称为 k-**标架**, 即 k 个标准正交向量的有序组. V 中所有 k-标架之空间记作 V_k, 称为第 k Stiefel 流形. 所以我们有以下的丛

$$\begin{array}{ccc} O(V) & \longrightarrow & V_k \\ \| & & \| \\ O(n) & \longrightarrow & O(n)/O(n-k). \end{array}$$

类似地，令 $K\subset O(V)$ 为 $O(V)$ 中所有保持子空间 $\langle e_{n-k+1},\cdots,e_n\rangle$ 不变的 $a\in O(V)$ 之集. 我们有 $H\subset K$，用矩阵表示，K 是由以下形状的矩阵构成的

$$\begin{array}{c} \qquad n-k \\ n-k\begin{pmatrix} A & \vdots & 0 \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & B \end{pmatrix}_k. \\ \qquad\quad k \end{array}$$

因为 $a\in K$ 也一定保持正交补 $\langle e_1,\cdots,e_{n-k}\rangle$ 不变，故 $K\simeq O(n-k)\times O(k)$. 现在陪集 aK 由子空间 $\langle ae_{n-k+1},\cdots,ae_n\rangle$ 决定. V 中所有 k 维子空间的空间记作 GV_k，并称为 Grassmann 流形. 因此我们得到纤维丛

$$\begin{array}{ccc} O(V) & \longrightarrow & GV_k \\ \| & & \| \\ O(n) & \longrightarrow & O(n)/(O(n-k)\times O(k)). \end{array}$$

一般说来，若有群 G 和子群 $H\subset K\subset G$ 时，投影 $G\longrightarrow G/K$ 诱导出投影

$$G/H\longrightarrow G/K.$$

很容易看到，若 G 是一 Lie 群并有闭子群 $H\subset K$ 时. 则如我们刚才对 $G\longrightarrow G/K$ 所作一样，$G/H\longrightarrow G/K$ 也是一个纤维丛而以 K/H 为纤维，群 K 以左乘作用在 K/H 上. 所以我们有纤维丛

$$V_k\longrightarrow GV_k.$$

以后我们会看到，这个丛是很重要的.

§3. 主　丛

前节的讨论中心是一点，即确实描述一个纤维丛的是其构造

群 G 而非纤维 F. 当然，因为纤维丛就是（以底空间 B）参数化的一族某种模型对象，我们就需要一个纤维 F 来刻画那个对象. 但是，丛理论的中心问题是要指出，所给的丛与平凡丛（即乘积 $B\times F\longrightarrow B$）的区别有多大. 换言之，我们需要描述各个局部坐标之间扭曲的程度. 在矢量丛的情况下，自然希望能用一般线性群来描述这种扭曲，因为它是矢量空间构造的自同构群. 对于一般的丛 F，我们没有一个自然地与之相联系的群（F 的一切同胚所成之群 $H(F)$ 可能是一个这样的群，但下面会说明，这里还有问题）. 所以我们要事先指定一个群 G 作为其构造的一部分. 这是 Steenrod 的看法. 任意的可由 G 作用于其上的东西都可以作为纤维. 作用 (G, F) 再加上扭曲即可完全决定这个丛. 本节中我们将给出两种方法来说明这一点，即用上同调的抽象讲法和用主丛的几何讲法.

令 $\pi: E\longrightarrow B$ 是具有局部坐标 $\{U_i, \varphi_i\}$ 的 (G, F) 丛. 我们有扭曲函数（即迁移函数），即对 $b\in U_i\cap U_j$ 的

$$\varphi_{ij}(b)=\varphi_{ib}^{-1}\circ\varphi_{jb}: F\xrightarrow{\varphi_{jb}}E_b\xleftarrow{\varphi_{ib}}F,$$

作为 $b\in U_i\cap U_j$ 的函数它是连续的，即

$$\varphi_{ij}: U_i\cap U_j\longrightarrow G,\quad b\longmapsto\varphi_{ij}(b)$$

为连续. 函数族 $\{\varphi_{ij}\}$ 显然适合下述的上循环条件

(C) 在 $U_i\cap U_j\cap U_k$ 中，有 $\varphi_{ik}=\varphi_{ij}\circ\varphi_{jk}$.

反之，若有一族适合条件 (C) 的函数 $\varphi_{ij}: U_i\cap U_j\longrightarrow G$ 而 G 作用在 F 上，就能作出一个纤维丛 $\pi: E\longrightarrow B$ 使 $\{\varphi_{ij}\}$ 恰好是其迁移函数. 事实上在第二章中构造流形的切丛时我们就已经作了这样一件事. 所以现在只需逐字重复这一程序. 先作分离的并集 (disjoint union)

$$\mathscr{E}=\bigsqcup_i(U_i\times F)=\{(i,b,x)\,|\,b\in U_i, x\in F\}$$

（它不只是一个集，还是一个拓扑空间）. 定义

$$(i,b,x)\sim(j,b',x')$$

为

(1)　$b=b'$（从而 $b\in U_i\cap U_j$），

(2)　$x=\varphi_{ij}(b)x'$。

上循环条件保证了这是一个等价关系．令 $E=\mathscr{E}/\sim$，并定义 $\pi:E\longrightarrow B$ 如下：

$$\pi[i,b,x]=b.$$

同时定义 $\varphi_i:U_i\times F\longrightarrow E$ 为 $\varphi_i(b,x)=[i,b,x]$．这样就行了．

以上的程序给出了一个存在定理，但就具体性而言则所得甚少．完全不清楚 E“看起来”象什么（正是因此，切丛的概念总是不很具体）．它实际上是说，空间 E 本身并不重要，重要的是族 $\{\varphi_{ij}\}$．所以我们来更精确地把这些数据组织起来．设有 B 的一个开覆盖 $\mathscr{U}=\{U_i\}$，今定义 k-上链 φ 为一映射，它对 $\mathscr{U}$ 中任一个 $(k+1)$-元组（U_0，U_1，…，U_k）都给出一个连续函数

$$\varphi(U_0,\cdots,U_k):U_0\cap U_1\cap\cdots\cap U_k\longrightarrow G.$$

记所有 k-上链之集为 $C^k(\mathscr{U},G_C)$（记号 G_C 表示值在 G 中的连续函数）．例如丛的迁移函数

$$\varphi_{ij}=\varphi(U_i,U_j):U_i\cap U_j\longrightarrow G$$

就是一个1-上链，它属于 $C^1(\mathscr{U},G_C)$．给出了这一个1-上链 φ 后，即可定义其上边缘 $\delta\varphi$ 为2-上链

$$\delta\varphi(i,j,k)=\varphi_{jk}\circ\varphi_{ik}^{-1}\circ\varphi_{ij},\tag{1}$$

即是说，对于 $b\in U_i\cap U_j\cap U_k$，

$$\delta\varphi(i,j,k)(b)=\varphi_{jk}(b)\circ\varphi_{ik}^{-1}(b)\circ\varphi_{ij}(b),$$

若 $\delta\varphi=e$ 即 $\delta\varphi(i,j,k)(b)=e$，$e$ 为恒等函数，φ 就称为一个1-上循环．即是

$$\varphi_{ij}^{-1}\circ\varphi_{ik}\circ\varphi_{jk}^{-1}=e$$

或

$$\varphi_{ik}=\varphi_{ij}\circ\varphi_{jk}.$$

这正是前面给出的上循环条件．注意，(1) 就是老的上边缘条件

$$\delta\varphi(i,j,k)=\varphi(i,j)-\varphi(i,k)+\varphi(j,k),$$

不过写成了乘法形式. 但现在次序很重要，因为 G 不一定是可换的. 令 $Z^1(\mathscr{U},G_C)$ 为所有1-上循环之集，而

$$Z^1(B,G_C)=\bigcup Z^1(\mathscr{U},G_C)$$

求并是对一切开覆盖进行的，那么，存在定理无非说明每一个丛都可由 $Z^1(B,G_C)$ 中一个上循环来表示. 两个上循环 φ 和 ψ 可以定义同构的丛. 什么时候会这样呢?令 E 和 E' 为 φ 和 ψ 所定的丛，为简单计，设 φ 和 ψ 对应于同样的开覆盖 $\mathscr{U}$. 回忆一下，若

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\bar{f}} & E' \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & B & \end{array}$$

是一个丛映射（记住，$\bar{f}$ 在 B 上诱导出的 f 是恒等映射），则对每个 U_i 以及 $b\in U_i$，映射

$$\bar{f}_{ib}=\psi_{ib}^{-1}\circ\bar{f}\circ\varphi_{ib}:F\xrightarrow{\varphi_{ib}}E_b\xrightarrow{\bar{f}}E_b'\xleftarrow{\psi_{ib}}F$$

属于 G. 因此，函数集

$$\bar{f}_i:U_i\longrightarrow G,\qquad b\longmapsto\bar{f}_{ib}$$

定义一个0-上链 $\bar{f}\in C^0(\mathscr{U},G_C)$. 对 $b\in U_i\cap U_j$，有

$$\psi_{ib}\circ\bar{f}_{ib}\circ\varphi_{ib}^{-1}=\psi_{jb}\circ\bar{f}_{jb}\circ\varphi_{jb}^{-1},$$

或用迁移函数来表示，即得上边缘条件

$$\psi_{ji}\circ\bar{f}_i=\bar{f}_j\circ\varphi_{ji}. \tag{2}$$

我们称它为上边缘条件是因为，若 G 为可换，定义

$$\delta\bar{f}(i,j)=\bar{f}_j-\bar{f}_i,$$

则（2）式在加法记号中成为

$$\psi-\varphi=\delta f.$$

若 φ 和 ψ 相应于不同的开覆盖 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{V}$，则若条件（2）对某个比 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{V}$ 都细的覆盖 $\mathscr{W}$ 成立，就说 $\varphi\sim\psi$. 易见这是一个等价关系. 我们已经看到，若 E 和 E' 为同构，则 $\varphi\sim\psi$. 反之，若 $\varphi\sim\psi$，则条件（2）保证了，当 $b\in U_i\cap U_j$ 时

$$\bar{f}(b)=\psi_{ib}\bar{f}_{ib}\varphi_{ib}^{-1}=\psi_{jb}\bar{f}_{jb}\varphi_{jb}^{-1}:E_b\longrightarrow E_b'$$

是适当定义的，从而给出一个丛映射 $\hat{f}: E \longrightarrow E'$. 很自然地把商空间 $\mathbf{Z}^1(B,G_C)/\sim$ 称为上同调集，记为 $H^1(B,G_C)$. 它是 B 上所有 (G, F)-丛的集.

当然，因为 G 一般是不可换的，套用上同调的名词只是便于记忆的好玩的把戏. 但它确实帮助弄清楚了，需要的只是群 G. 只要 F 是 G-空间，则除了用作纤维外，不起什么特别作用. 所以 B 上的两个丛 $E \longrightarrow B$, $E' \longrightarrow B$ 只要是属于 $H^1(B,G_C)$ 中的同一类，就应该看作“相同的”丛. 然而，一旦 G 是可换的，把戏就成了真的. 而 $H^1(B,G_C)$ 就确是某种上同调群. 在技巧上，它称为层的上同调. 此外，这种层的上同调在很广泛的条件下就是以前作出的拓扑上同调. 所以，现在一般的形式构造有了实质内容. 最重要的情况是：(1) $G=Z_2$ 为一对合. 这时 $H^1(B,G_C) = H^1(B,Z_2)$. (2) $G = S^1$ 是圆群. 这时，$H^1(B,G_C) = H^2(B,Z)$ 是整系数第二上同调群.

因为可以改变纤维而不影响它在 $H^1(B,G_C)$ 中的类，所以只需要研究一个具有特定纤维的丛就行了. 我们将选 G 本身作为 F，且以 G 中的左乘作为 G 在 $F=G$ 上的作用（为了强调这一点，有时用 (G, G) 记此作用). B 上以 (G, G) 为纤维的丛称为主 G-丛. 为什么这是一个好的选择?看一看已经有过的几个例子. 如果 G 是一 Lie 群，$H \subset G$ 为一闭子群，我们已经看到，左陪集上的 $G \longrightarrow G/H$ 就是一个主 H-丛. 左陪集空间 G/H 是由 G 中引入等价关系：“$g \sim g_1$ 当且仅当 $g^{-1}g_1 \in H$”而得到的. 视 G 为群 H 以右乘作用其上而得的空间，即

$$G \times H \longrightarrow G, \quad (g,h) \longmapsto gh,$$

则当且仅当 $g_1=gh$ 对某个 $h \in H$ 成立. 亦即当且仅当 $g^{-1}g_1 \in H$ 时，g 和 g_1 在同一轨道上. 所以 H 从右方作用于 G 上而以 G/H 为其轨道空间. 此外，因为此作用是群的乘法，它显然是自由的，即由 $gh=g$ 可得 $h=e$.

上述情况可以推广到一切主丛上. 令 $E \longrightarrow B$ 为一主 G-丛. 我

们也可以定义 G 在 E 上的（右）作用：取 $x\in E$，$g\in G$，则有某个局部坐标 $\varphi_i:U_i\times G\longrightarrow E$ 使 $x=\varphi_{ib}(g_0)$．今定义

$$xg=\varphi_{ib}(g_0g).$$

它是适当定义的．因为若对某个 $\varphi_j:U_j\times G\longrightarrow E$ 有 $x=\varphi_{jb}(g_1)$，则由主丛的定义，必对某个 $g'\in G$ 有左平移 $L_{g'}=\varphi_{ib}^{-1}\circ\varphi_{jb}$．所以

$$g_0=\varphi_{ib}^{-1}\circ\varphi_{jb}(g_1)=g'g_1,$$

从而

$$g_0g=g'g_1g.$$

而

$$\varphi_{ib}(g_0g)=\varphi_{ib}(g'g_1g)=\varphi_{ib}\circ\varphi_{ib}^{-1}\circ\varphi_{jb}(g_1g)$$
$$=\varphi_{jb}(g_1g).$$

很清楚，这个作用在 $B=E/G$ 上是自由的．注意，每个坐标映射 φ_i 都是等变的（G 以右乘作用在 $U_i\times G$ 上）．

现在试着走另一条路．设 (E,G) 是 G 在 E 上的自由的右作用，$\pi:E\longrightarrow B=E/G$ 是否主丛？这里有两个问题：是否有局部平凡性？如果有，有多少个群构造？如果 $\pi:E\longrightarrow B$ 有一主 G-丛构造，我们刚才看到，我们可以定义 G 在 E 上的自然的作用．我们自然希望这一作用就是原来的作用（准确些说是等价于原作用）．如果是这样，则此构造中有一局部坐标 $\varphi_i:U_i\times G\longrightarrow E$ 是等变的．这个 φ_i 可由它在 $U_i\times e$ 上的限制来决定，因为

$$\varphi_i(b,g)=\varphi_i(b,eg)=\varphi_i(b,e)g. \tag{3}$$

限制 $\varphi_i|(U_i\times e)$ 当然就是一个截口

$$\rho_i:\ U_i\longrightarrow E.$$

而 (3) 表示，此截口定义了局部坐标 φ_i．此外，由任意两个截口 $\rho_i:U_i\longrightarrow E$，$\rho_j:U_j\longrightarrow E$ 所定义的局部坐标 φ_i，φ_j 自然是相容的．因为，若 $b\in U_i\cap U_j$，由定义 $\rho_i(b)$，$\rho_j(b)$ 在同一轨道中．所以有某个 $g'\in G$ 使

$$\rho_j(b)=\rho_i(b)g'.$$

所以我们有

$$\varphi_j(b,g) = p_j(b)g = p_i(b)g'g = \varphi_i(b,g'g).$$

而 $\varphi_i^{-1}\circ\varphi_{j_b}(g) = g'g$ 确是由左乘 $L_{g'}$ 给出的.

所以，若一自由作用（E, G）有一自然的丛构造 $\pi: E\longrightarrow B$，意即作用（E, G）与丛构造的作用相同，它必由局部截口给出. 所以问题归结为：是否每个自由作用（E, G）都有覆盖 E/G 的一族截口?我们虽然不知道是否恒为这样，有幸的是，在很一般的情况下的确如此. 例如当（E, G）是一紧 Lie 群 G 在流形 E 上的光滑的自由作用时是这样.

若（E, G），（E', G）是自由作用而 $\bar{f}: E\longrightarrow E'$ 是等变映射，则容易看到，

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\bar{f}} & E' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B=E/G & \xrightarrow[f]{} & B'=E'/G \end{array}$$

是丛同态，这里 f 是诱导映射；反之亦然. 这样，B 上的主 G-丛的研究和自由的 G-空间 E（且 $E/G=B$）的研究是一回事. 自由作用的观点之好处在于，这种描述是与坐标无关的，因而讨论起来时常更简单. 举一个例于，下面是改变纤维的直接的作法. 令 $\pi: E\longrightarrow B$ 是主 G-丛，而（G, F）是一 G-空间. 今在乘积空间 $E\times F$ 上定义一作用

$$g(x,y) = (xg^{-1}, gy),$$

记此作用（它是自由的）的轨道空间为 $E\times_G F$（$E\times_G F$ 中的点为 $[x, y]$，故有 $[xg, y] = [x, gy]$）. 于是

$$\rho: E\times_G F\longrightarrow B,\quad [x,y]\longmapsto \pi(x)$$

是适当定义的. 它是一个（G, F）-丛. 若 $\rho_i: U_i\longrightarrow E$ 是一局部截口，则它有一局部坐标

$$\varphi_i: U_i\times F\longrightarrow E\times_G F$$

由

$$\varphi_i(b,y) = [\rho_i(b), y]$$

给出. 由此易见 $\pi: E \longrightarrow B$ 和 $\rho: E\times_G F \longrightarrow B$ 有相同的迁移函数. $E\times_G F$ 这种作法有时也称为"扭曲积".

例 考虑主 $O(n)$-丛 $O(n+1) \longrightarrow O(n+1)/O(n)$. 令 $\{e_1, \cdots, e_{n+1}\}$ 为 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的一个标准正交基. $\mathbf{R}^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ 是由 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 生成的子空间, $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ 是单位球面. 将 $\mathbf{R}^n$ 与 $T_{e_{n+1}}(S^n)$ 等同起来. 记住 $O(n) \subset O(n+1)$ 是 $O(n+1)$ 中适合 $g(e_{n+1}) = e_{n+1}$ 的线性映射 g 所成的子群. 现有映射

$$O(n+1) \longrightarrow S^n, \quad g \longmapsto g(e_{n+1}),$$

它显然是映上. 若 $g(e_{n+1}) = g_1(e_{n+1})$, 则 $g^{-1}g_1(e_{n+1}) = e_{n+1}$, 所以 $g^{-1}g_1 \in O(n)$. 换言之, 我们有

$$O(n+1)/O(n) = S^n.$$

我们有 $O(n)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上的自然作用, 所以可以作出扭曲积 $O(n+1) \times_{O(n)} \mathbf{R}^n \longrightarrow O(n+1)/O(n) = S^n$. 映射

$$O(n+1) \times_{O(n)} \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}, \quad [g, v] \longmapsto gv$$

是适当定义的. 因为 g 保持内积, 故有

$$\langle ge_{n+1}, gv\rangle = \langle e_{n+1}, v\rangle = 0,$$

即矢量 gv 在点 $x = ge_{n+1}$ 处切于 S^n. 换言之, 扭曲积即是切丛 $T(S^n) \longrightarrow S^n$. 但我们从这个作法还是学到了些东西. $T(S^n) \longrightarrow S^n$ 作为矢量丛, 其群是 $GL(n)$. 但上面的作法表明, 它的群可化约为 $O(n) \subset GL(n)$. 这种构造群的化约是很常见的.

也可以用一个几何作法由一个纤维丛作出其主丛, 虽然此法不太直接. 令 $\pi: E \longrightarrow B$ 为一 (G, F)-丛, 映射

$$\alpha: F \longrightarrow E_b$$

称为主映射, 若在此丛的构造中有一局部坐标

$$\varphi_i: U_i \times F \longrightarrow E$$

使 $\alpha = \varphi_{ib}$, $b \in U_i$ 为一点. 对每一个 $b \in B$, 令 $P(b)$ 为所有映入 E_b 的主映射之集. 令 $P = \bigsqcup_b P(b)$ 是一切 $P(b)$ 的分离并. 定义 $\rho: P \longrightarrow B$ 为 $\rho|P(b) = b$. 若 α 为一主映射而 $g \in G$, 则

$$\alpha\tilde{g}: F \xrightarrow{\tilde{g}} E \xrightarrow{\alpha} E_b$$

也是主映射．这样，我们得出了 G 在 P 上的右作用．这个作用是自由的．因为若 $\alpha\tilde{g}=\alpha$，则因 α 是同胚，所以有 $\tilde{g}=\mathrm{id}$．但记住我们恒假设（G，F）为有效的，即是说

$$G \longrightarrow H(F), \quad g \longmapsto \tilde{g}$$

是一对一的．所以有 $g=e$．若对两个主映射 α 和 β 有 $\rho(\alpha)=\rho(\beta)=b$．我们有某个 $g\in G$ 使

$$\alpha^{-1}\beta = \varphi_{ib}^{-1}\varphi_{jb} = \varphi_{ij}(b) = \tilde{g}.$$

所以 $P/G=B$．

除了 P 上还没有拓扑与局部坐标外，现已万事俱备．这两件作法如下．对于 E 上每个局部坐标

$$\varphi_i: U_i \times F \longrightarrow E$$

定义

$$\widetilde{\varphi_i}: U_i \times G \longrightarrow P, \quad (b, g) \longmapsto \varphi_{ib}\tilde{g},$$

P 之拓扑即使一切 $\widetilde{\varphi_i}$ 为连续的最大的拓扑，然后即取 $\widetilde{\varphi_i}$ 为 P 的局部坐标．

例 令 $\pi: E \longrightarrow B$ 为矢量丛．由定义，主映射即是线性映射：

$$\alpha: \mathbb{R}^n \longrightarrow E_b, \quad n = \dim E.$$

令 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个固定基底．于是 α 可由 E_b 中之矢量组 $\{\alpha(e_1), \cdots, \alpha(e_n)\}$ 决定．这一组矢量自然即是 E_b 之一 n-标架．与 E 相关的主丛 $P \longrightarrow B$ 是 n-标架丛．局部坐标 $\widetilde{\varphi_i}$ 就是标架的局部截口．P 的拓扑就是使所有这些截口连续的拓扑．

对于喜欢形式构造的人，迄今我们所作就此而已．对于作用（G，F），令 $\mathscr{B}(B, (G, F))$ 为 B 上的（G，F）-丛之同构类之集，$\mathscr{P}(B, G)$ 为 B 上所有主 G-丛之同构类之集，而 $\mathscr{F}(B, G)$ 为所有适合 $E/G=B$ 的自由 G-空间之等变同构类之集．于是我们有 $\mathscr{P}(B,G)=\mathscr{F}(B,G)$．扭曲积的作法给出映射

$$\mathscr{P}(B,G) \xrightarrow{\alpha} \mathscr{B}(B,(G,F)).$$

主空间的作法给出一映射

$$\mathscr{B}(B,(G,F)) \xrightarrow{\beta} \mathscr{P}(B,G).$$

不难验证 α 与 β 互相为逆，这就直接证明了 $\mathscr{B}(B,(G,F)) \simeq \mathscr{P}(B,G)$. 二者均可视为与 $H^1(B,G_c)$ 等同.

§4. 构造群的改变

若我们已通过事先确定构造群 G 而定义了一个纤维丛，就必须讨论改变群 G 时，丛如何变化. 更明确些说，G 之元（即扭曲映射）$\varphi_{\alpha\beta}$ 虽多，并不意味着丛一定是很复杂的，说不定可以找到一族等价的 $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ 使其值全在某个子群 $H\subset G$ 中：$\psi_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta \longrightarrow H$. 我们已经在球的切丛情况下看到过这一点. 在 $H=\{e\}$ 为平凡子群这一极端的情况下，把 G 归结为 H 自然就意味着此丛是平凡的. 对此问题我们从来都是感兴趣的.

改变构造群的形式作法很容易. 我们可以不只考虑单纯的包含关系 $H\subset G$，而考虑更一般的情况，即一连续同态

$$\alpha: H \longrightarrow G.$$

这时可以定义一个映射

$$\tilde{\alpha}: \mathscr{P}(B,H) \longrightarrow \mathscr{P}(B,G)$$

如下：同态 α 定义了一个 H 在 G 上的左作用

$$h\cdot g = \alpha(h)g.$$

若 $E\longrightarrow B$ 是一个主 H-丛，上述的作用使我们能作出扭曲积 $\tilde{E}=E\times_H G$. 然后我们可以定义 G 在 $\tilde{E}$ 上的右作用如下：

$$[x,g_0]g = [x,g_0g].$$

它是适当定义的. 此作用是自由的. 因为若

$$[x,g_0g] = [x,g_0],$$

则由定义应有 $h\in H$ 使得

$$x = xh^{-1} \quad 且 \quad g_0 g = \alpha(h) g_0.$$

因为 h 在 E 上的作用是自由的，所以 $h=e$，$g_0 g=\alpha(h)g_0=g_0$，从而 $g=e$.

$\tilde{E}=E\times_H G=\bar{\alpha}(E)$ 称为 E 的 α 扩张，E 称为 $\tilde{E}$ 的 α 化约. 当然，每一个丛都可以扩张. 有趣的问题是其逆问题：已给一个 G-丛，它是否必有 α 化约?如果有，有多少?这是一个不容易的问题. 一般地讨论它是一个同伦论的问题. 我们只在此提一个简单情况. 首先回忆一些老定义.

令 $\pi: E \longrightarrow B$ 为一 (G,F)-丛，A 为一任意拓扑空间，$f: A \longrightarrow B$ 为一连续映射. 于是可以定义一个 (G,F)-丛 $\rho: f^*(E) \longrightarrow A$，以及一个同态 $\tilde{f}$：

$$\begin{array}{ccc} f^*(E) & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \rho\downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow[f]{} & B. \end{array}$$

$\tilde{f}$ 覆盖 f 如下，在 $A\times E$ 中，令

$$f^*(E) = \{(a,x) \in A \times E \mid f(a) = \pi(x)\}$$

并定义

$$\rho(a,x) = a, \quad \tilde{f}(a,x) = x,$$

这样上面的图式成为可换的. 为了验证 $f^*(E) \longrightarrow A$ 为一 (G,F)-丛，令 $\{U_i, \varphi_i\}$ 为 E 的局部坐标系. 令 $V_i = f^{-1}(U_i)$ 并定义

$$\hat{\varphi}_i: V_i\times F \longrightarrow f^*(E),\ (a,y) \longmapsto (a, \varphi_i(f(a), y)).$$

易见 $\{V_i, \hat{\varphi}_i\}$ 给 $f^*(E) \longrightarrow A$ 以 (G,F)-丛构造. $f^*(E) \longrightarrow A$ 称为 $E \longrightarrow B$ 在 f 下的拉回.

如果已有一个 (G,F)-丛 $\pi_1: E_1 \longrightarrow A$ 以及同态 f_1：

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f_1} & E \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ A & \xrightarrow{f} & B, \end{array}$$

也可将 $\pi_1: E_1 \longrightarrow A$ 与 f^* （E） 等同起来. 等同映射即

$$E_1 \longrightarrow f^*(E), \quad x_1 \longmapsto (\pi_1(x_1), f_1(x_1)),$$

这样，两个底空间不同的丛的比较多少可以化为底空间相同的丛的比较.

注意，拉回有助于“简化”一个丛. 因为我们可以很容易地算出，$f^*(E)$ 的迁移函数 $\hat{\varphi}_{ij}$正是

$$\hat{\varphi}_{ij} = \varphi_{ij} \circ f: V_i \cap V_j \xrightarrow{f} U_i \cap U_j \xrightarrow{\varphi_{ij}} G.$$

因此，若 f 很简单，例如是常值映射，则不论 φ_{ij}如何复杂，$\hat{\varphi}_{ij}$也是常值映射. 由于此，拉回就与构造群的化约有关.

令 $\pi: E \longrightarrow B$ 为一主 G-丛，$H \subset G$ 为其子群. 于是 H 也自由地作用于 E 上，因此就有一个主 H-丛 $\pi_1: E \longrightarrow E/H = B_1$. 也有诱导映射

$$f: B_1 \longrightarrow B$$

（附带地说，这也是一个纤维丛，纤维是 G/H，G 是左作用，它是与主 G-丛 $E \longrightarrow B$ 相关的丛）.

命题12.1 在上述情况下 $\pi: E \longrightarrow B$ 的拉回 $f^*(E) \longrightarrow B_1$ 有一 H 化约.

$f^*(E) \longrightarrow B_1$ 的 H 化约就是 H-丛 $\pi_1: E \longrightarrow B_1$. 为证明这一点，作 π_1的 G 扩张

$$E \times_H G \longrightarrow B_1,$$

并证明它与 $E \longrightarrow B$ 间有一覆盖 f 的同态，即是

$$\begin{array}{ccc} E \times_H G & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B. \end{array} \qquad [x, y] \longmapsto xy$$

还有一个应该提到的情况. 我们已经看到，切丛 $T(S^n)\longrightarrow S^n$ 有一 $O(n)$ 化约. 事实上对一切矢量丛，只要底空间适合不多的条件，这也总是真的. 令 $\pi:E\longrightarrow B$ 为一实矢量丛. 令

$$A=\{(x,x_1)\in E\times E\mid\pi(x)=\pi(x_1)\}.$$

E 上的内积是一连续函数

$$\langle\ ,\ \rangle:A\longrightarrow\mathbf{R},$$

它在每个 $E_b\times E_b\subset A$ 上的限制即矢量空间 E_b 上的内积. 换言之，矢量丛上的内积即每个纤维上之内积的族，且当纤维变化时它连续变化. 我们知道，矢量丛恒有局部标架. 若 E 有内积，则由 Gram-Schmidt 程序可将它化为标准正交标架. 这就意味着可取局部坐标

$$\varphi_i:U_i\times\mathbf{R}^n\longrightarrow E$$

使对每个 $b\in U_i$，$\varphi_{ib}:\mathbf{R}^n\longrightarrow E_b$ 是正交的（$\mathbf{R}^n$ 事先取好某固定的内积）. 迁移函数 $\varphi_{ij}(b)$ 显然是正交的. 反之，若已取局部坐标系 $\{U_i,\varphi_i\}$，使 $\varphi_{ij}(b)$ 对一切 i，j 均为正交的. 我们也可以用 φ_i 在 $E_i=\pi^{-1}(U_i)$ 上定义内积，而且在 $E_i\cap E_j$ 上，φ_i 与 φ_j 定义的内积相同，这样，在整个 E 上定义了内积. 因此，由群 $GL(n)$ 到 $O(n)$ 的化约问题等价于在 E 上作一内积. 但这是容易的. 用 φ_i 在 E_i 上定义 $\langle\ ,\ \rangle_i$. 作相应于 $\{U_i\}$ 的单位分解 $\{\alpha_i\}$，容易验证

$$\langle\ ,\ \rangle=\sum_i\alpha_i\circ\pi\langle\ ,\ \rangle_i$$

即 E 上的内积. 例如，若 $0=\langle x,x\rangle=\sum_i\alpha_i(b)\langle x,x\rangle_i$，$b=\pi(x)$，因为对一切 i，$\langle x,x\rangle_i\geqslant0$，$\alpha_i(b)\geqslant0$ 且对某个 i，$\alpha_i(b)>0$，必有 $\langle x,x\rangle_i=0$ 对此 i 成立. 从而 $x=0$. 这样化约的存在性得证. 唯一性又如何？且待下面再讲.

$\bar{\alpha}$ 扩张，$\bar{\alpha}:\mathscr{P}(B,H)\longrightarrow\mathscr{P}(B,G)$ 一般地既非一对一的，又非映上. 举一个极端的例子，如果 $\alpha:H\longrightarrow G$ 是平凡同态，$\bar{\alpha}$ 当然把任意丛变为平凡丛. 但甚至对包含映射 $H\subset G$，$\bar{\alpha}$ 也可能不是一对一的. 这是很合理的. 把群扩大意味着有更多的0-上链，所以 H 中两个1-上循环 (φ) 和 (ψ) 尽管在 H 中不一定互为上边缘，在 G

中却可能是.

§5. 万有丛和分类空间

迄今所讲的只是丛理论的一般性的初等部分. 要建立示性类理论, 我们需要关于丛的一些比较深入的事实. 其中最重要的是万有丛 (universal bundle) 的概念. 因为我们对丛还不太熟悉, 所以难得有好的例子来引入它, 这样我们就开门见山吧. 前面说过了, 拉回丛总是比原来的丛"更简单". 我们想问, 已给群 G, 是否有最复杂的主 G-丛 $\pi: E \longrightarrow B$ 使得任意别的 G-丛 $E_1 \longrightarrow A$ 都是 π 通过某映射 $f: A \longrightarrow B$ 的拉回?或者等价于此, 是否能找到一个同态 $F: E_1 \longrightarrow E$?乍看这是一个似乎可笑的命题. 但我们试着来说明它还是有些道理的. 这样一个丛称为**万有** G-**丛**, 其底空间称为 G 的**分类空间** (classifying space).

令 X 为一拓扑空间, $n \geqslant 0$ 为一整数. 如果由 n 维球面 S^n 到 X 的任一连续映射 $f: S^n \longrightarrow X$ 都同伦于常值映射, 就说 $\pi_n(X) = 0$. 令 $f_t: S^n \longrightarrow X$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $f_1 = f$, $f_0 =$ 常值是这样一个同伦, 我们可以把 f 拓展为由球体 D^{n+1} 到 X 的映射 $\hat{f}: D^{n+1} \longrightarrow X$, 即令

$$\hat{f}(tx) = f_t(x), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, x \in S^n.$$

反之, 每一个这样的拓展 $\hat{f}$ 也都通过上式定义一个同伦 f_t. 所以 $\pi_n(X) = 0$ 意味着每个由 S^n 到 X 内的连续映射都可拓展到 D^{n+1} 上. 例如 $\pi_0(X) = 0$ 表示 X 中任意两点都可用一曲线弧连接起来, 即 X 为道路连通. 我们说 X 为 n 连通, 如果对一切 $k \leqslant n$, $\pi_k(X) = 0$. 例如单形逼近定理 (第九章) 指出, n 维球面 S^n 是 $(n-1)$-连通的. 如果对一切 n 都有 $\pi_n(X) = 0$ 就说 X 是**同伦平凡的** (homotopically trivial). 例如, 若 X 是可缩的, 则任一到 X 内的映射 $f: Y \longrightarrow X$ 同伦于一常值, 故对一切 n 有 $\pi_n(X) = 0$. 这个同伦条件的用处从下面的命题很快就可以看清楚:

命题12.2 令 $E \longrightarrow B$ 为一主 G-丛而其全空间 E 是同伦平凡

的，则在一单纯复形（或 CW 复形）B_1上的任一主 G-丛 $\pi: E_1 \longrightarrow B_1$均有一同态 $F: E_1 \longrightarrow E$.

证 如有必要可将 B_1中各单形细分，使之充分小而丛在每个单形上都是平凡的．现在 B_1的骨架上归纳地作出 F．在 B_1^0上，$E_1^0 = \pi^{-1}(B_1^0)$是纤维的离散集．显然可定义 $F: E_1^0 \longrightarrow E$ 而无麻烦．设 $F: E_1^k = \pi^{-1}(B_1^k) \longrightarrow E$ 已作出．若 $\sigma \in B_1^{k+1}$是一 $(k+1)$ -单形，则 $\pi^{-1}(\sigma) \simeq \sigma \times G$，且有等变映射 $F(\partial\sigma): \partial\sigma \times G \longrightarrow E$（同态就是这个意思）．$F(\partial\sigma)$ 于是可由它在 $\partial\sigma \times e$ 上的限制决定．但 $\partial\sigma = S^k$，故由 E 的同伦平凡性，可将它拓展为一映射 $F(\sigma): \sigma \times e \longrightarrow E$．再用 G 作用即可把它拓展到 $\sigma \times G$ 上，即令 $F(\sigma)(x,g) = F(\sigma)(x,e)g$．证毕．

这证明虽然简单，却充分表现了运用主丛的好处．即是，若要作某个等变的东西，开始只需作出一部分，再用群作用将它扩张．

于是，对一切 n 都有 $\pi_n(E) = 0$ 的主丛 $E \longrightarrow B$ 是万有的，至少对于单纯复形上的丛是这样．这个限制通常不成问题，例如对于流形就是如此．

命题12．2有一些显然成立的变种．例如若 E 只对某个有限的 n 是 n 连通的，则它对于 B_1为维数$\leqslant n+1$的复形的丛 $E_1 \longrightarrow B_1$也是万有的．若 $A \subset B_1$而且已有了 $E_1|A$ 上的同态 $F: E_1|A \longrightarrow E$，则 F 可以拓展到整个 E_1上去．这就给出了下面的唯一性定理．

命题12．3 令 $E \longrightarrow B$ 为万有的，$E_1 \longrightarrow B_1$是复形 B_1上的主 G-丛，则任两个同态 F_0，$F_1: E_1 \longrightarrow E$ 可通过同态伦移 $F_t: E_1 \longrightarrow E$ 而同伦．

证 考虑丛 $I \times E_1 \longrightarrow I \times B_1$．所给的同态 F_0和 F_1定义了一个同态 $F: \partial I \times E_1 \longrightarrow E$．把它拓展到 $I \times E_1$上就给出了所求的同伦．

下面举一些例子．

1． 先看最简单的群 $G = Z_2$．我们知道 G 自由地作用在 S^n 上（即 $x \longmapsto -x$），而轨道空间是 RP^n．因 S^n 是 $(n-1)$ -连通的，丛

$S^n \longrightarrow \mathbf{RP}^n$ 是 n 万有的. 要想把 n 推向无穷，可以考虑以下的“望远镜”序列

$$\begin{array}{ccccccccc} S^1 & \subset S^2 & \subset \cdots \subset & S^n & \subset & S^{n+1} & \subset \cdots \subset & S^\infty \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{RP}^1 & \subset \mathbf{RP}^2 & \subset \cdots \subset & \mathbf{RP}^n & \subset & \mathbf{RP}^{n+1} & \subset \cdots \subset & \mathbf{RP}^\infty \end{array}$$

S^∞是某个无穷维矢量空间 H 中的单位球面，$\mathbf{RP}^\infty$仍是它在作用 $x \longmapsto -x$ 下的轨道空间. 可以这样论证：任意映射 $f: S^k \longrightarrow S^\infty$的象都在某个 n 充分大的 S^n 中，所以 S^∞是同伦平凡的. Z_2的分类空间 BZ_2于是就是无穷维实射影空间 $\mathbf{RP}^\infty = S^\infty/Z_2$. 如果我们对讨论极限马虎一点，这也就行了，因为我们实际上需要的也只是对很大的 n 的丛 $S^n \longrightarrow \mathbf{RP}^n$. 这确实是一个很好的丛.

2. 与此完全类似，作用

$$S^{2n+1} \times U(1) \longrightarrow S^{2n+1},$$

$$((z_0, \cdots, z_n), \lambda) \longmapsto (\lambda z_0, \cdots, \lambda z_n)$$

是 $U(1) = S^1$ 的自由作用，且 $S^{2n+1}/S^1 = \mathbf{CP}^n$. 所以 $S^{2n+1} \longrightarrow \mathbf{CP}^n$ 对 S^1是$2n$ 万有的，而 $S^\infty \longrightarrow \mathbf{CP}^\infty$是万有的，$S^\infty$是一无穷维复 Hilbert 空间中的单位球面，而 $\mathbf{CP}^\infty = S^\infty/S^1$.

3. 回想一下，Stiefel 流形和 Grassmann 流形是一纤维丛

$$V_k = O(n)/O(n-k) \longrightarrow O(n)/(O(n-k) \times O(k)) = GV_k,$$

$n = \dim V$，其纤维是 $(O(n-k) \times O(k))/O(n-k) = O(k)$，而群是 $O(n-k) \times O(k)$. 它的第一个因子 $O(n-k)$ 平凡地作用在陪集空间 $O(k) = (O(n-k) \times O(k))/O(n-k)$ 上，所以只有 $O(k)$ 作用在 $O(k)$ 上. 用更技术性的说法，就是从 $V_k \longrightarrow GV_k$ 的群可以化约为 $O(k)$，故得一主 $O(k)$ -丛. 懂一些同伦论的人不难定出 V_k 的连通度是 $n-k-1$. 因此，取 $\dim V = n$ 很大或取一串矢量空间 $V^1 \subset V^2 \subset \cdots \subset V^n \subset \cdots \subset V^\infty$而 $\dim V^\infty = \infty$，即可得一万有 $O(k)$ -丛

$$V_k^\infty \longrightarrow GV_k^\infty.$$

4. 例3还有一些附加的好处. 若 $E \longrightarrow B$ 是一万有 G-丛而 $H \subset G$ 是一子群，则有主 H-丛 $E \longrightarrow E/H$. E 当然还是同伦平凡的，

所以 $E\longrightarrow E/H$ 自然是一万有 H-丛. Lie 群理论中著名的 Peter-Weyl 定理指出，任意紧 Lie 群 G 都可嵌入到某个正交群 $O(k)$ 中. 这样，至少我们对一切紧 Lie 群知道了有万有丛存在.

§6. 覆盖同伦性质

令 $EG\longrightarrow BG$ 为一万有 G-丛，则对任一主 G-丛 $E\longrightarrow B$，有同态 $F:E\longrightarrow EG$ 以及诱导映射 $f:B\longrightarrow BG$. 因为 F 直到同伦是唯一的，f 也是一样. 令 $[B, BG]$ 记由 B 到 BG 的一切映射之同伦类的集. 我们于是有对应关系

$$\mathscr{P}(B,G)\longrightarrow [B,BG].$$

拉回的作法表明，它是映上. 是否一对一的问题即是：若 f_0, f_1: $B\longrightarrow BG$ 作为映射是同伦的，则 $f_0^*(EG)$, $f_1^*(EG)$ 作为丛是否同构的. 令人吃惊的是，答案是肯定的. 因此，分类映射 f（或其同伦类）确实将丛分了类. 还有，若 $E'G\longrightarrow B'G$ 是另一万有 G-丛，于是有分类映射 $f:BG\longrightarrow B'G$ 与 $g:B'G\longrightarrow BG$. 由唯一性，fg 与 gf 必同伦于恒等映射. 故分类空间直到伦型为唯一的. 特别是，上同调 $H^*(BG)$（任意系数）直到同构是唯一的.

现在从下述情况开始，令 $\pi:E\longrightarrow B$ 为一 (G, F)-丛，(X, A) 为一个对（即 $A\subset X$ 为其子空间）. 设有映射 $\hat{F}:X\longrightarrow B$，与一映射 $\tilde{f}:A\longrightarrow E$ 使得 $\pi\circ\tilde{f}=\hat{F}|A$，是否可能把 $\tilde{f}$ 拓展到 X 上成 $\tilde{F}$: $X\longrightarrow E$，使 $\pi\circ\tilde{F}=\hat{F}$? 我们称 $\tilde{f}$ 为 $\hat{F}$ 的**部分提升**(partial lifting). 我们的问题就是：部分提升是否恒可拓展为完全提升. 甚至在 E 为平凡丛这一最简单情况，这也不一定可能. 但我们仍先考查这一情况以便弄清问题何在. 若 $E=B\times F$，则 $\tilde{f}:A\longrightarrow B\times F$ 是由一对映射 $\tilde{f}=(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ 构成，$\tilde{f}_1:A\longrightarrow B$, $\tilde{f}_2:A\longrightarrow F$，但 $\tilde{f}_1=\pi\circ\tilde{f}$ 从而 $\tilde{f}_1=\hat{F}|A$ 是由 $\hat{F}$ 决定的. 同样地，$\hat{F}$ 的提升 $\tilde{F}:X\longrightarrow E=B\times F$ 也只是一个对 $(\tilde{F}_1,\tilde{F}_2)$, $\tilde{F}_1:X\longrightarrow B$, $\tilde{F}_2:X\longrightarrow F$ 且 $\tilde{F}_1=\pi\circ\tilde{F}=\hat{F}$. 这样，我们的问题就是：已给一个对 (X, A) 与一映射 $\tilde{f}_2:A\longrightarrow F$,

可否将它拓展为映射 $\tilde{F}_2: X \longrightarrow F$？当然不一定行. 但在特例情况下，例如 $A \subset X$ 为其收缩核，拓展没有困难. 我们将用此来证明以下的

覆盖同伦性质（CHP） 令 $\pi: E \longrightarrow B$ 为一纤维丛（纤维 F 与群 G 均为任意的），X 为一单纯复形，$\tilde{f}_0: X \longrightarrow E$ 为一映射，$f_t: X \longrightarrow B$ 是 $f_0 = \pi \circ \tilde{f}_0$ 之伦移. 于是必有 $\tilde{f}_0$ 之伦移 $\tilde{f}_t: X \longrightarrow E$ 覆盖 f_t，即 $f_t = \pi \circ \tilde{f}_t$.

证 先重分 X 使对重分后的每个单形 σ，$\Phi(\sigma \times I)$（$\Phi: X \times I \longrightarrow B$，即伦移 f_t）均位于一局部坐标中. 现在 X 的骨架上归纳地作出 $\tilde{\Phi}$. 对一顶点 v，有一映射 $\Phi: \{v\} \times I \longrightarrow B$，有一部分提升 $\tilde{f}_0: \{v\} \times \{0\} \longrightarrow E$. $\{v\} \times \{0\} \subset \{v\} \times I$ 是一收缩，而 $E|\Phi(\{v\} \times I)$ 上是平凡的. 因此，由前面的讨论，$\tilde{f}_0$ 可拓展为 $\tilde{\Phi}: \{v\} \times I \longrightarrow E$. 设已在 $X^k \times I$ 上作出了 $\tilde{\Phi}$. 对 $(k+1)$-单形 σ，已有一映射 $\sigma \times I \longrightarrow B$ 以及在 $(\sigma \times \{0\}) \cup (\partial\sigma \times I)$ 上的到 E 的部分提升，即 $\tilde{f}_0: \sigma \times \{0\} \longrightarrow E$ 和才作出的 $\tilde{\Phi}: \partial\sigma \times I \longrightarrow E$. 因为 E 是平凡的而 $(\sigma \times \{0\}) \cup (\partial\sigma \times I) \subset \sigma \times I$ 是一收缩核（由下图即可看出证明），故得拓展 $\tilde{\Phi}: \sigma \times I \longrightarrow E$. 由 * 的投影表明 $(\sigma \times \{0\}) \cup (\partial\sigma \times I) \subset \sigma \times I$ 是一个强形变收缩核.

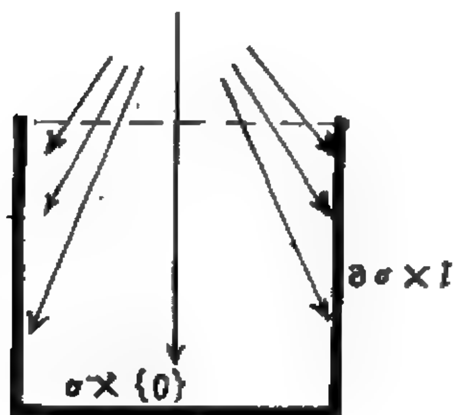


图 12—1

覆盖同伦性质（covering homotopy property，简记为 CHP）可以精确化为"相对"形式. 若 $A \subset X$ 为一子复形，而且已有 $\tilde{f}_0|A$ 的覆盖 $f_t|A$ 的部分同伦 $\tilde{f}_t|A: A \longrightarrow E$，则上面作出的完全的同伦 $\tilde{f}_t: X \longrightarrow E$ 可以作成为 $\tilde{f}_t|A$ 的拓展. 我们只需从 A 以外的单形与 A 的并按 A 以外单形的维数的增长顺序作归纳. 用相对形式的 CHP，可以证明

命题12.4 令 $\pi: E \longrightarrow B$ 为一 (G, F)-丛，(X, A) 为一复形偶，而 $A \subset X$ 是 X 的强形变收缩核．若映射 $\tilde{f}: A \longrightarrow E$ 与 $F: X \longrightarrow B$ 适合 $\pi \circ \tilde{f} = F|A$，则 F 有一提升 $\tilde{F}: X \longrightarrow E$ 拓展了 $\tilde{f}$．即 $\tilde{F}|A = \tilde{f}$，而 $\pi \circ \tilde{F} = F$．

证 令 $K: X \times I \longrightarrow X$ 为一同伦且 $K_0 = \mathrm{id}, K_1(X) \subset A$ 而 $K_t|A = \mathrm{id}$（此即强形变收缩的定义）．于是有

(1) 映射 $\tilde{f} \circ K_1: X \longrightarrow E$.

(2) $\pi \circ \tilde{f} \circ K_1 = F \circ K_1$的伦移 $F \circ K_t: X \longrightarrow B$.

(3) $\tilde{f} \circ K_1$在 A 上的伦移 $\tilde{f} \circ (K_t|A): A \longrightarrow E$.

由 CHP，有 $\tilde{f} \circ K_1$的覆盖 $F \circ K_t$ 并拓展 $\tilde{f} \circ (K_t|A)$ 的伦移 $\tilde{F}_t: X \longrightarrow E$. 考虑映射 $\tilde{F}_0: X \longrightarrow E$，则因有 $K_0 = \mathrm{id}$，我们有 $\pi \circ \tilde{F}_0 = F \circ K_0 = F$. 在 A 上则有 $\tilde{F}_0|A = \tilde{f} \circ (K_0|A) = \tilde{f}, F_0$ 即为所需的 $\tilde{F}$.

现在可以证明主要定理了．

主要定理 令 $\pi: E \longrightarrow B$ 为一 (G, F)-丛，$f_0, f_1: X \longrightarrow B$ 为同伦的映射：$f_0 \sim f_1$，则拉回丛 $f_0^*(E)$ 与 $f_1^*(E)$ 是同构的．

证 为应用命题12.4，要使用一个很类似于构造主丛的作法．令 E^0，E^1是 X 上的两个 (G,F)-丛．对每一点 $x \in X$，称同胚 $\alpha: E_x^0 \longrightarrow E_x^1$ 为主映射，若对 E^0的任一含 x 的局部坐标 (U, φ) 和 E^1的含 x 的局部坐标 (V, ψ)，同胚

$$\psi_x^{-1} \circ \alpha \circ \varphi_x: F \xrightarrow{\varphi_x} E_x^0 \xrightarrow{\alpha} E_x^1 \xleftarrow{\psi_x} F$$

属于 G. 令 $\mathscr{H}_x = \{\alpha | E_x^0 \longrightarrow E_x^1\}$ 为所有主映射之集，$\mathscr{H} = \bigcup_x \mathscr{H}_x$，$\mathscr{H} \longrightarrow X$ 是映 $\mathscr{H}_x$ 为 x 的投影．我们应该得到一个丛．它确实是一个 X 上的主 G-丛．为简单起见，取 E^0与 E^1的具有相同覆盖 $\{U_i\}$ 的局部坐标系 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ 和 $\{(V_i, \psi_i)\}$．对每个 U_i，

$$f_i: \quad U_i \times G \longrightarrow \mathscr{H}, \quad (x, g) \longmapsto \psi_{ix} \circ \tilde{g} \circ \varphi_{ix}^{-1}$$

定义了 $\mathscr{H}$ 的一个局部坐标系．和前面一样，它给 $\mathscr{H}$ 一个拓扑并使 $\mathscr{H} \longrightarrow X$ 为一 G-丛（若取 $E^0 = X \times F$，即得主丛）．

这样作的理由在于．若 $\rho: X \longrightarrow \mathscr{H}$ 为一截口，则对每个 $x \in$

X 有主映射 $\rho(x): E_x^0 \longrightarrow E_x^1$. 这恰好表示，由 $\tilde{\rho}|E_x^0 = \rho(x)$ 所给出的映射 $\tilde{\rho}: E^0 \longrightarrow E^1$ 是一个丛映射. 这样，使用 $\mathscr{H}$，即可将丛映射问题化为截口问题.

令 $F: X \times I \longrightarrow B$ 为 f_0 与 f_1 的同伦. 令 $E^0 = f_0^*(E) \times I, E^1 = F^*(E)$. E^0 和 E^1 都是 $X \times I$ 上的 (G, F)-丛. 在 $X \times \{0\} \subset X \times I$ 上，我们有 $E^0|(X \times \{0\}) = f_0^*(E) \times \{0\}, E^1|(X \times \{0\}) = F_0^*(E) = f_0^*(E) \times \{0\}$，二者为同构. 这就是说，若作丛 $\mathscr{H} = \mathscr{H}(E^0, E^1)$，我们有一截口 $\rho: X \times \{0\} \longrightarrow \mathscr{H}$. 图式

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{\ \rho\ } & \mathscr{H} \\ \cap & & \downarrow \\ X \times I & \xrightarrow[\text{id}]{} & X \times I \end{array}$$

表明，我们可以使用命题12.4. 因为 $X \times \{0\} \subset X \times I$ 确实是强形变收缩核，ρ 可以拓展为整个 $X \times I$ 上的截口，即 $F^*(E) \simeq f_0^*(E) \times I$ 为一同构. 特别是 $f_1^*(E) = F^*(E)|(X \times \{1\}) \simeq f_0^*(E) \times \{1\} = f_0^*(E)$ 为同构.

很清楚，同伦定理在理论上很重要. 但它也是一个很实用的定理. 例如由此定理可知，可缩 (contractible) 空间上的任意丛必为平凡的. 为了看一下这有什么好处，考虑 n 维球面上的一个 (G, F)-丛 $E \longrightarrow S^n$. $S^n = D_+^n \cup D_-^n$ 分成两半球而均为可缩的，所以只需两个局部坐标

$$\varphi_+: \quad D_+ \times F \longrightarrow E, \qquad \varphi_-: \quad D_- \times F \longrightarrow E$$

以及一个扭曲映射 $\varphi: D_+ \cap D_- = S^{n-1} \longrightarrow G$ 即可描述 E. 此外，E 可由同伦类 $[\varphi] \in [S^{n-1}, G]$ 决定. 因为 G 是群，逐点乘法也将使 $[S^{n-1}, G]$ 成群. 这就是前面定义连通度时提到的第 $(n-1)$ 同伦群 $\pi_{n-1}(G)$. 这样我们对 $\mathscr{P}(S^{n-1}, G) = \pi_{n-1}(G)$ 有了一种新说法. 计算 $\pi_{n-1}(G)$ 将对球面上的丛给出具体得多的知识. 例如，若 G 是有限的或离散的，则显然对 $k>0$ 有 $\pi_k(G) = 0$ 而 $\pi_0(G) = G$. 所以当 $n \geqslant 2$ 时，在 S^n 上没有非平凡的覆盖空间，若 $G = O(n)$，则

知当 n 为偶时 $\pi_{n-1}(O(n))=Z$. 这个群的生成元可能是切丛 $T(S^n)\longrightarrow S^n$ 吗?答案为否. 由于 Euler 示性数 $\chi(S^n)=2$, $T(S^n)$ 是双倍生成元.

还有一个问题待解决. CHP 可以看成是关于提升的唯一性定理. 若 $f:X\longrightarrow B$ 有一提升 $\tilde{f}:X\longrightarrow E$ 而 $g\sim f$ 同伦于 f, 则 g 也有提升(实际上 f 与 g 间的整个伦移 f_t 都可提升). 但什么时候 f 才有提升 $\tilde{f}$ 呢?我们可以如前面那样一步一步地来作这个提升,再看什么时候会遇到困难. 在0-骨架 X^0上定义 $\tilde{f}$ 显然不会有困难. 设已在 X^k 上定义了 $\tilde{f}$ 而 σ 是一 $(k+1)$ -单形. 当然, 从一开始就应设在 $f(\sigma)$ 上 E 是平凡的, 于是 $\tilde{f}|\partial\sigma:\partial\sigma\longrightarrow E|\partial\sigma=f(\partial\sigma)\times F$ 的形状是

$$\tilde{f}(x)=(f(x),f_1(x)),$$

这里 $f_1:\partial\sigma\longrightarrow F$. 若 $\pi_k(F)=0$, 则 f_1可拓展到 σ 上而 $\tilde{f}$ 也可拓展到 σ 上. 所以, 拓展的障碍在于纤维的同伦群 $\pi_k(F)$. (因此, 提升是否存在并非丛的问题,而是与纤维 F 有关的几何问题.) 于是有

提升定理 若 $\pi:E\longrightarrow B$ 是一 (G,F) -丛, 其纤维 F 为同伦平凡, 则任意映射 $f:X\longrightarrow B$ 均可提升为 $\tilde{f}:X\longrightarrow E$, 而且 f 的任意两个提升都是互相同伦的.

这个定理是关于群的化约的. 令 $EG\longrightarrow BG$ 为一万有 G-丛, $H\subset G$ 为 G 的子群. 正如我们已经看到的, 将会有下面的情况:

$$\begin{array}{ccc} EG & & \\ & \searrow^{\pi'} & \\ \pi\downarrow & \swarrow_{\rho} & EG/H=BH. \\ BG & & \end{array}$$

ρ 定义了空间 BH 上的主 G-丛. 如果检查一下以前所说, 将会看到, ρ 表示主 H-丛 $EG\longrightarrow BH$ 的 G-扩张. 所以, 若 $E\longrightarrow B$ 是一主 G-丛, 其分类映射为 $f:B\longrightarrow BG$:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & EG \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow[f]{} & BG, \end{array}$$

要问从 $E \longrightarrow B$ 是否有一 H-化约，就是问 $f: B \longrightarrow BG$ 是否可提升为 $\tilde{f}: B \longrightarrow BH$：

$$\begin{array}{ccc} & & BH \\ & \tilde{f}\nearrow & \downarrow \rho \\ B & \xrightarrow[f]{} & BG. \end{array}$$

我们已经说过，$\rho: BH \longrightarrow BG$ 是以 G/H 为纤维的 G-丛，故若 G/H 是同伦平凡的，则 $E \longrightarrow B$ 有唯一的到 H 的化约.

前面在第九章中我们已看到 Gram-Schmidt 正交化手续可以解释为说明正交群 $O(n)$ 是一般线性群 $GL(n)$ 的形变收缩核. 而这就意味着 $GL(n)/O(n)$ 为同伦平凡. 因此，每个矢量丛都有唯一的 $O(n)$ 化约. 我们在 § 4中已看到，通过在矢量丛上作内积得知化约的存在. 这里的同伦定理则补足了唯一性. 有一点需要注意，在矢量丛 $E \longrightarrow B$ 上当然可以有许多内积. 每一个内积定义 E 上一个 $O(n)$ -丛构造. 我们这里所说的就是：不论用什么内积，这些构造都是同构的. 如果关心的是内积本身，这当然就完全是另一回事了. 每个几何学家都知道，在流形 M 的切丛 $T(M)$ 上给出一特定的内积，就在 M 上定义了一个 Riemann 几何，而不同的内积(可能)给出不同的几何，但是作为 $O(n)$ -丛，它们却都是一样的.

§ 7. 杂　记

在定义 (G, F) -丛时，我们要求作用 (G, F) 是有效的. 这使得我们可以说：迁移函数 $\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta$ 是 G 的元. 但有许多很自然的例子并不适合这一要求. 例如，若 $E \longrightarrow B$ 是一主 G-丛而 $H \subset G$ 为

一子群，则有丛 $E/H \longrightarrow B$ 以 G/H 为纤维而 G 以左乘作用于其上．这一作用时常并非有效．有两种方法来处理这问题．回忆一下，对每个作用 (G, F)，子群

$$N = \{g \in G| \quad gx = x \text{对一切} x \in F \text{成立}\} = \bigcap G_x$$

称为非有效核．它表示浪费的程度．容易看到，$N \subset G$ 是一正规子群而有 G/N 在 F 上的诱导作用，而它则是有效的．我们不来看 (G, F)-丛而来看 $(G/N, F)$-丛．我们也可以修改定义而将相容性条件改为：对任意 (i, j)，有一连续函数

$$\varphi_{i,j}: U_i \cap U_j \longrightarrow G$$

使对每一点 $b \in U_i \cap U_j$，

$$\varphi_{ib}^{-1} \circ \varphi_{jb} = \varphi_{ij}(b).$$

换言之，每个 $\varphi_{ib}^{-1} \circ \varphi_{jb}$ 仍是一个作用 $\bar{g}$（相应于某个 $g \in G$），且可连续地选择 g．如果我们这样做，有些事就必须改变．例如，我们仍有扭曲积运算

$$\alpha: \mathscr{P}(B, G) \longrightarrow \mathscr{B}(B, (G, F))$$

但没有其逆．事实上，α 将不再是一对一的（虽然仍为映上）．不论如何，若 G 平凡地作用在 F 上，显然任意 (G, F)-丛均为平凡的．

因为每个作用 (G, F) 都把 G 嵌入到同胚群 $H(F)$ 中，能不能就使用这个最大的群 $H(F)$ 作为构造群呢?不幸的是，在 $H(F)$ 中并没有一个典则的拓扑使之成为作用在 F 的拓扑群，所以最终还是放弃了这一方法而采用了现在的由 Steenrod 提出的方法．

对于自由作用 (E, G)，局部截口问题有一个广泛而一般的正面答案称为切片定理 (slice theorem)．它的来源可以追溯到 Lie 群在流形 M 上的光滑作用这一特例．最容易的讲法是用一点 Riemann 几何．固定一点 x，并在 $T_x(M)$ 中考虑正交于轨道 $G(x)$ 的子空间 $N \subset T_x(M)$．对于 $v \in N$，令 $a(t, v)$ 为过 x 的以 v 为初始方向的测地线．一切终点 $a(1, v)$ 构成一集 $S_x \subset M$ 称为在 x 处的切片．若 v 充分小，$v \longmapsto a(1, v)$（即指数映射 exp）是一对一的．若 G 是

紧的，则在 $x\neq gx$ 时恒可使 S_x 与 S_{gx}分离．由此可知，对于自由作用 $\pi:S_x\longrightarrow M/G$ 是一对一的，故其逆是一局部截口．顺便提到，子流形的管状邻域（第十一章）就是这样作的．

$H^1(B,G_C)$ 已作出来了，所以当 G 为可换时就可以利用层的上同调的一般理论了．这时 G_C 在技术上称为 G 上的连续（constant）函数之芽层．例如，设 $G=S^1$，则有正合序列

$$0\longrightarrow \mathbf{Z}\longrightarrow \mathbf{R}\longrightarrow S^1\longrightarrow 0,$$

$\mathbf{R}$ 为实数集，$\mathbf{Z}\subset\mathbf{R}$ 为整数集．我们又有长正合序列

$$H^1(B,\mathbf{R}_C)\longrightarrow H^1(B,S^1)\longrightarrow H^2(B,\mathbf{Z}_C)\longrightarrow H^2(B,\mathbf{R}_C).$$

但众所周知，$\mathbf{R}_C$ 是一强层（fine sheaf），即对一切 $k>0$，$H^k(B,\mathbf{R}_C)=0$．就给出了§3所提到的等同关系

$$H^1(B,S^1)\longrightarrow H^2(B,\mathbf{Z}_C)=H^2(B,\mathbf{Z}).$$

同伦平凡性概念使得逐步构造出由一单纯复形到一空间中的连续函数十分容易．当全空间为同伦平凡时证明万有性以及当纤维为同伦平凡时证明提升的存在时，我们都用到了这一点．为此当然要付出代价，即必须限于某一类空间，即单纯复形．但是可以把空间的类相当地扩大，即扩大为与单纯复形有相同伦形的空间．为使思路简单而又前后一贯，我们只对单纯复形证明了 CHP，但事实上，对广泛得多的空间它仍成立．是 J. -P. Serre 第一个看出了 CHP 的重要性．为了解释这一点，我们稍稍涉足于同伦理论．我们已看到由 S^n 到一群 G 的同伦类之集可以作成一个群．事实上，集 $[S^n, X]$（更准确些说，具有固定基点的映射）恒可作成 X 的第 n 同伦群 $\pi_n(X)$．函子 π_* 在很多方面很象同调函子 H_*．例如对于诱导同态有同伦性质，对子空间偶则有长正合序列．但在一个至关紧要之点它却与 H_* 完全不同，即它没有 Meyer-Vietoris 序列．这就大大减少了 π_* 的可计算性．例如，由 π_*(圆盘) $=0$ 可得 H_*(圆盘) $=0$，由此再用 Meyer-Vietoris 序列即可算出 $H_*(S^n)$．但 $\pi_*(S^n)$ 直到今天仍未定出，仍属不甚了然，而且很快解决这一问题的希望也不大．π_* 的最有用的计算性质来自 CHP 如

下：令 $E \longrightarrow B$ 为一丛，其纤维为 $F=E_b\subset E$. 对于对 (E, F) 有正合序列

$$\cdots \longrightarrow \pi_i(F) \longrightarrow \pi_i(E) \longrightarrow \pi_i(E,F) \longrightarrow \pi_{i-1}(F) \longrightarrow \cdots,$$

不难看到 CHP 蕴涵着 $\pi_i(E,F) = \pi_i(B)$，故有正合序列

$$\cdots \longrightarrow \pi_i(F) \longrightarrow \pi_i(E) \longrightarrow \pi_i(B) \longrightarrow \pi_{i-1}(F) \longrightarrow \cdots$$

把 E, F 和 B 连接起来（对于 H_* 决然不行. 不妨以纤维为 S^1 的丛 $S^{2n+1} \longrightarrow \mathbf{CP}^n$ 为例）. 作为其应用，考虑丛

$$\begin{array}{ccc} O(n) & & \\ & \searrow & O(n)/O(n-2) = V_{n,2} \\ \downarrow & \swarrow & O(n-1)/O(n-2) = S^{n-2}, \\ S^{n-1} = O(n)/O(n-1) & & \end{array}$$

我们有

$$\cdots \longrightarrow \pi_i(S^{n-2}) \longrightarrow \pi_i(V_{n,2}) \longrightarrow \pi_i(S^{n-1}) \longrightarrow \cdots,$$

这就给出

$$\pi_i(V_{n,2}) = 0, \qquad 于 i \leqslant n-3 时.$$

事实上，我们就是这样很容易地证明了 $V_{n,k}$ 为 $(n-k-1)$-连通的. 我们也可这样证明 $GL(n)/O(n)$ 为同伦平凡的.

所以，更仔细地考查 CHP 是很重要的. 我们已经说到，定义域空间 X 不必是复形. 但更值得注意的是构造群根本用不上，即只需用局部平凡性而不必去管它们是怎样连接起来的. Serre 注意到，有一些重要的例子，CHP 成立但没有局部平凡性. 因此他把纤维化概念公理化为任意满足 CHP 的 $\pi: E \longrightarrow B$.

最后还有一点技术性的小事. 我们已看到，可缩空间是同伦平凡的. 下面是一个容易的练习：用逐步扩张证明当 X 为单纯复形时，其逆亦真. 因此，对万有 G-丛 $EG \longrightarrow EB$, EG 为可缩的. 同伦序列于是给出 $\pi_i(BG) = \pi_{i-1}(G)$.

参 考 文 献

［1］ *Séminar H. Cartan*, 1949—1950.

[2] Hirzebruch, F., *Topological Methods in Algebraic Geometry*, 3rd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[3] Spanier, E., *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.

[4] Steenrod, N. E., *Topology of Fibre Bundles*, Princeton Math. Series, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1951.

第十三章　示　性　类

以前一章为基础，我们现在很容易自然地给出示性类的定义．令 G 为一群，$EG \longrightarrow BG$ 为万有 G-丛，对任意主 G-丛 $E \longrightarrow B$ 均有丛同态 $\bar{f}$：

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\bar{f}} & EG \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{f} & BG \end{array}$$

而 $f: B \longrightarrow BG$ 为分类映射．这样，对于上同调也有诱导的同态

$$f^*: H^*(BG) \longrightarrow H^*(B).$$

子代数 $\mathrm{Im}f^* \subset H^*(B)$ 中之元称为 G-丛 $E \longrightarrow B$ 的**示性类**(characteristic class)．因为 f 就同伦而言是唯一的，BG 就伦型也是唯一的，$\mathrm{Im}f^*$ 是适当定义的．这样做是很自然的．为了理解丛 $E \longrightarrow B$，唯一需要的就是分类映射 f，所以通过 f^* 由 $H^*(BG)$ 带过去的上同调类也与丛有关．换句同义语来说，$H^*(BG)$ 之元称为（万有丛的）万有示性类．若 $E \longrightarrow B$ 为一 (G, F)-丛，则定义其示性类为与之相关的主 G-丛 $E \longrightarrow B$ 的示性类．我们也可以作 BG 上的万有 (G, F)-丛 $EG \times_G F \longrightarrow BG$，并且用 $\bar{E} \longrightarrow B$ 的分类映射，它恰是与对 $E \longrightarrow B$ 分类的 $f: B \longrightarrow BG$ 相同．所以，两种方法给出的结果相同．

给出一万有示性类 $\alpha \in H^*(BG)$，则对丛 $E \longrightarrow B$ 的分类映射 f 给出一对应关系 $(E \longrightarrow B) \longmapsto f^*(\alpha) \in H^*(B)$，这种对应是函子的．因若 $E_1 \longrightarrow B_1$ 也是丛，且有同态

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_1 & \xrightarrow[\varphi]{} & B, \end{array}$$

则 $f\circ\varphi: B_1\longrightarrow BG$ 是 $E_1\longrightarrow B_1$ 的分类映射，所以 $\varphi^*(f^*(a))$ 是 $E_1\longrightarrow B_1$ 的示性类. 为了更清楚一些，用字母 ξ, η 等记丛，$\alpha(\xi)$，$\alpha(\eta)$ 等记 ξ, η 的对应于万有类 α 的示性类. 故若 $\xi=(E\longrightarrow B)$，$\eta=(E_1\longrightarrow B_1)$，则 $\eta=\varphi^*(\xi)$ 是 ξ 用 φ 的拉回. α 的函子性质就是指

$$\alpha(\varphi^*(\xi))=\varphi^*(\alpha(\xi)).$$

示性类之有用正是基于其函子性质. 它以上同调的对象来表征丛为相同的必要条件.

反之，任一具有函子性质的对应关系

$$\alpha: \xi\longmapsto\alpha(\xi)\in H^*(B(\xi))$$

都是示性类. 相应的万有类即 α（万有丛）$\in H^*(BG)$. 这种观点有时是有用的. 例如，我们知道每一个 n 维矢量丛 $\xi: E\longrightarrow B$ 均有 Euler 示性类 $\chi(\xi)\in H^n(B;Z_2)$（见第十章）. 回忆其定义，先取 Thom 示性类 $U\in H^n(E,\dot{E};Z_2)$，用包含映射 $E\longrightarrow(E,\dot{E})$ 将它映入 $H^n(E;Z_2)$；再用同构 $H^n(E)\xleftarrow{\sim}H^n(B)$ 将它映入 $H^n(B;Z_2)$. 这些步骤都是函子的，所以

$$\xi\longmapsto\chi(\xi)$$

是万有 Euler 类 $\chi\in H^n(BGL(n);Z_2)$ 的一个示性类.

在展开较深入的理论之前，我们先详细地决定一个特例.

§1. 圆群 $G=S^1$ 和对合 $G=Z_2$ 的示性类

圆群 $G=S^1$ 的示性类很容易决定，因为我们恰好知道它的分类空间 BS^1 和上同调. 回忆起对有限的 $k=2n$, $S^{2n+1}\longrightarrow\mathbf{CP}^n$ 是 k-万

有的. 我们知道

$$H^*(\mathbf{CP}^n) = Z[t]/(t^{n+1}).$$

这里用的是整系数上同调，而 $t \in H^2(\mathbf{CP}^n)$ 是群 $H^2(\mathbf{CP}^n;Z) = Z$ 的固定生成元. 暂用 t_n 记 t. 于是包含映射 $i: \mathbf{CP}^n \longrightarrow \mathbf{CP}^{n+1}$ 映 t_{n+1} 为 $i^*(t_{n+1}) = \pm t_n$，因为 i^* 是 H^2 上的同构. 这样退回一步到 $\mathbf{CP}^{n+1}$，有 $(t_{n+1})^{n+2}=0$，即 t_{n+1} 可生存得长一些. 回忆到

$$BS^1 = \mathbf{CP}^\infty$$

是 $\mathbf{CP}^1 \subset \mathbf{CP}^2 \subset \cdots \subset \mathbf{CP}^n \subset \cdots \subset \mathbf{CP}^\infty$ 的极限，很清楚，$(t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots)$ 将产生 $H^2(\mathbf{CP}^\infty)$ 的一个决不消逝的生成元，即

$$H^*(\mathbf{CP}^\infty; Z) \doteq Z[t]$$

是具有一个生成元 $t \in H^2(\mathbf{CP}^\infty)$ 的多项式代数.

因此很清楚，只需讨论一个万有的 S^1 示性类即可，此即生成元 $t \in H^2(\mathbf{CP}^\infty)$. 所以我们以后凡说 S^1-丛的示性类即指此类.

现在作一些计算. 因为 S^1 按标量乘法自然地作用在一维复矢量空间 $\mathbf{C}$ 上（左、右乘均可）. 我们已定义了 $(S^1, \mathbf{C})$-丛（即复线丛）的示性类. 第一个这种线丛自然是万有线丛 $\gamma: S^\infty \times_{S^1} \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{CP}^\infty$ 或有限的 $\gamma: S^{2n+1} \times_{S^1} \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{CP}^n$. 另一方面，想到在第三章中还有所谓典则线丛 $\pi: E \longrightarrow \mathbf{CP}^{2n}$，即

$$E = \{([x], u) \mid \ [x] \in \mathbf{CP}^n, u \in \mathbf{C}^{n+1} \text{ 且 } u \in [x] \text{ 所定的直线，即有某 } \lambda \in \mathbf{C} \text{ 使 } u = \lambda x\},$$

可以通过映射

$$S^{2n+1} \times_{S^1} \mathbf{C} \longrightarrow E, \quad [x, \lambda] \longmapsto ([x], \lambda x)$$

将二者等同起来. E 之所以称为典则的，其原因即在于此. 不论如何，由定义我们有

$$t(\gamma) = t = H^2(\mathbf{CP}^\infty; Z) \text{ 之生成元.}$$

现在稍微变一变 S^1 在 $\mathbf{C}$ 上的作用. 固定一整数 k，对 $g \in S^1$ 与 $\lambda \in \mathbf{C}$，定义

$$g \circ \lambda = g^k \lambda.$$

为了区别 k 不相同时的作用，记具有这种 S^1-作用的 $\mathbf{C}$ 为 $\mathbf{C}_k$. 然后

作线丛

$$E^k = S^\infty \times_{S^1} \mathbf{C}_k \longrightarrow \mathbf{CP}^\infty.$$

问题是，示性类 $t(E^k)$ 是什么？

上章引言中提到过，因为矢量丛有代数构造，所以有许多代数作法方便了示性类的计算. 我们提出的问题就是一个好例子. 回忆一下，矢量丛可以相加相乘（张量积）. 两个线丛相加将得出一平面丛，这样下去是无止境的. 但两个线丛 E_1 与 E_2 之张量积仍为一个线丛. 为了描述 $E_1 \otimes E_2$，只需取 E_1 与 E_2 的迁移函数 $\{\varphi_{ij}\}$，$\{\psi_{ij}\}$，并作其张量积 $\varphi_{ij} \otimes \psi_{ij}$，即对 $b \in U_i \cap U_j$，$(\varphi_{ij} \otimes \psi_{ij})(b) = \varphi_{ij}(b) \otimes \psi_{ij}(b)$. 对于线丛，$\{\varphi_{ij}\}$，$\{\psi_{ij}\}$ 是 1×1 矩阵（即标量）族，而 $\varphi_{ij}(b) \otimes \psi_{ij}(b)$ 就是复数的通常的乘法 $\varphi_{ij}(b) \cdot \psi_{ij}(b)$（即是说，若 $\varphi(e_1) = \lambda e_1$，$\psi(e_1) = \mu e_1$，则 $(\varphi \otimes \psi)(e_1 \otimes e_1) = \lambda\mu(e_1 \otimes e_1)$.
现令 $\{\varphi_{ij}\}$ 为万有丛 $S^\infty \longrightarrow \mathbf{CP}^\infty$ 的迁移函数. 注意到，对 $E = E^1$ 迁移函数正是 E^k 的迁移函数而取 $k=1$，即按 $\varphi_{ij}^1(b)\lambda = \varphi_{ij}(b)\lambda$ 作用于 $\mathbf{C}$ 上，而对 E^k 则是“同样”的函数 $\varphi_{ij}(b)$，但作用方式不同，即

$$\varphi_{ij}^k(b)\lambda = \varphi_{ij}(b) \circ \lambda (\text{按 } k = k \text{ 作用于 } \mathbf{C} \text{ 上}) = [\varphi_{ij}^1(b)]^k \lambda.$$

这样分析说明 E^k 正是万有丛 E 对自身的 k-重张量积.

懂得了几何以后怎样计算张量积的示性类呢？已给了线丛 $E_1 \longrightarrow B_1$ 和 $E_2 \longrightarrow B_2$，作空间 $B_1 \times B_2$. 通过射影 π_1 和 π_2 将 E_1 和 E_2 拉回到 $B_1 \times B_2$ 上，可得 $\pi_1^*(E_1)$ 和 $\pi_2^*(E_2)$. $B_1 \times B_2$ 上的张量积 $\pi_1^*(E_1) \otimes \pi_2^*(E_2)$ 称为 E_1 和 E_2 的外张量积，记作 $E_1 \hat{\otimes} E_2$. 它与通常的“内张量积”关系很简单. 若 $B_1 = B_2 = B$，我们有对角映射 $\Delta: B \longrightarrow B \times B$. 于是，因为 $\Delta^* \pi_1 = \Delta^* \pi_2 = \mathrm{id}$，

$$\Delta^*(E_1 \hat{\otimes} E_2) = E_1 \otimes E_2.$$

对万有丛 $E \longrightarrow \mathbf{CP}^\infty$ 作这件事，即得一线丛 $E \hat{\otimes} E \longrightarrow \mathbf{CP}^\infty \times \mathbf{CP}^\infty$. 因为 E 是万有的，故有分类映射

$$f: \mathbf{CP}^\infty \times \mathbf{CP}^\infty \longrightarrow \mathbf{CP}^\infty.$$

现要计算 f^* 对上同调类的作用. 因为我们几乎完全不知道 f 象是

什么，所以乍看之下似乎这是无法做到的．但由 Künneth 公式

$$H^2(\mathbf{CP}^\infty\times\mathbf{CP}^\infty)=H^2(\mathbf{CP}^\infty)\otimes 1+1\otimes H^2(\mathbf{CP}^\infty),$$

所以不管 f^* 象是什么样，

$$f^*(t)=\lambda t\otimes 1+1\otimes\mu t,\quad \lambda,\mu \text{ 是整数}.$$

为了定出 λ 和 μ，取一点 $*\in\mathbf{CP}^\infty$，包含映射

$$i_1: B\longrightarrow B\times B,\quad b\longmapsto(b,*)$$

显然给出 $i_1^*(E\otimes E)=E\otimes$（平凡线丛）$=E_0$．所以 $i_1^*f^*(t)=t$．但另一方面 $i_1^*(\lambda t\otimes 1+1\otimes\mu t)=\lambda t+0=\lambda t$．所以我们有

$$f^*(t)=t\otimes 1+1\otimes t.$$

注意，施行对角映射 Δ^* 将把$\otimes$变为上同调卡积（这是定义的一部分），我们有

$$t(E\otimes E)=t\cdot 1+1\cdot t=2t,\tag{1}$$

即是说，示性类 t 变张量积为和．对于 B 上的线丛 $E_1\longrightarrow B$ 和 $E_2\longrightarrow B$，设其分类映射为 $f_1,f_2: B\longrightarrow\mathbf{CP}^\infty$．由下面的图式和（1）立即给出

定理 $t(E_1\otimes E_2)=t(E_1)+t(E_2)$．

证

$$\begin{array}{ccccccc}
E_1\otimes E_2 & \longrightarrow & E_1\otimes E_2 & \longrightarrow & E\otimes E & \longrightarrow & E\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
B & \xrightarrow{\Delta} & B\times B & \xrightarrow{f_1\times f_2} & \mathbf{CP}^\infty\times\mathbf{CP}^\infty & \xrightarrow{f} & \mathbf{CP}^\infty.
\end{array}$$

所以，我们已成功地定出 $t(E^k)=kt(E)$．特别是，对不同的 k，它们就是 $\mathbf{C}$ 上全部的不同的线丛．这是我们从代数理论得到的第一个收获．

再回到理论本身．关于示性类的最重要的问题之一自然是：它们是否名副其实确实为“示性”的？既然已经了解了一些关于上同调的事，我们知道，不能希望有肯定的回答．但是有一些例如

CP^∞那样的特例．我们的问题是：若 f_0，$f_1：B\longrightarrow CP^\infty$使得 $f_0^*(t)=f_1^*(t)$，f_0 与 f_1 是否同伦？应用前面已经试过的方法，我们将设 B 为一复形．把 f_0，f_1 放在 $B\times\partial I\longrightarrow CP^\infty$上，并问能否把它们拓展到 $B\times I$ 上．所以，一般的问题成为，若有一对复形（X，A）以及映射 $f：A\longrightarrow Y$，问何时 f 可以拓展到整个 X 上．我们知道，若 Y 为同伦平凡，这是没有问题的．但在目前，$Y=CP^\infty$肯定不是同伦平凡的（如果是，它就应是可缩的而 $H^*(CP^\infty)$ 为平凡．所以我们的情况肯定更复杂．设 n 是使 $\pi_n(Y)\neq 0$ 的第一个正整数．我们仍可从（X，$A)^0$ 开始，一直到维数$\leqslant n$ 的单形 σ 都和前面一样．所以第一个障碍出现在 $\dim\sigma=n+1$ 的单形 σ 上．用归纳法在（X，$A)^n$ 上作出的 f 对每一个 σ 都给出一函数 $f|\partial\sigma：\partial\sigma\longrightarrow Y$，它则给出 π_n（Y）中的一个元 $[f|\partial\sigma]$．作一对应

$$C_{n+1}(X,A)\longrightarrow\pi_n(Y),\quad \sigma\longmapsto[f|\partial\sigma],$$

它是一个系数在 $\pi_n(Y)$ 中的 $(n+1)$-上链 $c(f)\in C^{n+1}(X,A;\pi_n(Y))$．若此上链为 0，即 $[f|\partial\sigma]=0$，则每一个 $f|\partial\sigma$ 可以拓展到 σ 上，于是可以得 f 再拓展一步到 $(X，A)^{n+1}$上．这当然只不过是同义语反复而并无新意．现在可以证明，$c(f)$ 一般地是一个上循环．故有一上同调类 $[c(f)]\in H^{n+1}(X,A;\pi_n(Y))$．若此类为 0 则如何？这时出现了这个理论中最优美的东西．回想一下，我们是由 A 上的 f 开始的，当我们做到 $f|(X,A)^n$ 时，我们可能是用许多不同的方法选定 f 在 $(X，A)^n$ 上之值的．示性类理论告诉我们，不论怎样选 f，$c(f)$ 都是一样的，而若 $[c(f)]=0$ 则可在 $(X，A)^n$ 上把 f 修改为新的 f' 而仍有 $c(f')=0$．当然这些都不影响初始的 $f|A$．所以真正的障碍是上同调类 $[c(f)]$．

为了应用障碍理论，需要知道同伦群 $\pi_*(CP^\infty)$．因为万有 G-丛 $EG\longrightarrow EB$ 的全空间是可缩的，所以，由纤维化的同伦系列将给出

$$\pi_i(BG)\simeq\pi_{i-1}(G).$$

群 $G=S^1$ 有一纤维化

$$\mathbf{R} \longrightarrow S^1, \quad t \longmapsto e^{2\pi i t}$$

其纤维为整数群 $Z\subset\mathbf{R}$. 因为我们知道 $\pi_0(Z)=Z$ 而当 $i>0$ 时 $\pi_i(Z)=0$，故有

$$\pi_2(\mathbf{CP}^\infty)=Z,$$
$$\pi_i(\mathbf{CP}^\infty)=0, \qquad i\neq 2.$$

所以这是次于同伦平凡的最简单的情况. 结果是我们仅有一个落在 $H^3(X,A;Z)$ 中的障碍类. 在我们的情况下，它在

$$H^3(B\times I, B\times\partial I)=H^3(B\times(I,\partial I))$$
$$=H^2(B)\otimes H^1(I,\partial I)=H^2(B)$$

中. 详细的计算表明障碍类正是 $f_0^*(t)-f_1^*(t)$. 故若 $f_0^*(t)=f_1^*(t)$，则 f_0、$f_1: B\longrightarrow\mathbf{CP}^\infty$确为同伦. 这就给出了一个很漂亮的定理：

定理 同一底空间上的两个复线丛 E_1, E_2 当且仅当其示性类 $t(E_1)$,$t(E_2)$ 相等时为同构.

应该指出，这定理是一个非常非常特殊的情况. 它之所以成立是因为 $\mathbf{CP}^\infty$ 在同伦上恰好很简单，只有一个非零同伦群 $\pi_2(\mathbf{CP}^\infty)$，而这又与 S^1 只有一个非零同伦群 $\pi_1(S^1)$ 有关. 这类空间称为 ($K(2,Z)$ 和 $K(1,Z)$ 型的) Eilenberg-MacLane 空间. 这一类的其它群还有有限或离散群 ($K(0,G)$ 型). 其中最简单的又是对合群 $G=Z_2=O(1)$，对于它有与 S^1 情况完全平行的理论，只需用 Z_2 为上同调系数. 回想起 $BZ_2=\mathbf{RP}^\infty$是无限实射影空间. "望远镜"极限

$$\mathbf{RP}^1\subset\mathbf{RP}^2\subset\cdots\subset\mathbf{RP}^\infty$$

说明 $H^*(\mathbf{RP}^\infty;Z_2)=Z_2(t)$ 是具有一个生成元 $t\in H^1(\mathbf{RP}^\infty;Z_2)$ 的 Z_2 系数多项式代数，t 之次数为 1. t 是对合的万有示性类. 在几何上我们讨论的是实线丛. 为区别复和实的情况，称 S^1 的示性类为陈(省身)类，记作 $c(E)$，称 Z_2 的为 Stiefel-Whitney 类，记作 $w(E)$. 对实线丛的张量积仍和前面一样有加法公式，而实线丛可用其 Whitney 类一直决定到同构为止.

我们可以把这些结果稍微推广一点．令 $T^k=S^1\times S^1\times\cdots\times S^1$（$k$ 重积）为 k 维环面群．很清楚，对两个群 G_1 和 G_2 有 $B(G_1\times G_2)=BG_1\times BG_2$．因为 $BS^1=\mathbf{CP}^\infty$ 在上同调中是无挠（torsion free）的，由 Künneth 公式

$$H^*(BT^k;Z)=Z[t_1,t_2,\cdots,t_k]$$

即 k 个未定元 t_1，…，t_k 的二次多项式环．它们就是 T^k 的万有类．因为 BT^k 是 $K(2,Z\oplus\cdots\oplus Z)$ 型的 Eilenberg-MacLane 空间，它们决定了 T^k-丛．回忆一下，两个矢量丛 E_1，E_2 的 Whitney 和 $E_1\oplus E_2$ 的迁移函数是分块方阵

$$\begin{pmatrix}\varphi & 0\\ 0 & \psi\end{pmatrix},$$

故若将 T^k 作为对角阵嵌入在 $U(k)$ 中：

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k\end{pmatrix}$$

则说一个复 k-平面丛具有群 T^k 就意味着 E 可以完全分裂为线丛：

$$E=E_1\oplus\cdots\oplus E_k.$$

所以，T^k-丛的理论就是分裂复矢量丛的理论．结果是，E 完全由其各因子的陈类 $c(E_i)$ 决定．类似地，对于 $G=(Z_2)^k$ 与 Z_2 系数，也有实的分裂丛的理论．

§2．酉群 $U(n)$ 的示性类（陈类）与正交群 $O(n)$ 的示性类（Stiefel-Whitney 类）

前节的结果虽然相当完备，却显然是不够的．它只处理了分裂的矢量丛．这些当然并不常见．真正的问题当然是对一般矢量

从建立相当的理论，即研究群 $U(n)$ 与 $O(n)$ 的示性类. 我们先讨论 $U(n)$.

我们的办法如下. 恒有包含于 $U(n)$ 中的环面群 $T = T^n \subset U(n)$，即对角矩阵群. 若 $EU(n) \longrightarrow BU(n)$ 是一万有 $U(n)$-丛，则有以下图式：

$$\begin{array}{ccl} BU(n) & & \\ & \searrow^{\xi} & \\ \pi \downarrow & \swarrow_{\rho} & BU(n)/T = BT^n \\ BU(n) & & \end{array}$$

以及诱导同态：

$$\rho^* : H^*(BU(n)) \longrightarrow H^*(BT^n).$$

右方是已知的，我们要通过细心研究 ρ^* 来确定 $H^*(BU(n))$. 映射 ρ 不仅从代数上把 $H^*(BU(n))$ 与 $H^*(BT^n)$ 连接起来，它也有几何意义. 回忆起 π 到 BT^n 上的拉回 $\rho^*(\pi)$ 恒有一 T^n-化约即 T^n-丛 ξ（第十二章 § 4). 若视 π 为一矢量丛（通过扭曲积)，则这说明 $\rho^*(\pi)$ 可分裂为线丛. 这样我们就懂得了 $\rho^*(\pi)$ 的示性类. 我们希望这能有助我们通过 ρ^* 而回溯到 π 的示性类.

先从回顾第十章中的 Thom 同构定理开始. 令 $\pi : E \longrightarrow B$ 为一实矢量丛. $\xi \in H^n(E, \dot{E})$ 为 Thom 类当且仅当对任意 $b \in B$，限制映射

$$\begin{array}{ccc} H^n(E, \dot{E}) & \longrightarrow & H^n(E_b, \dot{E}_b) = Z, \\ \xi & \longmapsto & \xi_b \end{array}$$

映 ξ 为 $H^n(E_b, \dot{E}_b)$ 之生成元 ξ_b. 这时，映射

$$\begin{array}{cccc} & H^k(B) & \longrightarrow & H^{k+n}(E, \dot{E}), \\ \psi : & u & \longmapsto & \pi^*(u)\xi \end{array}$$

是一同构. 我们需要的并不是此命题本身，而是证明的想法，即此定理局部地是不足道地成立的，而它的形式是 Meyer-Vietoris 序

列可将它们粘起来成一整体的定理. 我们要在稍微广泛一些的背景下应用同样的想法. 令丛 $\pi: E \longrightarrow B$ 纤维为 F. 可以视 $H^*(E)$ 为环 $H^*(B)$ 上的模, 模运算为

$$\lambda \circ u = \pi^*(\lambda)u,$$

$\lambda \in H^*(B), u \in H^*(E)$ 且上式右方为 $H^*(E)$ 中的卡积. 设 $H^*(F)$ 作为系数基环上的模为自由的. 所谓基底的提升即指 $H^*(E)$ 中一组元 $\{u_1, \cdots, u_k\}$ 而对每一点 $b \in B$, 限制映射

$$H^*(E) \longrightarrow H^*(E_b) \simeq H^*(F)$$

映之为 $H^*(E_b)$ 的一个基底. 注意当 $k=1$, $F=$ (R, R) 时, 这正是 Thom 同构的情况. 一般情况下则有

Leray-Hirsh 定理 在上述情况下, $\{u_1, \cdots, u_k\}$ 是 $H^*(E)$作为一 $H^*(B)$-模的基底.

Leray-Hirsh 定理的证明和 Thom 同构定理的证明是相同的. 若 $E = B \times F$ 而$\{v_1, \cdots, v_k\}$是 $H^*(F)$ 作为R-模的基底,因 $H^*(F)$ 是自由的, $H^*(E) = H^*(B) \otimes H^*(F)$. 显然, $\{u_1, \cdots, u_k\} = \{1 \otimes v_1, \cdots, 1 \otimes v_k\}$是 $H^*(E)$ 在 $H^*(B)$ 上的基底. 然后我们用 Meyer-Vietoris 序列来证明若此定理在开集$U, V \subset B$ 上成立,则它在 $U \cup V$ 上也成立. 这至少包含了 B 为紧的情况. 一般的情况需要较多的技巧,现在暂不涉足. 注意我们恒可将恒等元 $1 \in H^0(E)$ (即由 0-上循环 $\varphi(x) = 1$ 对一切 $x \in X$ 成立, 1 为 R 中之恒等元所确定的上同调类)包含在基底$\{u_1, \cdots, u_k\}$中. 这时关系式

$$\lambda \circ 1 = \pi^*(\lambda)$$

与集$\{1\}$的线性独立性意味着 $\pi^*: H^*(B) \longrightarrow H^*(E)$ 为单射.

现在我们来证明

定理(Borel) 若 $\xi: E \longrightarrow B$ 是主 $U(n)$-丛, $T \subset U(n)$ 为对角阵集,则由

$$\begin{array}{ccc} E & & \\ \downarrow & \searrow & \\ & & E/T \\ & \swarrow_{\rho} & \\ B & & \end{array}$$

所诱导的同态 $\rho^*: H^*(B) \longrightarrow H^*(E/T)$ 是一单射.

证 令 $G_k \subset G = U(n)$ 是以下形状矩阵所成的子群：

$$\begin{pmatrix} * & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

于是 $G_k = U(n-k) \times T^k$，并有一串子群 $T = G_n \subset \cdots \subset G_k \subset \cdots \subset G_0 = G$. 于是映射 $\rho: E/T = E/G_n \longrightarrow B = E/G_0$ 可以分解为一列映射：

$$E/G_n \longrightarrow E/G_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E/G_k \xrightarrow{\rho_k} E/G_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E/G_0,$$

即 $\rho = \rho_1 \cdots \rho_k \cdots \rho_n$. 只需证明每个 ρ_k^* 为一单射即可. 为此目的，注意到

$$\rho_k: E_k = E/G_k \longrightarrow E/G_{k-1} = E_{k-1}$$

是一纤维丛，而其纤维是

$$\begin{aligned} G_{k-1}/G_k &= \frac{U(n-k+1) \times T^{k-1}}{U(n-k) \times T^k} \\ &= \frac{U(n-k+1)}{U(n-k) \times U(1)} = \mathbf{C}P^{n-k}. \end{aligned}$$

此外，令 $H_k \subset G_k$ 是以下形式的矩阵之子群：

$$H_k = \left\{ \begin{pmatrix} * & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_k \end{pmatrix} \in G_k \,\middle|\, \lambda_k = 1 \right\}$$

$$= U(n-k) \times T^{k-1},$$

我们有以下形状的图式

$$\begin{array}{ccc} E/H_k & & \\ & \searrow^{\pi} & \\ \zeta_k \big\downarrow & & E/G_k = E_k, \\ & \swarrow_{\rho_k} & \\ E_{k-1} = E/G_{k-1} & & \end{array}$$

π 是一个 $G_k/H_k = S^1$ 丛而有有效群 G_k/H_k，即一主 S^1-丛．这样，其陈类 $c(\pi) \in H^2(E_k)$．若固定一点 $b \in E_{k-1}$，则有图式

$$
\begin{array}{ccccc}
\xi_k^{-1}(b) & & \longrightarrow & & E/H_k \\
 & \searrow^{\pi_b} & & & \\
\downarrow & & \rho_k^{-1}(b) \xrightarrow{\ i_b\ } & \xi\downarrow & \searrow^{\pi} E/G_k \\
 & \swarrow & & & \swarrow_{\rho_k} \\
b & & \longrightarrow & & E/G_{k-1}
\end{array}
$$

其中 $\rho^{-1}(b) = \mathrm{CP}^{n-k}$ 而 π_b 也是一主 S^1-丛．由函子性质，必有

$$i_b^*(c(\pi)) = c(\pi_b) \in H^2(\mathrm{CP}^{n-k}).$$

因为 $\xi_k^{-1}(b) \longrightarrow \rho^{-1}(b)$ 正是从 $S^{2n-2k+1} \longrightarrow \mathrm{CP}^{n-k}$，$c(\pi_b)$ 是一生成元．故由 $H^*(\mathrm{CP}^{n-k})$ 的构造得知，集

$$\{1, c(\pi), c(\pi)^2, \cdots, c(\pi)^{n-k}\} \subset H^*(E_k)$$

是基底的一个提升，从而由 Leray-Hirsch 定理知 ρ_k^* 是一单射．

故通过 ρ^* 可以认为 $H^*(BU(n))$ 是 $H^*(BT^n)$ 的子代数．在描述它以前，先估计一下其大小．注意，在前面并没有用到 Leray-Hirsch 定理的全部力量，这定理说，在适当条件下，至少就加法而言，$H^*(E) \simeq H^*(B) \otimes H^*(F)$．因为我们已设 $H^*(F)$ 为自由，故 $H^*(E)$ 为自由当且仅当 $H^*(B)$ 为自由．在丛序列

$$BT^n = E/G_n \xrightarrow{\rho_n} E/G_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E/G_1 \longrightarrow E/G_0 = B(U_n) \tag{1}$$

中（$E = EG \xrightarrow{\rho} BG$ 是万有的），我们知道 $H^*(E/G_n) = H^*(BT^n)$ 是自由的，故可归纳地得知对所有 $0 \leqslant k \leqslant n$，$H^*(E/G_k)$ 均为自由的．若一空间 X 使 $H^*(X)$ 为自由，其 Poincaré 级数定义为

$$P(X, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{Rank}(H^i(X)) t^i.$$

这正是对不同的 i 探讨 $H^i(X)$ 大小的好工具．例如，设系数在一个域中，Rank$=$dim．我们就有

$$P(X, 1) = \dim H^*(X),$$

$$P(X, -1) = \chi(X) = X \text{ 的 Euler 示性数}.$$

由 Künneth 定理，我们有

$$P(A \otimes B, t) = P(A, t)P(B, t).$$

现在对于从 $p_k: E/G_k \longrightarrow E/G_{k-1}$，纤维是 $\mathbf{CP}^{n-k}$，而

$$P(\mathbf{CP}^{n-k}, t) = 1 + t^2 + \cdots + t^{2(n-k)} = \frac{1 - t^{2(n-k+1)}}{1 - t^2}.$$

对于 $BT^n = BS^1 \times \cdots \times BS^1$ 我们也有

$$P(BT^n, t) = P(BS^1, t)^n = (1 + t^2 + t^4 + \cdots)^n$$

$$= 1/(1 - t^2)^n.$$

从这些结果和序列（1），我们容易算出

$$P(BU(n), t) = \frac{1}{(1 - t^2)^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1 - t^2}{1 - t^{2(n-k+1)}}$$

$$= \frac{1}{(1 - t^2)(1 - t^4)\cdots(1 - t^{2n})}. \qquad (2)$$

式（2）只是关于子模 $H^*(BU(n)) \subset H^*(BT^n)$ 之大小的加法的讯息．关于其乘法构造，还必须做更多的工作．先回顾一下前面提过的一般性事实．若 $\alpha: H \longrightarrow G$ 是群同态，则有某分类映射 f 的 α-拓展运算

$$\begin{array}{ccc} EH \times_H G & \longrightarrow & BG \\ \downarrow & & \downarrow \\ BH & \xrightarrow{f} & BG. \end{array}$$

由此又导出上同调的映射 f^*．我们将记 f^* 为

$$\alpha^*: H^*(BG) \longrightarrow H^*(BH)$$

并称 α^* 为 α 的诱导映射．当然很容易验证对应关系 $\alpha \longrightarrow \alpha^*$ 是函子的，即适合通常的条件 $1^* = 1$，$(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^*$．现在将在以下情况下应用这一点．令 G 为一群，则对任一 $g \in G$，用 g 作的共轭关系

$$I_g: G \longrightarrow G, \qquad x \longmapsto gxg^{-1}$$

是一同态（反之，除非 G 是 Abel 群，左右乘 L_g 与 R_g 则不是）．因

此又有 $I_g^*: H^*(BG) \longrightarrow H^*(BG)$，但仍记之为 g^*．群 G 这样可以作用在 $H^*(BG)$ 上．更准确些说，这作用就定义为

$$gu = (g^{-1})^* u = (I_{g^{-1}})^* u.$$

现在 $U(n)$ 中作一些计算．我们想看一些特定的 g^*．对于一对 (i, j)，定义 $g \in U(n)$ 如下：

$$g(e_i) = e_j, \quad g(e_j) = e_i, \quad g(e_k) = e_k \quad 若\ k \neq i, j.$$

若 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in T$，我们有

$$(I_g\lambda)(e_i) = (g\lambda g^{-1})(e_i) = (g\lambda)(e_j) = g(\lambda e_j) = \lambda_j e_i,$$
$$(I_g\lambda)(e_j) = \lambda_i e_j,$$
$$(I_g\lambda)(e_k) = \lambda_k e_k, \quad 若\ k \neq i, j.$$

换言之，I_g 保持 T 不变而在 T 上只是对换 i，j 坐标．显然，分类映射 $f: BT^n = BT \times \cdots \times BT \longrightarrow BT^n$ 就是交换其 i，j 因子．由此，I_g^* 也就是在 $H^*(BT^n) = Z[t_1, \cdots, t_n]$ 上交换 t_i 与 t_j 的映射．

当然，交换 t_i 与 t_j 没有什么复杂的事．要点在于这一交换是由 $H^*(BT)$ 上的由某个 $g \in U(n)$ 所给出的 I_g^* 的作用来实现的．这件事为何重要？当然 I_g^* 也作用在 $H^*(BG)$ 上，但效果截然不同．因 $G = U(n)$ 是连通的，g 可以与恒等元 e 连接起来．这意味着，作为一个映射，I_g 同伦于 $I_e = 1$，因此在 $H^*(BG)$ 上 $I_g^* = 1$．注意这里的微妙之处．I_g，$I_e: T \longrightarrow T$ 均使 T 不变，但其同伦则不一定．即是说 $I_g|T$ 与 $I_e|T$ 可能不同伦，所以不能如前一样来说在 $H^*(BT)$ 上 $I_g^* = 1$．正是因此，在这一情况下的置换群称为 $U(n)$的 Weyl 群 W．形式一些的说法是：令

$$N(T) = \{g \in G | I_g(T) \subset T\}.$$

由定义，$T \subset N(T)$ 是正规的（由此 $N(T)$ 称为 T 在 G 中的正规化子），而我们有

$$W(G) = N(T)/T.$$

这样，Weyl 群 W 作用在 $H^*(BT)$ 上．令 $H^*(BT)^W$ 是 $H^*(BT)$ 中使 W 不变的子空间．我们证明了的就是

$$H^*(BU(n)) \subset H^*(BT)^W.$$

对于 $H^*(BT^n)=Z[t_1,t_2,\cdots,t_n]$ 以及 W 为置换群的情况，$H^*(BT)^W$ 即对称多项式. 代数学中有一著名定理指出，对称多项式之代数即由初等对称多项式 σ_0，…，σ_n 生成的多项式代数. 它们可描述如下. 令 x 为未定元并考虑多项式

$$\prod_{i=1}^{n}(x+t_i)\in H^*(BT^n)[x].$$

它显然是对称的，故其展开式

$$\prod_{i=1}^{n}(x+t_i)=\sum_{i=0}^{n}\sigma_i(t_1,\cdots,t_n)x^{n-i} \qquad (*)$$

之系数也是对称的. 此即初等对称多项式. 如

$$\sigma_0=1,$$
$$\sigma_1=t_1+\cdots+t_n,$$
$$\cdots$$
$$\sigma_n=t_1t_2\cdots t_n.$$

于是，定理指出

$$Z[t_1,\cdots,t_n]^W=Z[\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n].$$

现在可以计算其 Poincaré 多项式，注意到在此情况下 $\deg\sigma_i=2i$，所以

$$P(Z[\sigma_i],t)=1+t^{2i}+t^{4i}+\cdots=1/(1-t^{2i}).$$

于是

$$P(Z[\sigma_1,\cdots,\sigma_n],t)=1/[(1-t^2)(1-t^4)\cdots(1-t^{2n})]. \qquad (3)$$

与 (2) 式比较，我们肯定指望立即断定

$$H^*(BU(n))=H^*(BT^n)^W,$$

但还别急，我们只不过证明了 $H^*(BU(n))\subset H^*(BT^n)^W$，以及对每个次数，二者同秩. 它们仍不一定相等. 举例来说，由于偶数群是 Z 的秩为1的真子群，$Z\subset Z$. 如果确实如此，则在与 Z_2 作张量积以后，包含映射 $i:Z\longrightarrow Z$ 将不是单射. 事实上，$i:Z\otimes Z_2=Z_2\longrightarrow Z_2$ 是零映射. 在讨论单射 $\rho^*:H^*(BU(n))\longrightarrow H^*(BT^n)$ 时，用的是整系数上同调. 但此证明对任意系数域均适用. 上面描述的现象

将不会出现（这一点的详细证明我们没有做，称为万有系数定理）．这样，我们就证明了下面的大定理：

定理（Borel）　令 $T\subset U(n)$ 是对角矩阵所成的 n-维环面群，则包含映射 $\rho:T\longrightarrow U(n)$ 诱导出任意系数域 R 的上同调的单射

$$\rho^*:H^*(BU(n))\longrightarrow H^*(BT)=R[t_1,\cdots,t_n],$$

其象为对称多项式的子代数，即有：

$$H^*(BU(n))=R[\sigma_1,\cdots,\sigma_n].$$

第 i 个初等对称多项式 σ_i 称为万有 i 阶陈类．

Borel 定理给陈类一个自然的而且肯定是很漂亮的定义．但还不止于此．首先可以想到，（＊）式给出的 σ 与 t 之间的关系对计算有用．此式也有几何意义如下：令 $E\longrightarrow B$ 为一复矢量丛．于是有陈类 $c_1(E),\cdots,c_n(E)$．令 $P\longrightarrow B$ 为与 E 相关的主 $U(n)$-丛．于是有下面的图式

$$\begin{array}{ccccc}
P & \longrightarrow & EU(n) & & \\
\downarrow & \searrow P/T \longrightarrow & \downarrow & \searrow & EU(n)/T=BT, \\
 & \swarrow_{\rho_E} & & \swarrow_{\rho} & \\
B & \xrightarrow[f]{} & BU(n) & &
\end{array}$$

f 是分类映射．这样我们证明了

（1）　几何上，拉回 $\rho_E^*(E)=E_1\oplus\cdots\oplus E_n$ 分裂为线丛，故有其示性类 $c(E_i)\in H^2(P/T)$．

（2）　代数上，$\rho_E^*:H^*(B)\longrightarrow H^*(P/T)$ 为单射．

（＊）中 σ_i 的定义显然成为公式

$$\rho_E^*[x^n+c_1(E)x^{n-1}+\cdots+c_n(E)]=\prod_{i=1}^{n}(x+c(E_i)).$$

（＊＊）

所以在计算 $c(E)$ 时，不妨认为 E 分裂为线丛，而 $c_i(E)$ 即 $c(E_1),\cdots,c(E_n)$ 的 i 阶对称积．（＊＊）称为全陈类的形式分解．称为“形式”的，是由于 $H^2(B)$ 上并没有类 $c_i(E)$，B 上也没有线丛 E_i．但因 ρ_E^* 是单射，于是虚拟的分解决定了真实的类 $c_i(E)\in$

$H^{2n}(B)$．这种作法的用处马上可以看到．但还有其余，这一方法使我们懂得了类 $c_i(E)$ 本身的几何意义．例如，考虑最后一个丛

$$\rho_0 : E/G_1 \longrightarrow E/G_0 = BU(n).$$

注意 $G_1 = U(n-1) \times S^1$．所以说矢量丛 E 可化为 G_1 即是说 $E = E^1 \oplus E_1$，E^1 是··（$n-1$） 丛而 E_1 为一线丛，即由 E 可分裂出一个线丛．为此，分类映射必可提升到 E/G_1 上：

$$\begin{array}{ccc} P & & E/G_1 \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle \rho_0} \\ B & \xrightarrow[f]{} & BU(n). \end{array}$$

由上一章可知，若纤维为同伦平凡的，这样做没有问题．一般情况下，则由障碍理论可知应考虑 $\pi_i(F)$．上例中 $F = U(n)/(U(n-1) \times S^1) = \mathbf{CP}^{2n-2}$ 是射影空间．我们可以由纤维化

$$S^1 \longrightarrow S^{2n-1} \longrightarrow \mathbf{CP}^{2n-2}$$

算出 $\mathbf{CP}^{2n-2}$ 的前两个非零同伦群为

$$\pi_2(\mathbf{CP}^{2n-2}) = \pi_1(S^1) = Z,$$

$$\pi_{2n-1}(\mathbf{CP}^{2n-2}) = \pi_{2n-1}(S^{2n-1}) = Z.$$

所以第一个障碍出现在 $H^3(B;\pi_2(F)) = H^3(B;Z)$ 中．但由于 $H^3(BU(n);Z) = 0$，故它为0.（我们的计算还表明了，当 i 为奇时 $H^i(BU(n)) = 0$，见（1）.）所以第一个真正的障碍是 $H^{2n}(B;\pi_{2n-1}(F)) = H^{2n}(B)$．它是什么呢?可以证明就是最后一个陈类 $c_n(E) \in H^{2n}(B)$．所有的 $c_i(E)$ 都可以这样解释为障碍类．这是更深的理解．例如．既然 $\mathbf{CP}^{2n-2}$ 可能有（确有）更多的非零同伦，所以即令 $c_n(E) = 0$，f 也可能不能提升．所以，与线丛不同，$c_i(E)$ 远不足以决定丛 E．历史上，Stiefel 和 Whitney 就是这样发现了实丛的示性类的．如今，我们有与上相似的现代的处理方式了．

在 $O(n)$ 中，令

$$I = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_i = \pm 1$$

为对角矩阵. 于是 $I=Z_2^n$. 所以

$$H^*(I;Z_2) = Z_2[t_1,\cdots,t_n], \quad \deg t_i = 1.$$

我们又有

$$\begin{array}{ccc} EO(n) & & \\ \downarrow & \searrow & \\ & \swarrow_{\rho} & EO(n)/I = BZ_2^n, \\ BO(n) & & \end{array}$$

以及

定理 $\rho^*: H^*(BO(n);Z_2) \longrightarrow H^*(BZ_2^n;Z_2)$ 为单射, $\operatorname{Im}\rho^* =$ 对称多项式. 故 $H^*(BO(n);Z_2) = Z_2[w_1,\cdots,w_n]$, w_i 是第 i 个初等对称多项式, $\deg w_i = i$. w_i 称为万有 Stiefel-Whitney 类.

证明与 $U(n)$ 的情况完全一样, 即利用子群

$$L_k = \begin{pmatrix} * & \vdots & & \\ \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ & \vdots & e_1 & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & \vdots & & & e_k \end{pmatrix}.$$

(左上块为 $(n-k)\times(n-k)$.)

但是要注意, 我们原有的 $H^*(BZ_2;Z_2) = Z_2[t]$ 是一个 Z_2结果, 终结的定理也是一个 Z_2定理. 也可以得出一个整数结果, 但复杂得多. 所以, 对于实矢量丛, 有 Z_2类 $w_i \in H^i(B;Z_2)$.

在进一步展开这个理论之前, 先给出一些应用, 说明即在目前, 只需最少的初等考虑, 也可得出不平凡的结果.

令 $E\longrightarrow B$ 为一实矢量丛. 一个相当重要的问题是: E 是否可定向? 回忆一下, 若在模型空间 V 中确定一个定向, 即有一定次序的基底 $(e_1, \cdots, e_n)$, 由局部坐标

$$\varphi_i: U_i \times V \longrightarrow E$$

可在 $\pi^{-1}(U_i)$ 上给出一个局部定向. 所谓 E 可定向, 就是能找到一族局部坐标系 $\{\varphi_i\}$, 使得在 $U_i \cap U_j$ 上, φ_i 与 φ_j 确定相同的定向, 亦即若 $\varphi_{ij}(b) = \varphi_{ib}^{-1}\circ\varphi_{jb}$ 之行列式为 1: $\varphi_{ij}(b) \in SO(n) \subset O(n)$. 用

我们现在的语言说，E 可定向，当且仅当 $E \longrightarrow B$ 的构造群可由 $O(n)$ 化到 $SO(n)$．这个问题先是在第六章中提出的．那时我们说过，上述定向的定义并未给出确定是否可以定向的有效的手段．现在我们要证明 Whitney 类可用以解决这个问题．

先回忆一下，主 G-丛 $E \longrightarrow B$ 当且仅当有一整体截口时才是可定向的．事实上，局部平凡性和局部可定向性是一回事．若 $s: B \longrightarrow E$ 为一整体截口，则

$$B \times G \longrightarrow E, \quad (b,g) \longmapsto s(b)g$$

即所求同构．

还有一种方法来陈述可定向性．令 $P \longrightarrow B$ 是与矢量丛 $E \longrightarrow B$ 相伴的主 $O(n)$-丛．我们有通常的图示

$$\begin{array}{ccc} P & & \\ \downarrow & \searrow & \\ & & P/SO(n), \\ \downarrow & \swarrow_{\rho} & \\ B & & \end{array}$$

$\rho: P/SO(n) \longrightarrow B$ 是一个 $O(n)/SO(n) = Z_2$-丛．这样，其示性类为 $w(\rho) \in H^1(B;Z_2)$．

注意到 P 为 E 的标架丛，即 P_b 之一点即 E_b 的一个基底 $e = (e_1, \cdots, e_n)_b$．若两个基底 e 与 e' 之间有关系式 $e' = eg$ 而 $g \in SO(n)$，则 e 与 e' 定义相同的定向．换言之，$\rho: P/SO(n) \longrightarrow B$ 为定向丛．这样，

$$\begin{aligned} E \text{ 为可定向} &\Leftrightarrow \rho: P/SO(n) \longrightarrow B \text{ 有一整体截口} \\ &\Leftrightarrow w(\rho) = 0. \end{aligned}$$

$(E \longrightarrow B) \longmapsto w(\rho) \in H^1(B;Z_2)$ 这个关系显然是函子的．因此 $w(\rho)$ 必可表为矢量丛 $E \longrightarrow B$ 的 Whitney 类 $w_1(E), \cdots, w_n(E)$ 的多项式．但因 $\deg w(\rho) = 1$，故 $w(\rho)$ 只可能是 $w_1(E)$ 或0．究竟是哪一个，可以考虑万有的情况 $B = BO(n)$．若 $w(\rho) = 0 \in H^*(BO(n);Z_2)$，则处处有 $w(\rho) = 0$．所以想要断定 $w(\rho) = w_1(E)$，只需找一个 $w_1(\rho) \neq 0$ 的例子．但这意味着只需找一个不

可定向的矢量丛．在第六章中我们已看到，射影平面的切丛 $TP^2 \longrightarrow P^2$ 就是一例．我想，大概只有少数人会想到，这样一个特例其实等价于一个一般的定理：

定理　实矢量丛 $E \longrightarrow B$ 当且仅当其第一 Whitney 类 $w_1(E) \in H^*(B;Z_2)$ 为零时才为可定向．

例如，若 $H^1(B;Z_2)=0$，则 B 上任意实矢量丛均为可定向．

§3. 计　算

因为陈类是复矢量丛的示性类．我们自然想知道它在丛运算下如何变化，例如怎样从 $c(E)$ 和 $c(F)$ 算出 $c(E\oplus F)$．由定义陈类之法知道，答案是简单的，若我们设想 E 与 F 分裂为线丛的直和：$E=E_1\oplus\cdots\oplus E_k$，$F=F_1\oplus\cdots\oplus F_l$，则由上节

$$c(E)=1+c_1(E)+\cdots+c_k(E)=\prod_{i=1}^{k}[1+c(E_i)],$$

$$c(F)=1+c_1(F)+\cdots+c_l(F)=\prod_{j=1}^{l}[1+c(F_j)].$$

但是自然地有

$$E\oplus F=E_1\oplus\cdots\oplus E_k\oplus F_1\oplus\cdots\oplus F_l,$$

所以

$$c(E\oplus F)=\prod_{i=1}^{k}[1+c(E_i)]\prod_{j=1}^{l}[1+c(F_j)]$$

$$=c(E)\cdot c(F).$$

要想得到一个真正的定理，只需细心论证以上所述即可．回想第三章§2中指出 k 维矢量丛 $\pi:E\longrightarrow B$ 与 l 维矢量丛 $\pi^0:F\longrightarrow B$ 之真和 $E\oplus F$ 定义是：

$$E\oplus F=\{(u,v)\in E\times F;\pi(u)=\pi^0(v)\},$$

而投影 $E\oplus F\longrightarrow B$ 是自然的．若 $\{\varphi_i\}$，$\{\psi_i\}$ 是同一个开覆盖 $\mathscr{U}$ 下的坐标族，则 $E\oplus F$ 的局部坐标 η_i 是

$$\eta_i: U_i\times(C^k\oplus C^l)\longrightarrow E\oplus F,$$
$$(b,(x,y))\longmapsto(\varphi_i(b,x),\psi_i(b,y)).$$

易证 $E\oplus F$ 的迁移函数是

$$\eta_{ij}=\begin{pmatrix}\varphi_{ij} & 0\\ 0 & \psi_{ij}\end{pmatrix}$$

即为分块矩阵 $U(k)\times U(l)\subset U(k+l)=U(n)$．这就是直和运算的要点．

和张量积的情况一样，容易定义 $B\times B$ 上的外 Whitney 和 $E\oplus F$ 如下：

$$E\oplus F=(E\times F\longrightarrow B\times B)$$

（底空间不同也可以），局部坐标是显然的，为计算其示性类，先作其主丛，它显然就是丛

$$P\times Q\longrightarrow B\times B,$$

$P\longrightarrow B$，$Q\longrightarrow B$ 各为 E，F 的主丛．这是一个 $U(k)\times U(l)$-丛．但我们想把 $E\oplus F$ 看成一个 $k+l=n$ 维矢量丛，即需用 $U(k)\times U(l)\subset U(n)$ 来扩张 $P\times Q$．这就是作扭运算

$$(P\times Q)_{U(k)\times U(l)}\times U(n)\longrightarrow B\times B.$$

这就把问题弄明确了．我们要计算的就是这个主 $U(n)$-丛的示性类．由它在对角映射 $\Delta: B\longrightarrow B\times B$ 下的拉回就可得到 $E\oplus F$ 的类．

为简单计，令

$$G'=U(k),G''=U(l),G=U(n).$$

令 $T'\subset G'$，$T''\subset G''$ 为对角子群．注意，$T'\times T''=T$ 正是 G 的对角子群，重复上面万有丛的作法，并应用分类映射，即有以下的图式：

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & R & & & & \\
\Delta^*(R) & \longrightarrow & (P\times Q)_{G'\times G''}\times G & \longrightarrow & (EG'\times EG'')_{G'\times G''}\times G & \longrightarrow & EG \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
B & \xrightarrow{\Delta} & B\times B & \xrightarrow{f\times g} & BG'\times BG'' & \xrightarrow{h} & BG
\end{array}
$$

图 (a)

在这个图中，f，g 是主丛 P，Q 的分类映射，h 是 G-丛 $(EG'\times EG'')_{G'\times G''}\times G$ 的分类映射．有一个自然映射（即嵌入映射）

$$
P\times Q\longrightarrow (P\times Q)_{G'\times G''}\times G,
$$

$$
(p,\ q)\longmapsto [\ (p,\ q),\ e].
$$

应用它，又有以下的图式

$$
\begin{array}{ccccccc}
\Delta^*(P\times Q) & \longrightarrow & P\times Q & \longrightarrow & EG'\times EG'' & \longrightarrow & EG \\
\downarrow\ \dfrac{\Delta^*(P\times Q)}{T'\times T''} & \xrightarrow{\tilde{\Delta}} & (P/T')\times(Q/T'') & \longrightarrow & BT'\times BT'' & \xrightarrow{\tilde{h}} & BT \\
\swarrow \rho & & \swarrow \rho_P\times\rho_Q & & \swarrow \rho_{G'}\times\rho_{G''} & & \swarrow \rho_G \\
B & \xrightarrow{\Delta} & B\times B & \longrightarrow & BG'\times BG'' & \longrightarrow & BG
\end{array}
$$

图 (b)

因为分类映射是同伦唯一的，且 $BT=BT'\times BT''$，故可设 $\tilde{h}^*=1$．于是右边的方块给出

$$
\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{k}(1+t_i')\otimes\prod_{j=1}^{l}(1+t_j'') &= \tilde{h}^*\rho_G^*(1+\sigma_1+\cdots+\sigma_n) \\
&= \rho_{G'}^*\otimes\rho_{G''}^*(h^*(1+\sigma_1+\cdots+\sigma_n)).
\end{aligned}
$$

但是

$$
\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{k}(1+t_i')\otimes\prod_{j=1}^{l}(1+t_j'') = \rho_{G'}^*\otimes\rho_{G''}^*(1&+\sigma_1'+\cdots+\sigma_k') \\
&\otimes(1+\sigma_1''+\cdots+\sigma_l''),
\end{aligned}
$$

因为 $\rho_{G'}^*\otimes\rho_{G''}^*$ 是单射，所以

$$h^*(1+\sigma_1+\cdots+\sigma_n) = (1+\sigma'_1+\cdots+\sigma'_k) \otimes (1+\sigma''_1+\cdots+\sigma''_l). \tag{1}$$

因此，

$$c(E\oplus F) = \Delta^*(f^*\otimes g^*)h^*(1+\sigma_1+\cdots+\sigma_n) = \Delta^*(c(E)\otimes c(F)) = c(E)\cdot c(F).$$

图 (b) 的第二行就相当于"非正式"的证明. $(\rho_P\otimes\rho_Q)^*(E\oplus F)$ 分裂为线丛

$$(E_1\oplus\cdots\oplus E_k)\oplus(F_1\oplus\cdots\oplus F_l).$$

所以 $\rho^*(E\oplus F)$ 也分裂为线丛：

$$\rho^*(E\otimes F) = (E_1\oplus\cdots\oplus E_k)\oplus(F_1\oplus\cdots\oplus F_l).$$

我们就是这样"想出"、也就是找到一个真的空间 $\Delta^*(P\times Q)/(T'\times T'')$，使分裂也成为真的. 顺着第二行，我们得出

$$\begin{aligned}\rho^*c(E\oplus F) &= (\tilde{\Delta})^*[\prod_{i=1}^{k}(1+c(E_i))\otimes\prod_{j=1}^{l}(1+c(F_j))]\\ &= (\tilde{\Delta})^*(\rho_P^*\otimes\rho_Q^*)(c(E)\otimes c(F))\\ &= \rho^*\Delta^*(c(E)\otimes c(F)) = \rho^*(c(E)\cdot c(F)).\end{aligned}$$

但是 Borel 定理指出 ρ^* 是单射，这样又得出相同的结果. 公式

$$c(E\oplus F) = c(E)\cdot c(F)$$

称为 Whitney 乘积定理. 对于实矢量丛当然也有

$$w(E\oplus F) = w(E)\cdot w(F).$$

注意，右侧卡积的阶现在设想是不同的，原来并不如此，因为在复的情况下 $c(E)$ 是偶数维的而在实情况下 $w(E)$ 是 Z_2类.

注意，对于同态 $\alpha: H\longrightarrow G$，有一个诱导映射

$$\alpha^*: H^*(BG)\longrightarrow H^*(BH),$$

它由分类映射诱导出来：

$$\begin{array}{ccc} EH\times_H G & \xrightarrow{\Phi} & EG\\ \downarrow & & \downarrow\\ BH & \xrightarrow[\tilde{\alpha}]{} & BG.\end{array}$$

映射 Φ 完全由下面的复合所决定：

$$\tilde{\Phi}: EH \longrightarrow EH \times_H G \longrightarrow EG,$$
$$x \longmapsto [x, e].$$

它有以下的性质：$\widetilde{\Phi}(xh) = [xh, e] = [x, he] = [x, \alpha(h)e]$（记住 H 如何作用于 G 上）$= [x, \alpha(h)] = [x, e]\alpha(h)$（记住 G 如何作用在 $EH \times_H G$ 上），亦即

$$\widetilde{\Phi}(xh) = \widetilde{\Phi}(x)\alpha(h).$$

我们称这种映射为 α-等变的．这样，α^* 是由任一个 α-等变映射来计算出来

$$\begin{array}{ccc} EH & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & EG \\ \downarrow & & \downarrow \\ BH & \xrightarrow[\tilde{\alpha}]{} & BG. \end{array}$$

从这个观点看来，图 (b) 中的 h 可以计算出包含映射 $U(k) \times U(l) \subset U(k+l)$ 诱导出的映射 (1)．因为 ρ_G^*，ρ_G^*，ρ_G^* 都是单射，限制到对角线上即可决定 h^*，这在几何上相当于一个分裂（经适当的提升以后）．

例如，可以用同样的程序对一般丛的张量积来计算 $c(E \otimes F)$．由 § 2知，对于线丛有

$$c(E \otimes F) = c(E) + c(F).$$

故若 $E = \bigoplus_i E_i$，$F = \bigoplus_j F_j$，我们有

$$c(E \otimes F) = c(\bigoplus_{i,j}(E_i \otimes F_j)) = \prod_{i,j}(1 + c(E_i) + c(F_j)).$$

形式上看，张量积定义一个同态

$$\alpha: U(k) \times U(l) \longrightarrow U(kl), \quad (g, g') \longmapsto g \otimes g',$$

我们需要计算 α^*．在对角矩阵子群上

$$\alpha: \quad T \times T' \longrightarrow T$$

在 T 的第 i 个因子，T' 的第 j 个因子以及 T 的第 (i, j) 个因子．α 由下式给出

$$\alpha_{ij}: S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1, \quad (\lambda_i, \mu_j) \longmapsto \lambda_i \mu_j.$$

由 § 2的计算知道

$$\alpha_{ij}^*: H^*(BS^1) \longrightarrow H^*(BS^1) \otimes H^*(BS^1)$$
$$t \longmapsto t \otimes 1 + 1 \otimes t.$$

所以

$$\alpha^*: H^*(BT) \longrightarrow H^*(BT') \otimes H^*(BT'')$$

有

$$\alpha^* \prod_{i,j}(1 + t_{i,j}) = \prod_{i,j}(1 + t_i' \otimes 1 + 1 \otimes t_j'').$$

右方的展开式可以用 $H^*(U(k))$ 和 $H^*(U(l))$ 的陈类来表示，因为它是对称的．但是显式的公式可能很复杂．在简单的情况下，例如 $l=1$，可以把

$$\prod_i (1 + t_i' \otimes 1 + 1 \otimes t'')$$

展开为 $1 \otimes t''$ 的多项式．这就给出

Borel-Hirzebruch 公式　若 E 为 n-丛而 F 为线丛，则

$$c(E \otimes F) = \sum_{i=0}^{n} c_i(E)(1 + c(F))^{n-i}.$$

或用分量表示为

$$c_k(E \otimes F) = \sum_{j=0}^{k} \binom{n+j-k}{j} c_{k-j}(E) c(F)^j.$$

我们也需要知道对偶丛的示性类，所以再来重复一下定义．若 V 为一矢量空间，其对偶空间 V^* 即 V 上一切线性泛函 α ($\alpha: V \longrightarrow K$，$K$ 为基域）之空间．若 $\varphi: V \longrightarrow W$ 为一线性映射，它将诱导出另一线性映射 $\varphi^*: W^* \longrightarrow V^*$．令 $E \longrightarrow B$ 为一矢量丛，而有局部坐标 (φ_i, U_i)．对偶丛 $E^* = \bigcup E_b^*$ 即以 E_b 之对偶空间 E_b^* 为 $b \in B$ 处的纤维的丛．局部坐标则为

$$\varphi_i^*: U_i \times V^* \longrightarrow E^*, \quad (b, \alpha) \longmapsto (\varphi_{ib}^{-1})^*(\alpha)$$

（注意，它也给出了 E^* 的拓扑）．故 E^* 的迁移函数为

$$\varphi^*_{ij}(b)=(\varphi^*_{ib})^{-1}(\varphi^*_{jb})=\varphi^*_{ib}(\varphi^{-1}_{jb})^*$$
$$=(\varphi^{-1}_{jb}\circ\varphi_{ib})^*=(\varphi_{ji}(b))^*.$$

现用矩阵来表述：令 $e=(e_1,\cdots,e_n)$ 为 V 的基底而 $(e_1^*,\cdots,e_n^*)$ 为 V^* 中的对偶基底．若 φ_{ij} 在 e 中的矩阵为 A，则 $B=A^{-1}$ 是 φ_{ji} 的矩阵，故对 $\varphi^*_{ij}(b)=(\varphi_{ji}(b))^*=\varphi^*$，我们有

$$\varphi^*(e_k^*)=\sum_l\lambda_{kl}e_l^*,$$

于是

$$\varphi^*(e_k^*)e_p=\lambda_{kp}=e_k^*\varphi(e_p)=e_k^*(\sum_q B_{pq}e_q)=B_{pk},$$

即是说 $(\varphi^*_{ij})=B^t=(A^{-1})^t=((\varphi_{ij})^{-1})^t$．

现设 V 中有内积，则有一自然的映射

$$V\longrightarrow V^*,\quad v\longmapsto\langle\cdot,v\rangle.$$

现在必须区分实的和复的情况．若 V 为实，上式确为一同构，故（自然地有）$V\simeq V^*$，而 $E\simeq E^*$．用矩阵来表述，$A=(\varphi_{ij})$ 现为正交阵，故 $AA^t=I$．于是

$$(\varphi^*_{ij})=((\varphi_{ij})^{-1})^t=(\varphi_{ij}).$$

这又一次证实 $E\simeq E^*$．若 V 为复，则 $\langle\ ,\ \rangle$ 为 Hermitian，即 $\langle\cdot,\lambda v\rangle=\bar\lambda\langle\cdot,v\rangle$．故 V^* 现同构于共轭空间 $\bar V$，$\bar V$ 是 V 中按下式定义数乘的空间：

$$\lambda\circ v=\bar\lambda v.$$

用矩阵来表述，A 为酉阵，故 $A\bar A^t=I$．所以

$$(\varphi^*_{ij})=(\overline{\varphi_{ij}})$$

是 (φ_{ij}) 的共轭阵．

我们要讲这样详细是因为，若令 α 为共轭：

$$\alpha:U(n)\longrightarrow U(n),\quad g\longmapsto\bar g,$$

则它是一同态．我们上面所说的就是：对偶丛或称共轭丛 $E^*=\bar E$ 可看成 E 的 α-扩张．由此可知，可以通过计算 $H^*(BU(n))$ 上的 α^* 来计算 $c(E^*)$，我们有

$$\begin{array}{ccc} H^*(BU(n)) & \xrightarrow{\alpha^*} & H^*(BU(n)) \\ \downarrow \rho^* & & \downarrow \rho^* \\ H^*(BT) & \xrightarrow[\alpha^*]{} & H^*(BT). \end{array}$$

在对角阵子群 $T \subset U(n)$ 上，因为 $|\lambda_i|=1$，我们有

$$\alpha(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = (\overline{\lambda}_1, \cdots, \overline{\lambda}_n) = (\lambda_1^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1}).$$

但由 § 2知，对于

$$S^1 \longrightarrow S^1, \quad g \longmapsto g^k$$

诱导同态是

$$H^*(BS^1) \longrightarrow H^*(BS^1), \quad t \longmapsto kt.$$

取 $k=-1$即有

$$\rho^*\alpha^*(1+\sigma_1+\cdots+\sigma_n) = \alpha^*\rho^*(1+\sigma_1+\cdots+\sigma_n)$$

$$= \alpha^*\prod_i(1+t_i) = \prod_i(1-t_i).$$

这就给出

对偶丛公式 若 $E \longrightarrow B$ 是复 n-丛，E^* 为其对偶丛，则

$$c_i(E^*) = (-1)^i c_i(E).$$

现在可以作一些具体计算了. 若 M 为一流形，我们显然有兴趣于计算其切丛 $TM \longrightarrow M$ 的示性类. 作为一般规则，我们就称之为 M 的示性类. 先从简单情况开始，取 $M=S^n$. 因为 $H^*(S^n)$ 只在 n 阶类上有非零项，所以唯一可能的示性类是 $w_n(M) \in H^n(M;Z_2)$. (注意 $TM \longrightarrow M$ 是实丛，所以我们讨论的是 Whitney 类.) 不幸的是，这一点也不成立，因为我们有

定理 $w(S^n)=1$，即 $w_0(S^n)=1, w_i(S^n)=0, i>0$.

证 令 $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$，注意到 $T(\mathbf{R}^{n+1})|S^n = TS^n \oplus \nu(S^n)$，$\nu(S^n)$ 是 S^n 在 $\mathbf{R}^{n+1}$中的法丛，但 $T(\mathbf{R}^{n+1})$ 是平凡的，所以 $T(\mathbf{R}^{n+1})|S^n = \varepsilon^{n+1}$ 也是平凡的（我们的记号是 $\varepsilon^{n+1}=n+1$维平凡丛）. 再注意到

$$\nu(S^n) = \{(x,y) \in S^n \times \mathbf{R}^{n+1} | y = \lambda x, \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

于是由下述的映射知 $\nu(S^n)=\varepsilon$ 也是平凡的：

$$S^n \times \mathbf{R} \longrightarrow \nu(S^n), \quad (x,\lambda) \longmapsto (x, \lambda x).$$

由 Whitney 乘积公式有

$$w(TS^n \oplus \varepsilon) = w(S^n) \cdot 1 = w(S^{n+1}) = 1.$$

所以，要想得到更有意思的结果，就需要具有更多非零同调群的空间. 例子是实射影空间 $\mathbf{RP}^n$. 回忆到 $H^*(\mathbf{RP}^n; Z_2) = Z_2[t]/(t^{n+1})$，我们有

定理 $w(\mathbf{RP}^n) = (1+t)^{n+1}$.

证 由第三章知 $T(\mathbf{P}^n)$ 可以由下式中作等同关系 $(x, y) \sim (-x, -y)$ 而得

$$TS^n = \{(x,y) \in S^n \times \mathbf{R}^{n+1} \mid \langle x,y \rangle = 0\}.$$

还注意到 $\mathbf{P}^n$ 上的典则线丛 γ 是

$$\gamma = \{([x],y) \in \mathbf{P}^n \times \mathbf{R}^{n+1} \mid y = \lambda x, \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

而对于 γ 又有 $w(\gamma) = 1 + t$.

现在定义 γ 的 $(n+1)$-垂直和以及 $T(\mathbf{P}^n)$ 与一平凡线丛 ε 之直和间的同构 $\bigoplus_{n+1}\gamma \longrightarrow T(\mathbf{P}^n) \oplus \varepsilon$ 如下：$\bigoplus_{n+1}\gamma$ 之点是 $([x], \lambda_0 x, \cdots, \lambda_n x)$，$[x] \in \mathbf{P}^n$，$\lambda_i \in \mathbf{R}$，于是 $y = (\lambda_0, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$，将 y 分解为对 x 平行与垂直的两部分

$$y = \lambda x + y', \quad \langle x, y' \rangle = 0.$$

并定义所需的同构为

$$([x], \lambda_0 x, \cdots, \lambda_n x) \longmapsto ([x, y'], ([x], \lambda)).$$

若把 x 变为 $-x$，则

$$([x], \lambda_0 x, \cdots, \lambda_n x) = ([-x], (-\lambda_0)(-x), \cdots, (-\lambda_n)(-x)),$$

所以 y 变成了 $-y$. 因为

$$-y = -(\lambda x) - y' = \lambda(-x) + (-y'),$$

所以 y' 变成 $-y'$ 而 λ 不变. 因此，我们的映射是适当定义的. 由 Whitney 公式又得定理之证.

注意，复射影空间 $\mathbf{CP}^n$ 是一复流形. 所以其切丛也是一复矢量丛. 于是可以讨论其陈类. 可以和上面一样来进行计算. 但有一

点小的改变. $\bigoplus_{n+1}\gamma$ 中的点仍可写为（$[x]$，$\lambda_0 x$，…，$\lambda_n x$）. 注意到 x 应允许变成 λx，$\lambda\in \mathbf{C}$ 是单位复数，容易验证，现在应取 $y=(\bar{\lambda}_0,\cdots,\bar{\lambda}_n)\in \mathbf{C}^{n+1}$. 这意味着这一次应该取与共轭典则线丛的同构

$$\bigoplus_{n+1}\bar{\gamma}\longrightarrow T(\mathbf{CP}^n)\oplus\varepsilon.$$

现在，$H^*(\mathbf{CP}^n;Z)=Z[t]/(t^{n+1})$，而 $t\in H^2(\mathbf{CP}^n;Z)=Z$ 是一生成元，所以有两种选择. 很清楚，它们相应于 γ 和 $\bar{\gamma}$ 的示性 S^1-类. 事实上，当我们在 § 2中定义 S^1-类时，并没有弄明白怎样在 $H^2(\mathbf{CP}^\infty)$ 中取生成元. 这个疑点将在以后弄清，现在则有

定理 对 n 维复射影空间 $\mathbf{CP}^n$，令 $t\in H^2(\mathbf{CP}^n;Z)$ 为 $\mathbf{CP}^n$ 上的共轭典则线丛的示性 S^1-类，则

$$c(\mathbf{CP}^n)=(1+t)^{n+1}.$$

作为这些结果的一个应用，注意到从一开始起，一个中心问题就是流形的切丛 TM 是否为平凡，或者是有多少线性无关的截口. 上述定理表明

$$c_i(\mathbf{CP}^n)=\binom{n+1}{i}t^i\neq 0,\quad 0\leqslant i\leqslant n.$$

所以我们知道 $\mathbf{CP}^n$ 没有（复）截口. 因为，如果它有，则 $T(\mathbf{CP}^n)=E\oplus\varepsilon$，$E$ 是一个（$n-1$）-丛，所以 $c_n(\mathbf{CP}^n)=0$. 既如此，我们这样就理解了 $T(\mathbf{CP}^n)$ 是多么的不平凡.

在实情况下，尽管公式相同，我们得到的是不同的结果，因为这一次我们用的是 Z_2. 例如，在 mod 2意义下 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=a^2+b^2$.

定理 (Stiefel) 当且仅当 $n=2^k-1$时 $w(\mathbf{RP}^n)=1$.

证 若 $n=2^k-1$，则

$$w(\mathbf{RP}^n)=(1+t)^{n+1}=(1+t)^{2^k}=1+t^{2^k}=1,$$

因为在 $H^*(\mathbf{RP}^n)$ 中 $t^{2^k}=0$. 若 $n\neq 2^k-1$，可以写出 $n+1=2^km$ 而 m 为奇，$m>1$. 于是

$$w(\mathbf{RP}^n)=[(1+t)^{2^k}]^m=(1+t^{2^k})^m=1+m\cdot t^{2^k}+\cdots.$$

但在 $H^*(\mathbb{RP}^n)$ 中 $m\cdot t^{2^k}\neq 0$，因为 m 为奇而且$2^k\leqslant n$.

Stiefel 定理在代数中有一著名的应用．这就是所谓可除代数问题：令 V 为一 n 维实矢量空间，何时存在一个乘法 $V\times V\longrightarrow V$ 使 V 成为 $\mathbb{R}$ 上的可除代数．这问题与示性类有什么关系并不是显然的．但是马上就会看到确有关系．我们先把问题弄明确．我们对乘积的要求是：

(1) 它服从分配律，即是双线性的；

(2) 具有恒等元1；

(3) 但并不要求结合性.

因为没有零因子：$x\neq 0$，$y\neq 0\Rightarrow xy\neq 0$．故在适当规范化以后，可以设此积定义在球面上

$$S^{n-1}\times S^{n-1}\longrightarrow S^{n-1}.$$

令 $(1, e_1, \cdots, e_{n-1})$ 是 V 的一个基底．则对每个 $x\in S^{n-1}$，$(x, e_1x, \cdots, e_{n-1}x)$ 也是一个基底．这就是无零因子条件．因为

$$\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i e_i x=0\Rightarrow\left(\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i e_i\right)x=0\Rightarrow\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i e_i=0.$$

由 Gram-Schmidt 手续可以把它化为正交基，即

$$\rho_i(x)=e_ix,\qquad i=1,2,\cdots,(n-1)$$

是切丛 TS^{n-1}的 $n-1$个线性无关截口．由于有双线性，我们又有

$$\rho_i(-x)=-e_ix=-\rho_i(x).$$

注意 $T(\mathbb{P}^{n-1})$ 是 TS^{n-1}在等同关系 $u\longmapsto -u$ 下的商空间．于是由下式，ρ_i 诱导出 $T(\mathbb{P}^{n-1})$ 上的截口

$$\widetilde{\rho_i}([x])=[\rho_i(x)].$$

这表明 $T(\mathbb{P}^{n-1})$ 是平凡的．故由 Stiefel 定理，$n=2^k$．我们知道，对于 $k=0$，1，2，V 分别为实代数 $\mathbb{R}$，复代数 $\mathbb{C}$ 和四元数代数 $\mathbb{Q}$．不太熟悉的情况是 $k=3$．在 $\mathbb{R}^8$上可定义一乘法称为 Cayley 代数．它一定是非结合的．$k>3$又如何?从上面可以看到，我们其实是在代

数乘法的外表下讨论矢量场．这是个很有用的想法．终于导致关于球面上的独立矢量场的确切个数的 Adams 的著名结果，由它可知，除了上面四个已知情况外，R 上再没有其它的可除代数了．

§4. 其它的讲法

§2中给出的陈类与 Stiefel-Whitney 类的定义并不是唯一的讲法．事实上，读者在文献中可以遇到许多不同的讲法都是讲的同一的东西．虽然这里不能讨论所有的，至少可以提到一些讲法．和平常一样，我们从陈类开始．

令 $\xi: E \longrightarrow B$ 为一复 n-丛．回想一下我们对陈类的定义是基于分裂原理的．取 E 的主丛 $P \longrightarrow B$，并由其中作商以除去对角阵子群 $T \subset U(n)$ 的作用而得另一个丛 ρ：$P/T \longrightarrow B$（顺便提一下，它称为 E 的“旗”丛）．于是 $\rho^*(E) = \bigoplus_i E_i$ 分裂为线丛的直和．因为 ρ^* 在上同调类上是一对一的，故

$$\rho^*(c(E)) = \prod_i (1 + c(E_i))$$

唯一地决定了 $c(E)$．这在具体计算上有时不太方便，因为我们需要离开原有的对象 E 而在另一个 P 上从事．只要可能，我们还是愿意尽可能地在“老家”里搞．如平时一样，仍设 E 中有内积．于是有球丛

$$S(E) = \{u \in E \mid \|u\| = 1\}.$$

和在单个线性空间上一样，群 S^1 以数乘自由地作用在 E 上，而轨道空间 $S(E)/S^1 = P(E) \longrightarrow B$ 是 B 上的射影空间丛．我们有图式

$$\begin{array}{ccc} S(E) & & \\ & \searrow^{\eta} & \\ \xi\downarrow & & P(E). \\ & \swarrow_{\rho} & \\ B & & \end{array}$$

η 作为一个主 S^1-丛，其陈类 $c(\eta) \in H^2(P(E))$．由陈类的自然性，

$c(\eta)$ 限制在纤维 $(P(E))_b$ 上时是 $H^2(P(E)_b)$ 的生成元. 由 Leray-Hirsch 定理, $(1, c(\eta), \cdots, c(\eta)^{n-1})$ 是 $H^*(P(E))$ 作为 $H^*(B)$-模的基底, 故有唯一的关系式

$$c(\eta)^n + \lambda_1 c(\eta)^{n-1} + \cdots + \lambda_n = 0,$$

其系数 $\lambda_i \in H^{2i}(B)$.

定理 上式中 $\lambda_i = (-1)^{i-1} c_i(E)$.

证明仿照某些一般方法是容易的. 注意, 若 $P \longrightarrow B$ 是一主 G-丛而 F 为一 G-空间, 则有扭积 $P \times_G F \longrightarrow B$. 将它应用于 $F = G/H$ 为一左陪集空间的特例, 即得一特殊结果即在等同关系

$$P \times_G F \longrightarrow P/H, [x, \bar{g}] \longmapsto \overline{xg}$$

下, $P \times_G F = P/H$.

令 $P \longrightarrow B$ 为 E 的主 $U(n)$-丛. 因为 $S^{2n-1} = U(n)/U(n-1)$, $\mathbb{C}P^{n-1} = U(n)/(U(n-1) \times S^1)$, 故有

$$S(E) = P \times_{U(n)} (U(n)/U(n-1)) = P/U(n-1),$$

$$P(E) = P \times_{U(n)} (U(n)/(U(n-1) \times U(1)))$$

$$= P/(U(n-1) \times U(1)).$$

再回看 Borel 定理证明中的序列

$$T = G_n \subset G_{n-1} \subset \cdots \subset G_k \subset \cdots \subset G_0 = G,$$

即知 $U(n-1) \times U(1) = G$ 就是最后一步. 我们有图式

$$\begin{array}{ccc} P/T = P/G_n & & \\ & \searrow \pi & \\ \rho \downarrow & & P/G_1 = P(E). \\ & \swarrow p & \\ B & & \end{array}$$

回忆起 $c_i(E)$ 的定义是

$$\rho^*\left(\sum_{i=0}^{n} c_i(E) x^{n-i}\right) = \prod_{k=1}^{n} (x + c(E_k)), \tag{1}$$

x 是未定元. 很清楚, 在

$$\pi: P/T = P/(T^{n-1} \times S^1) \longrightarrow P/G_1 = P/(U(n-1) \times S^1)$$

中, 我们有 $\pi^* c(\eta) = c(E_n)$. 若令 $x = -c(E_n)$, (1) 式为0. 注

意到 $\rho^* = \pi^* p^*$，而在 $H^*(P(E))$ 的 $H^*(B)$-模构造中我们直接记 $p^*(u) \cdot v = u \cdot v$. 故方程（1）成为

$$\pi^*\left[\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}c_i(E)c(\eta)^{n-i}\right] = 0.$$

但由 Borel 定理的证明知 π^* 是单射的复合（反复应用 Leray-Hirsch 定理），因此本身也是单射. 于是定理得证.

对于 Stiefel-Whitney 类自然也有平行的结果.

文献 [1] 中的另一种讲法则是以 Euler 类为本原的东西. 因为 Euler 类本身也是重要的不变量，所以我们也要讲一下这种讲法. 注意，若 $\pi: E \longrightarrow B$ 为可定向实 n 维丛，则有 Thom 类 $U(E) \in H^n(E, \dot{E}; Z)$（整系数）以表示 E 的定向. 和平常一样，设 E 中已有内积. 定义圆盘丛 $D(E)$ 为

$$D(E) = \{u \in E \mid \|u\| \leqslant 1\},$$

于是 $(D(E), S(E)) \subset (E, \dot{E})$ 是一切断，所以可认为 $U(E) \in H^n(D(E), S(E))$. Euler 类 $\chi(E) \in H^n(B; Z)$ 的定义是

$$\begin{array}{ccccc} H^n(D(E), S(E)) & \xrightarrow{j^*} & H^n(D(E)) & \xrightarrow{\pi^{*-1}} & H^n(B), \\ U(E) & \longmapsto & & & \chi(E). \end{array}$$

这一作法显然是函子的，所以我们作出了 $H^*(BSO(n))$ 的示性类. 因为我们还没有多讨论过这个代数的构造，所以还没有很多可说.

现令 $\pi: E \longrightarrow B$ 为一复 n-丛. 把 E 看成一个实 $2n$-丛，它有典则的定向. 所以在复范畴中也有一示性类 $\chi \in H^{2n}(BU(n))$. 它一定是陈类的多项式. 因为 $\deg\chi = 2n$，此多项式之形状必为

$$\chi = ac_n + P(c_1, \cdots, c_{n-1}),$$

$a \in Z$ 而 P 是只含 $c_1, \cdots, c_{n-1}$ 的另一多项式. 最好的情况当然是 $a = 1$，$P = 0$. 这一点不难看到. 关键就在于下面的

Euler 类乘积公式 对定向丛 $E \longrightarrow B$ 和 $F \longrightarrow B$,

$$\chi(E \oplus F) = \chi(E) \cdot \chi(F).$$

证 作外和 $E \times F \longrightarrow B \times B$，我们有

$$D(E\oplus F)=D(E)\times D(F),$$
$$S(E\oplus F)=S(E)\times D(F)\cup D(E)\times S(F).$$
于是
$$\begin{aligned}(D(E\oplus F),S(E\oplus F))&=(D(E)\times D(F),S(E)\times D(F)\cup D(E)\times S(F))\\&=(D(E),S(E))\times(D(F),S(F)).\end{aligned}$$
显然，外上积 $U(E)\times U(F)=\pi_1^*U(E)\cdot\pi_2^*U(F)\in H^{n+m}(D(E\oplus F),S(E\oplus F))$ 是 $E\oplus F$ 的 Thom 类. 注意到外上积在对角映射 $\Delta:B\longrightarrow B\times B$ 下成为上积，再用映射的自然性，即得定理之证明.

现讨论线丛情况. 令 $E\longrightarrow BS^1=\mathbf{CP}^\infty$ 为万有线丛. 注意到第十章中讲的 Gysin 序列
$$\longrightarrow H^{2i-2}(S(E))\longrightarrow H^{2i-2}(B)\xrightarrow{\alpha}$$
$$H^{2i}(B)\longrightarrow H^{2i}(S(E))\longrightarrow H^{2i}(B)\longrightarrow,$$
α 是乘以 $\chi(E)$. 在万有的情况下
$$S(E)=ES^1\times_{S^1}S^1=ES^1$$
是可缩的. 取 $i=1$ 有
$$0\longrightarrow H^0(BS^1)\longrightarrow H^2(BS^1)\longrightarrow 0,$$
$$1\quad\longmapsto\quad\chi,$$
故 $\chi=\pm t$，这里 $t\in H^*(BS^1)=Z[t]$ 是我们用以定义万有 S^1-类的生成元. 前面说过，我们还不清楚怎样选生成元 t. 但 χ 是典则定义的，所以我们自然地约定以后 t 就选为 χ(万有丛).

一般情况现在就容易了. 在下图中，
$$\begin{array}{ccc}EU(n)&&\\ \downarrow&\searrow&\\ &\swarrow_{p}& BT,\\ BU(n)&&\end{array}$$
万有丛 $E\longrightarrow BU(n)$ 在 BT 中分裂为线丛

$$\rho^*(E) = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n,$$

而 $\chi(E_i) = t_i$，故由乘积公式

$$\rho^*(\chi) = \prod_{i=1}^{n} t_i.$$

这正是 c_n 的定义.

现在就容易说清怎样用 Euler 类来定义一切陈类了. 对线丛，我们已完成了这件事. 设对维数 $k \leqslant n$ 的丛，已归纳地定义了 $c_1, \cdots, c_k$. 令 $\pi: E \longrightarrow B$ 为一 n-丛，$\pi^*(E)$ 在球丛上分裂为直和 $\pi^*(E) = E' \oplus L$，E' 为一 $(n-1)$-丛而 L 为一线丛. 这是因为 $\pi^*(E)$ 在图式

$$\begin{array}{ccc} S(E) = P/U(n-1) & & \\ & \searrow & \\ \pi \downarrow & & P/(U(n-1) \times U(1)) = A \\ & \swarrow \rho & \\ B & & \end{array}$$

中变成 A，而 $\rho^*(E)$ 在其上有群 $U(n-1) \times U(1)$，即可分裂如上. 事实上，E' 可以直接定义为

$$E' = \{(u,v) \in S(E) \times E \mid \pi(u) = \pi(v), \langle u,v \rangle = 0\}.$$

注意因 $u \neq 0$，故它实为一 $(n-1)$-丛. 由 Gysin 序列

$$\longrightarrow H^{i-2n}(B) \longrightarrow H^i(B) \xrightarrow{\pi^*} H^i(S(E)) \longrightarrow H^{i-2n+1}(B) \longrightarrow$$

可见当 $i < 2n$ 时 π^* 是同构. 现在定义

$$c_n(E) = \chi(E), \quad c_i(E) = (\pi_{2i}^*)^{-1} c_i(E'), \quad i < n.$$

上面的讨论已经给出了此定义为合理的归纳证明.

对于实丛，恒有 Z_2 系数的 Thom 类而不问可定向性. 即是说可对 $H^*(BO(n); Z_2)$ 重复上述一切.

很清楚，以上全部计算的要点就在 Whitney 乘积公式. 事实上，陈类定义本身：$\sum_{i=0}^{n} c_i = \prod_{i=1}^{n} (1+t_i)$ 就意味着我们需要此公式为真，因为其右方正是线丛直和的乘积公式. 所以，设想此公式可以完全决定这一理论，即以它作为公理式的定义，是有道理的. 这

样，对于每一个复 n-丛 $E\longrightarrow B$，均可指定类 $c_i(E)\in H^{2i}(B;Z)$，$c_0=1$，$c(E)=\sum_{i=0}^{n}c_i(E)$．我们要求

(1)　指定的方法是函子的；

(2)　$c(E\oplus F)=c(E)\cdot c(F)$．

这当然还不够，因为若对一切 E 均指定 $c(E)=1$ 是符合（1）和（2）的．所以还要增加一点实质的

(3)　对于万有线丛 $E\longrightarrow \mathbf{CP}^{\infty}$，　$c_1(E)=\chi(E)$．

这类事情通常都是：事先知道它成立以后再去证明它总是容易的，但若以它为定义就根本不知道它是怎样来的了．我们采用的定义（在很大程度上归功于 A. Borel）也是这么一回事，当然也归功于许多人的贡献，其中值得一提的就有 Whitney、Stiefel、陈省身、吴文俊．但它确实给了整个领域一个统一的观点而且颇为有效．举例来说，并不容易看出，当 Stiefel-Whitney 类原是作为障碍类来定义的，为什么会有乘积公式．

§5. Pontrjagin 类

我们在§2中已经看到，陈类和 Stiefel-Whitney 类都自然地来自 Borel 定理．然而陈类被认为是完全的，因为它决定了 $BU(n)$ 的整系数上同调 $H^*(BU(n);Z)$．相反地平行的计算只对 $BO(n)$ 的 mod 2上同调 $H^*(BO(n);Z_2)$ 成立．结果，Stiefel-Whitney 类比陈类弱多了．下一步合逻辑的事就是改进我们的结果以决定 $BO(n)$ 的整系数上同调 $H^*(BO(n);Z)$．结果是，$H^*(BO(n);Z)$ 比 $H^*(BU(n);Z)$ 复杂得多，因为其中有挠元素（即有限阶元素）．所以我们将不再按 Borel 的方式直接计算，而是通过复化这种程序几何地引入 $H^*(BO(n);Z)$ 的整系数类．这种作法本身也是重要的．

先很一般地开始，令 R 为具有恒等元的可换环，M 为（左）R-模．若 $R\subset S$ 是一个更大的环 S 的子环，则可将标量环由 R 扩大为

S，即将 M 扩张为一 S-模．只需考虑张量积 $S\otimes_R M$ 并定义数乘如下即可：

$$s(s'\otimes x)=ss'\otimes x,\quad s,s'\in S,x\in M.$$

回忆一下，$\otimes_R$ 的意义如下：由张量积的定义，若 $r\in R$，则 $sr\otimes x=s\otimes rx$，即 R 中的系数可以在两个坐标间互换．把它与主 H-丛 $E\times_H G$ 将群 $H\subset G$ 扩张，以及与关系式 $[xh,g]=[x,hg]$ 比较是有意义的．其实，包含关系 $R\subset S$ 也可代以群同态 $\alpha:R\longrightarrow S$，只要将上述关系代以 $s\otimes rx=s\alpha(r)\otimes x$.

$\mathbf{R}$ 上的矢量空间的复化就是将 $\mathbf{R}$ 扩张为 $\mathbf{C}$. 我们将记其复化为 $V_{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{R}}V$．这在前面已讨论过了，但记号不同．因为 $\mathbf{C}=\mathbf{R}\oplus\mathbf{R}$ $(a+ib\longmapsto(a,b))$，作为一个实矢量空间，我们有

$$V_{\mathbf{C}}=V\oplus V$$

$((x,y)\longmapsto 1\otimes x+i\otimes y)$．于是乘以 i 的运算定义为

$$i(x,y)=(i\otimes x-1\otimes y)=(-y,x).\tag{1}$$

这两种记号其实是一样的，因为

$$(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+i(y,0)=x+iy,$$

即有嵌入关系 $V\subset V_{\mathbf{C}}$，定义为 $x\longmapsto(x,0)$.

照抄这个程序可定义实丛 $E\longrightarrow B$ 的复化为 $E\oplus E$，而乘以 i 的运算定义如 (1)．这使 $E\oplus E$ 成一复丛，记作 $E_{\mathbf{C}}$. 既然是讨论丛，读者应验证局部坐标．易见 $E_{\mathbf{C}}$ 与 E 的迁移函数同为 (φ_{ij})，不过把 φ_{ij} 看成复矩阵．换言之，$E_{\mathbf{C}}$ 即 E 通过自然的包含 $O(n)\subset U(n)$ 而得的 $U(n)$ 扩张．即若 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 E 的实内积，$E_{\mathbf{C}}$ 中则应赋以 Hermitian 内积

$$\langle x+iy,x_1+iy_1\rangle=\langle x,x_1\rangle+\langle y,y_1\rangle+i(\langle y,x_1\rangle-\langle x,y_1\rangle).$$

预备知识至此为止．今定义实丛 $E\longrightarrow B$ 的 Pontrjagin 类为

$$p_i(E)=(-1)^i c_{2i}(E_{\mathbf{C}}).$$

于是有

$$p_i(E)\in H^{4i}(B;Z)$$

而且只对 $2i\leqslant n=\dim E$ 的 i 有定义．

问题在于为什么只用偶阶陈类，又为何有 $(-1)^i$. 抛去奇数阶陈类的理由在于它不重要. 回忆起，对于复丛 $E \longrightarrow B$ 可定义其共轭丛 $\bar{E}$ 如下：

$$i \circ x = \overline{i} x = - ix.$$

若 $E \simeq \bar{E}$，复丛 E 就称为自共轭的，即存在一共轭线性丛映射 $\varphi: E \longrightarrow E$. 若 E_C 是 E 的复化，它必为自共轭的. 所需的 φ 是

$$\varphi(x,y) = (x, -y) \qquad (x + iy \longmapsto x - iy),$$

所以有

$$\begin{aligned}\varphi(i(x,y)) = \varphi(-y,x) = (-y, -x) \\ = - i(x, -y) = - i\varphi(x,y).\end{aligned}$$

但我们在§3已算出了

$$c_i(\bar{E}) = (-1)^i c_i(E).$$

故有 $c_i(E_C) = (-1)^i c_i(E_C)$，故对奇数 i 有 $2c_i(E_C) = 0$. 前面说奇数阶陈类不重要就是指此. 它们实际上是 mod 2类，所以可用 Stiefel Whitney 类描述.

有一点要注意，共轭 $\varphi: E \longrightarrow E, \varphi(x,y) = (x, -y)$，正是通常的复数共轭 $x+iy \longmapsto x-iy$. 那么为什么不能对任意矢量空间 V 来作呢?事实上作起来毫无困难. 取 V 的一个基底 $(e_1, \cdots, e_n)$ 并定义

$$(\sum \lambda_i e_i) \longmapsto \sum \bar{\lambda}_i e_i$$

其实连这也不必要. 任两个同维数的复矢量空间总是同构的. 但若每一个复矢量空间总是自对偶的，是否每一个复矢量丛也是自对偶的?否. 上面的同构依赖于基底，所以不能保证有一丛映射，而 E_C 上的自然共轭是丛映射（请检验）.

再讲记号. 设从复矢量空间 V 开始. 恒可忽略 i 并视之为实矢量空间，称为 V_R. 既是实矢量空间，则又可复化而得 V_{RC}. 将它与作为复空间的 V 比较又如何?先把记号弄明确一些. 先讨论 V 上的乘以 i. 我们如通常那样记之为 ix. V_{RC} 上也有乘以 i 的运算 $i(x,$

$y) = (-y, x)$. 为避免混淆，记之为 $J(x,y) = (-y, x)$. 现在是要比较 (V, i) 与 (V_{RC}, J). 例如以下的包含关系

$$V \longrightarrow V_{RC}, \quad x \longmapsto (x, 0), \quad y \longmapsto (0, y)$$

均非同态.

但是，

$$V \longrightarrow V_{RC}, \quad x \longmapsto (x, -\mathrm{i}x)$$

是线性的. 因为

$$\mathrm{i}x \longmapsto (\mathrm{i}x, x) = J(x, -\mathrm{i}x).$$

类似的，

$$V \longrightarrow V_{RC}, \quad x \longmapsto (x, \mathrm{i}x)$$

是共轭线性的. 记其象为 V^+，V^-. 容易验证 $V_{RC} = V^+ \oplus V^-$.

因为这些都是自然的，所以可以转移到丛，这就说明了，对于复矢量丛 E，我们有 $E_{RC} = E \oplus \bar{E}$.

由定义有

$$1 - p_1(E_R) + p_2(E_R) - \cdots = (1 + c_1(E) + \cdots)$$
$$(1 - c_1(E) + \cdots).$$

作一形式分解

$$c(E) = \prod(1 + t_i), \quad c(\bar{E}) = \prod(1 - t_i),$$

即有

$$\sum_i (-1)^i p_i(E_R) = \prod_{i=1}^n (1 - t_i^2).$$

改变右方的符号可使左方所有的 $(-1)^i$ 去掉，即有

$$\sum_i p_i(E_R) = \prod_{i=1}^n (1 + t_i^2).$$

故对复丛 E，相应 E_R 的 Pontrjagin 类可以解释为 t_i^2 的初等对称函数. 选用符号 $(-1)^i$ 就是为了要得出这一解释. 例如，复射影空间 $\mathbf{CP}^n$ 的陈类是

$$c(\mathbf{CP}^n) = (1 + t)^{n+1}.$$

故其 Pontrjagin 类是

$$p(\mathbf{CP}^n) = (1 + t^2)^{n+1}.$$

Pontrjagin 类满足一较弱的乘积法则．对于实丛 E 和 F，显然有 $(E \oplus F)_{\mathbf{C}} = E_{\mathbf{C}} \oplus F_{\mathbf{C}}$．故

$$c_{2k}(E \oplus F)_{\mathbf{C}} = \sum_{i+j=2k} c_i(E_{\mathbf{C}}) \cdot c_j(F_{\mathbf{C}}).$$

去掉一切 i 或 j 为奇的项，即有

$$c_{2k}(E \oplus F)_{\mathbf{C}} = \sum_{i+j=k} c_{2i}(E_{\mathbf{C}}) c_{2j}(F_{\mathbf{C}}) \quad \bmod 2.$$

乘以 $(-1)^k = (-1)^i(-1)^j$，即得

$$p_k(E \oplus F) = \sum_{i+j=k} p_i(E) p_j(F) \quad \bmod 2.$$

亦即

$$p(E \oplus F) = p(E) \cdot p(F) \quad \bmod 2.$$

"mod 2" 表示模去 $H^*(B;Z)$ 阶为2的元素之子群.

§6. K-群和陈特征标

我们再来看一下 Whitney 乘积公式

$$c(E \oplus F) = c(E) \cdot c(F).$$

我们已看到它在例如对于射影空间的陈类的计算中起了关键作用．另一方面，和所有代数拓扑不变量一样，计算方便是以牺牲结果的灵敏度为代价的．在现在情况下，我们注意到，若 F 是平凡的，则 $c(F) = 1$，而

$$c(E \oplus F) = c(E).$$

乍一看，从一个丛中取出或加进平凡丛没有什么影响．但事实并不如此．只需看一个很简单的例子．对于 $S^2 \subset \mathbf{R}^3$，我们有

$$T(S^2) \oplus \nu = T(\mathbf{R}^3)|S^2 = (\text{平凡丛 } \varepsilon)^3.$$

ν 是法丛，因此也是平凡的：

$$\nu = \{(x,y) \in S^2 \times \mathbf{R}^3 | \quad y = \lambda x\}.$$

但是我们确实知道 $T(S^2)$ 并非平凡．因此我们有

$$T(S^2) \oplus \varepsilon = \varepsilon^3 = \varepsilon^2 \oplus \varepsilon,$$

但 $T(S^2)\neq\varepsilon^2$. 换言之，相消律对 Whitney 和不适用. 因此要引入一种等价关系. 丛 E 与 F 称为稳定等价，如果有平凡丛 ε^k 和 ε^l 使得

$$E\oplus\varepsilon^k=F\oplus\varepsilon^l$$

（注意，E 与 F 维数不必相同）. 等价类 $\{E\}$ 称为一稳定丛. 用形式语言来说，陈类和 Stiefel 类都是稳定丛的不变量.

令 $V(B)$ 记 B 上矢量丛的同构类. $V(B)$ 是 Whitney 和下的半群. 用 $\widetilde{K}(B)=V(B)/\sim$ 记 B 上稳定丛的集. 关于 $\widetilde{K}(B)$ 主要的有意思的结果是

命题 $\widetilde{K}(B)$ 至少当 B 为紧时在 Whitney 和下是 Abel 群.

证 任意平凡丛 ε^k 的类 $\{\varepsilon^k\}$ 是 $\widetilde{K}(B)$之零元. 我们要证逆元的存在，即已给丛 E 时必可找到另一丛 F 使得

$$E\oplus F=(\text{平凡丛 }\varepsilon)^k.$$

由丛的分裂正合性质（第三章），只需证明必有某 ε^k 使 $E\subset\varepsilon^k$ 为其子丛. 取局部坐标的有限族 $\{(U_i,\varphi_i)\},i=1,\cdots,N$，并定义

$$\varphi:\quad E\longrightarrow B\times V^N,u\longmapsto(b,\sum_i\alpha_i(b)\varphi_{ib}^{-1}(u)),$$

$b=\pi(u),\{\alpha_i\}$ 是从属于 $\{U_i\}$ 的一的分割，V 是 E 的模型空间. 要证明 E 是子丛意味着对每个 $b\in B$ 证明 $\varphi:E_b\longrightarrow V^N$ 为线性单射. 线性是显然的. 若

$$\sum_i\alpha_i(b)\varphi_{ib}^{-1}(u)=0,$$

则由直和 V^N 之定义知每一项 $\alpha_i(b)\varphi_{ib}^{-1}(u)=0$. 但若对某个 i，$\alpha_i(b)\neq0$，则对此 i，$\varphi_{ib}^{-1}(u)=0$，从而 $u=0$，因为 φ_{ib}是同构.

于是得一函数（称为陈映射）

$$c:\widetilde{K}(B)\longrightarrow H^*(B),\quad\{E\}\longmapsto c(E).$$

从代数的形式观点看来，陈映射并不令人满意. 它可说是行为不当，因为它变和为积. 同样，$V(B)$ 中的张量积不能搬到 $\widetilde{K}(B)$ 上. 为了改善一下，回到 $V(B)$. 它是$\oplus$下的半群，很象正整数集 N. 所以和在算术中把 N 扩张成 Z 一样，可以引入负丛. 利用万有性

质来作是很方便的. 若 S 为半群而 A 为群, 映射 $\varphi: S \longrightarrow A$ 称为加法的, 如果

$$\varphi(s_1+s_2)=\varphi(s_1)+\varphi(s_2)$$

(S 中可能没有零元). 由 S 生成的群就定义为 $(A(S),\varphi)$, 其中 $A(S)$ 是一群. 而 $\varphi: S \longrightarrow A(S)$ 是加法的. 它满足以下的万有性质:

(1) $A(S)$ 是由 $\varphi(S) \subset A(S)$ 生成的.

(2) 若 A' 是任一群而 $\psi: S \longrightarrow A'$ 是加法的, 则有一群同态 $\tilde{\psi}: A(S) \longrightarrow A'$ 使下图是交换的

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\varphi} & A(S) \\ & \psi \searrow \quad \swarrow \tilde{\psi} & \\ & A'. & \end{array}$$

因此 $\tilde{\psi}$ 是唯一的.

和通常一样, 若 $A(S)$ 存在则它是唯一的. 构造 $A(S)$ 有种种方法. 下面仅举其二.

(1) 令 $F(S)$ 为 S 作为一个集所生成的自由 Abel 群. 在 $F(S)$ 中令 I 为以下形状的元生成的子群: $s_1+s_2-s_1\oplus s_2$, $+$, $-$ 都是 $F(S)$ 中的群运算, $\oplus$ 则是 S 中的运算. 令 $S \subset F(S)$ 为包含, $\pi: F(S) \longrightarrow F(S)/I$ 为投影, 则 $A(S)=F(S)/I, \varphi=\pi \circ i$ 定义一个万有代数 $(A(S),\varphi)$. 这是 Grothendieck 作法.

(2) 在 $S \times S$ 中定义等价关系 $\sim$ 如下:

$(s_1, s_2) \sim (s_1', s_2') \Leftrightarrow$ 存在 $s'' \in S$ 使 $s_1 \oplus s_2' \oplus s'' = s_2 \oplus s_1' \oplus s''$.

由 N 作 Z 通常就是这样作的, 只不过我们加进 s'' 以保证 $\sim$ 是等价关系, 因为 S 中不一定有相消律 (若有, 就不需要 s'' 了). 令 $A(S)=S \times S/\sim$ 并附有逐点的加法. $A(S)$ 是一群, 而 $[s_1, s_2]$ 之逆是 $[s_2, s_1]$. 今定义 $\varphi: S \longrightarrow A(S)$ 为 $\varphi(s)=[s \oplus *, *]$, $* \in S$ 是任意固定元 (若 S 中有0, 可取 $*=0$). 于是 $[s_1, s_2]$ 可写作

$$[s_1, s_2] = [s_1 \oplus *, *] + [*, * \oplus s_2]$$
$$= [s_1 \oplus *, *] - [s_2 \oplus *, *]$$
$$= \varphi(s_1) - \varphi(s_2).$$

若 $S = V(B)$，则 $A(V(B)) = K(B)$ 称为 B 的（实的或复的）K 群. 注意 $V(B)$ 中的张量积$\otimes$变为 $K(B)$ 中的乘法（例如可用 Grothendieck 作法）. 这样 $K(B)$ 成为具有恒等元（$1=$平凡线丛）的可换环.

可以把整数环 Z 嵌入到 $K(B)$ 中如下：

$$Z \longrightarrow K(B), \quad 1 \longmapsto [\text{平凡线丛}].$$

映射

$$V(B) \longrightarrow \widetilde{K}(B), \quad E \longmapsto \{E\}$$

是加法的，从而诱导出一同态

$$s: K(B) \longrightarrow \widetilde{K}(B), \quad [E] \longmapsto \{E\}.$$

我们再定义

$$r: \widetilde{K}(B) \longrightarrow K(B), \quad \{E\} \longmapsto [E] - \dim E.$$

易见下式是分裂正合的：

$$0 \longrightarrow Z \longrightarrow K(B) \underset{r}{\overset{s}{\rightleftarrows}} \widetilde{K}(B) \longrightarrow 0.$$

故有，作为群：

$$\widetilde{K}(B) = K(B)/Z$$

（$Z \subset K(B)$ 只是子环，而非理想子环）. 因此，稳定群 $\widetilde{K}(B)$ 也称为化约 K 群.

一般概念就讲到这里. 陈类 $c: K(B) \longrightarrow H^*(B)$ 在 $K(B)$ 上仍有意义. 但是这个映射还是不行. 为了定义正确的映射，即一环同态，回忆起，在 $H^*(BT) = Z[t_1, \cdots, t_n]$ 中，任意对称多项式都来自 $H^*(BU(n))$. 特别是，表达式

$$\mathrm{ch} = \sum_{i=1}^{n} e^{t_i}$$

是对称的，称为陈特征标. 例如，可展开 e^t 而得

$\mathrm{ch}_0 = n = \dim E$,

$\mathrm{ch}_1 = t_1 + \cdots + t_n = c_1$,

$$\mathrm{ch}_2=\frac{1}{2}\ (t_1^2+\cdots+t_n^2)\ =\frac{1}{2}\ (t_1+\cdots+t_n)^2-\sum t_it_j$$
$$=\frac{1}{2}c_1^2-c_2,$$
$$\cdots.$$

需要作一些修正．首先，ch 具有理系数，从而是在 $H^*(BU(n);Q)$ 中．它又没有末项，因而是形式幂级数而在 $H^{**}(BU(n);Q)$ 中，它不是多项式而不在 $H^*(BU(n);Q)$ 中．但我们不想引入更多的记号以示区别．这样在把 $K(B)$ 扩张到 $Z\subset Q$ 模后，我们有一映射

$$\mathrm{ch}:K(B)\otimes Q\longrightarrow H^*(B;Q),$$
$$[E]\ \longmapsto \mathrm{ch}(E).$$

注意到，若

$$c(E)=\prod_i(1+t_i),\quad c(F)=\prod_j(1+t_j'),$$

则

$$c(E\oplus F)=\prod_i(1+t_i)\prod_j(1+t_j'),$$
$$c(E\otimes F)=\prod_{i,j}(1+t_i+t_j').$$

我们立即可得

$$\mathrm{ch}(E\oplus F)=\sum_i e^{t_i}+\sum_j e^{t_j'}=\mathrm{ch}(E)+\mathrm{ch}(F),$$
$$\mathrm{ch}(E\otimes F)=\sum_{i,j}e^{t_i+t_j'}=(\sum_i e^{t_i})(\sum_j e^{t_j'})$$
$$=\mathrm{ch}(E)\cdot\mathrm{ch}(F).$$

所以，ch 定义了一个由 K 群到 H^* 的真实的环同态．这件事的意义将在下面两章中解释．博学多闻的读者会知道，关于 K 群有一整套理论，其中一个中心的结果是 Bott 的周期性定理．这个定理蕴涵以下事实：

$$\mathrm{ch}:K(B)\otimes Q\longrightarrow H^*(B;Q)$$

是一同构．陈特征标一词来源于此．

最后提一下，因为 ch 的定义要用有理系数，故对 Whitney 类没有相应的理论．

参 考 文 献

[1] Milnor, J. and Stasheff, J., Characteristic Classes, *Ann. of Math. Study*, *No.* 76, *Princeton Univ. Press*, 1974.

第十四章 表示论通论

§1. 引 言

我们已在上一章中介绍了酉群 $U(n)$ 和正交群 $O(n)$ 的示性类. 这在原则上已大体适合了处理矢量丛之所需. 但实际上还需进一步展开. 因为虽然名义上一切矢量丛之群均为 $U(n)$ 或 $O(n)$，但时常遇到构造群的化约与扩张的自然的问题：例如可定向性（由 $O(n)$ 化为 $SO(n)$）、复化（由 $O(n)$ 扩张为 $U(n)$）、Whitney 和（由 $U(k)\times U(l)$ 扩张到 $U(k+l)$）等等. 我们因此需要系统的方法以研究一般群 G 的示性类及其关系，即分类空间 BG 的上同调 $H^*(BG)$ 以及由群同态 $\alpha: H\longrightarrow G$ 诱出的同态

$$\alpha^*: H^*(BG)\longrightarrow H^*(BH).$$

但我们最关心的当然还是矢量丛. 例如设有实矢量丛 $E\longrightarrow B$ 而且想问 E 是否有一化约 $\alpha: G\longrightarrow O(n)$，$G$ 是某群而 α 是一同态. 这一同态就是群 G 的（复）表示. 这说明了为什么表示论与示性类理论有关. 这种情况出现很多，为此我们来看一类例子. 令 G 为一 Lie 群而 $H\subset G$ 为一闭子群. 我们已看到 G/H 自然是一流形. 怎样描述其切丛 $T(G/H)$？为此需要回到 G/H 的光滑构造的定义. 通常，对一点 $g\in G$，我们记它在 G/H 中的类为 $\bar{g}$. L_g 表 g 在 G 上的左平移，$\bar{L}_g$ 是其在 G/H 上诱导的左平移. 令 $L(G)$ 为 G 的 Lie 代数，$L(H)\subset L(G)$ 是 H 所对应的子代数. 于是商空间 $V=L(G)/L(H)$ 是模型欧氏空间，而局部坐标定义在点 $\bar{e}\in G/H$ 附近. 具体地说，对于由 $X\in L(G)$ 所表示的 $v=[X]\in V$，我们取 $\varphi(v)=\overline{\exp X}\in G/H$. 若在 V 中取包含零的小邻域 U，$\varphi: U\longrightarrow G/H$ 是 $\bar{e}$ 附近的局部坐标.

(注意与第一章的记号比较.这里的记号是反向的.但这显然没有关系.)显然,对每点 $g\in G$,$\overline{L}_g\circ\varphi: U\longrightarrow G/H$ 给出点 $\hat{\bar{g}}\in G/H$ 附近的局部坐标.回忆起,若 $\varphi_i: U_i\longrightarrow M$ 是 M 的局部坐标(注意,又是反的,故 U_i 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集),则切丛 TM 由三元组 $[b,v,\varphi_i]$ 组成,$b\in U_i$,$v\in\mathbb{R}^n$.两个三元组 $[b,v,\varphi_i]$ 与 $[b',v',\varphi_j]$ 认为是同样的,若 $\varphi_i(b)=\varphi_j(b')$,且

$$D(\varphi_j^{-1}\circ\varphi_i)(b,v)=v'.$$

必要时多加一些 φ_i,恒可设在 $[b,v,\varphi_i]$ 中 $b=0$.所以 TM 由二元组 $[v,\varphi_i]$ 构成,而且 $[v,\varphi_i]=[v',\varphi_j]$ iff

$$D(\varphi_j^{-1}\circ\varphi_i)(v)=v',$$

其中 D 是在原点处求导.在我们的情况下,$T(G/H)$ 是由 $[v,\overline{L}_g\circ\varphi]$ 构成,而且 $[v,\overline{L}_g\circ\varphi]=[v',\overline{L}_{g'}\circ\varphi]$ iff

$$D(\varphi^{-1}\circ\overline{L}_k\circ\varphi)(v)=v',\quad k=g'^{-1}g.$$

另一种考察 $T(G/H)$ 的方法是从某一别处开始.记住对每个 $g\in G$ 恒有内自同构

$$I_g: G\longrightarrow G,\quad x\longmapsto gxg^{-1},$$

因为 I_g 确为同态(L_g 则否).故有诱导的线性映射

$$dI_g:\quad L(G)\longrightarrow L(G).$$

由 $gv=dI_g(v)$ 所给出的 G 在 $L(G)$ 上的作用,亦即同态

$$G\longrightarrow GL(L(G)),\quad g\longmapsto dI_g$$

称为 G 的伴随表示.

若 $h\in H$,当然有 $dI_h(L(H))\subset L(H)$.故 dI_H 诱导出一个同态

$$\overline{dI_h}: V=L(G)/L(H)\longrightarrow V=L(G)/L(H).$$

这样得到一个 H 在 $L(G)/L(H)$ 上的表示,称为 H 的迷向表示,记作 a.

现在得到一个主 H-丛 $G\longrightarrow G/H$ 以及通过 a 而定义的 H 在 V 上的作用.可作扭积 $G\times_a V\longrightarrow G/H$.我们指出它是同构于切丛 $T(G/H)$,而等同关系由

$$G\times_a V\longrightarrow T(G/H),\quad [g,v]\longmapsto[v,\overline{L}_g\circ\varphi].$$

例如，验证一下它是适当定义的．设$[g,v]=[g',v']$，即是说有$h\in H$使$g'=gh^{-1}$，$v'=\overline{dI_h}v$．我们要证明

$$D(\varphi^{-1}\circ\overline{L}_h\circ\varphi)(v)=v'.$$

为此令$v=[X]$，即由$X\in L(G)$表示．于是$t\longrightarrow tX$是$L(G)$中的曲线．应用φ，可得一曲线$t\longrightarrow\overline{\exp(tX)}$．再应用$\overline{L}_h$，又得一曲线$t\longrightarrow\overline{h\exp(tX)}$，此即$(\overline{L}_h\circ\varphi)(tv)$．记住我们的对象全在$G/H$中，而在其中有

$$\overline{h\exp(tX)}=\overline{h\exp(tX)h^{-1}}=\overline{I_h(\exp(tX))}.$$

由定义有

$$\frac{d}{dt}I_h(\exp(tX))\Big|_{t=0}=dI_hX,$$

即

$$v'=\overline{dI_h}(v)=[dI_hX]=D(\varphi^{-1}\circ\overline{L}_h\circ\varphi)(v).$$

（上面似乎少了因子φ^{-1}，这是因为在$L(G)$上$d(\exp\cdot)=1$.）

验证其它各点均无困难．可以看到，唯一要点就是对于$h\in H$，在G/H上有$\overline{L}_h=\overline{I}_h$．

于是得一主H-丛$\xi:G\longrightarrow G/H$，它表示问题的拓扑、整体方面．从$e\in G$附近的局部信息也可得一表示

$$\alpha:H\longrightarrow GL(L(G)).$$

合起来，计算G/H的示性类就是计算ξ的α-扩张类．一般说来，这种情况一再出现，所以有理由建立一般的理论．

现在讨论表示论除了自然的需要外还有一层更深的理由．因为这两个分枝都有一共同的原理．我们已看到，酉群有一对角阵子群$T\subset U(n)$．Borel 定理指出，$H^*(BT)$加上 Weyl 群即可完全决定$H^*(BU(n))$．一般情况下，只有 Lie 群才有"对角子群"T，现称为G之极大环面．当G为紧时，G的许多问题都可化为关于T和 Weyl 群的问题．事实上，关于紧 Lie 群分类的著名结果就是这样得出来的．本章讨论表示论意即在指出这个中心思想．

§2. 一般概念

讲一般概念时并不需要 Lie 群. 所以本节中群只假设为拓扑群. 我们也还不需要区别实和复矢量空间，所以若无必要就不提系数域.

令 G 为一群，V 为一矢量空间. 可以讨论 G 在 V 上的作用. 但因 V 具有矢量空间构造，自然要求此作用保持此构造. 这显然意味着，对于每个 $g\in G$，映射

$$\bar{g}: V\longrightarrow V,\quad x\longmapsto gx$$

是线性的. 这一作用称为 G 在 V 上的表示. 类似地，我们要求两个表示之间的等变(eqivariant)映射 $f: V\longrightarrow W$ 是线性的，这时 f 称为一同态. 若两个表示 V 与 W 之间若有一线性同构：$f: V\longrightarrow W$，就说它们是同构或等价的. 这定义了线性表示的范畴.

和对矢量丛一样，矢量空间的许多运算都可以移到线性表示上. 下面举一些例子：

1. 子表示 $U\subset V$ 即是一不变子空间，即 $x\in U\Rightarrow gx\in U$. 然后商 V/U 也自然地得到 G 的一个线性作用.

2. 直和 $V\oplus W$ 就是如下的表示

$$g(v\otimes w)=(gv,gw).$$

3. 张量积 $V\otimes W$ 也是一个表示，定义为

$$g(v\otimes w)=(gv\otimes gw).$$

4. 线性映射空间 $L(V,W)=\mathrm{Hom}(V,W)$，也是一个表示，其定义为

$$(gf)(v)=g(f(g^{-1}v)).$$

(加上 g^{-1} 是为了使乘法规则 $g(g_1f)=(gg_1)f$ 有效.)

注意，$f\in L(V,W)$ 若为一不动点，即对一切 g 有 $gf=f$ 就意味着 f 为等变的.

W=基域 K 而具有平凡的 G-作用是一特例. 这时 $L(V,K)=$

V^*是对偶空间,且有作用

$$(gf)(v) = f(g^{-1}v).$$

一般情况可归结为这一特例,因为有一自然的(即函子的)同构

$$V^* \otimes W \longrightarrow L(V,W), \quad f \otimes w \longrightarrow f_w,$$

其中 $f_w(v)=f(v)w$,若 V,W 为有限维的,这是一个同构.

矢量空间也有一些东西不能移过来.一个值得注意的例子是分裂性质.若 $U\subset V$ 是一矢量空间的子空间,恒可找到其补空间 $W\subset V$ 即使 $U\oplus W=V$.若 V 为一表示而 $U\subset V$ 是一不变子空间,则不一定有不变的补空间.一个简例如下:

令 $G\subset GL(2)$是以下形状的矩阵之群:

$$g = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad ab \neq 0.$$

此群按 $GL(2)$的方式作用在 $\mathbf{R}^2$ 上,即

$$ge_1 = ae_1, \quad ge_2 = ce_1 + be_2,$$

(e_1,e_2)是 $\mathbf{R}^2$ 的基底.容易验证,唯一的真不变子空间是由 e_1 张成的$\langle e_1\rangle$,它不会有不变的补空间.

此例虽简单,却表出了表示论的基本困难.我们将看到,正是分裂性质表出了紧群和非紧群的表示的基本区别.目前我们只给分裂性质一个特别名词以强调其重要.若每个不变子空间 $U\subset V$ 均有不变补空间,V 称为**半单的**(semi-simple).若 V 除 0 及其自身外别无其它不变子空间,V 称为**简单的**或**不可约的**.显然,每一个半单表示均为简单表示的直和.

令 V 为 G 的一个表示.取 V 之一基底$(e_1,\cdots,e_n)$,线性映射 $\tilde{g}$ 则可写为一矩阵(g_{ij}),其定义为

$$\tilde{g}e_j = \sum_i g_{ij}e_i. \tag{1}$$

注意指标用法上的规定,(1)不能改成

$$\bar{g}e_i = \sum_j g_{ij}e_j, \tag{2}$$

否则群的乘法规则$(\overline{hg})=(\bar{h})(\bar{g})$不对，即是说，这样

$$\alpha: \quad G \longrightarrow GL(V), \quad g \longmapsto (g_{ij})$$

才是同态，用(2)则是反同态. 这里是按传统的用法，即使矩阵从左边作用在列向量上.

若 W 是 G 的另一表示，基底为$(d_1, \cdots, d_n)$而矩阵为$(\bar{g}_{ij})$，$f: V \longrightarrow W$ 则为一同构，于是必有一矩阵 $A \in GL(W)$ 把$(f(e_1), \cdots, f(e_n))$与$(d_1, \cdots, d_n)$连接起来，即有

$$f(e_j) = \sum_i A_{ij}d_i.$$

于是

$$gf(e_j) = \sum_i A_{ij}gd_i = \sum_{i,k} A_{ij}\bar{g}_{ki}d_k$$
$$= f(ge_j) = f(\sum_l g_{lj}e_l) = \sum_{l,k} g_{lj}A_{kl}d_k,$$

就是说$(\bar{g})A = A(g)$或

$$(\bar{g}) = A(g)A^{-1}.$$

故(g)与$(\bar{g})$相差即在用 A 作共轭. 所以可以把 G 的表示看成一同态

$$\alpha: \quad G \longrightarrow GL(n) = GL(\mathbb{R}^n),$$

并有等价关系：$\alpha \sim \beta$ 即指存在 $A \in GL(n)$使得

$$\beta(g) = A\alpha(g)A^{-1}, \quad \forall g \in G.$$

以上所述自然是熟知的. 矩阵表示即表示的坐标描述. 它依赖于基底，所以我们不得不每一次都来证明与基底无关. 虽然如此，我们仍应记住，"表示"这词就是指矩阵表示. 我们想做的就是用具体的东西来理解抽象的群 G. 所以尽管我们应该懂得优美的现代语言，也应该懂得矩阵的特殊的计算的好处，这我们马上就会看到.

§ 3. 紧群和不变积分

还有些东西不能自动地由矢量空间移到表示上去. 内积就是一例. 当然,在谈到 G 的表示 V 上的内积时,总是指的与群作用相容的内积,即要求对所有的 $u,v\in V$ 和 $g\in G$ 有

$$\langle gu,gv\rangle = \langle u,v\rangle.$$

这种内积称为不变内积. 不变内积的存在有一个简单但有决定意义的推论. 若 $U\subset V$ 是一不变子空间,则很容易算出其正交补 $U^{\perp}$ 也是. 所以应该有表示的分裂 $V=U\oplus U^{\perp}$. 换言之,具有不变内积的表示必为半单的. 我们马上就要证明,若群 G 为紧,则不变内积恒存在. 这个事实标志了紧和非紧两种情况的核心的区别. 这里主要的工具是积分,我们要再复习一下(第七章).

令 M 为一光滑流形. 注意,为在 M 上作积分,需要有定向,亦即一处处非 0 的微分形式 ω,其阶 $n=\dim M$,ω 称为体积元素. 因此,所有其它 n-形式均可写为 $f\omega$,f 是 M 上的函数. 然后求此最高阶形式在 M 上的积分,记为

$$\int_M f\omega.$$

若 f 没有紧支集,它可能没有意义. 但若 M 本身即为紧,自然可在其上积分任一连续形式. 紧性之所以成为关键性的条件即在于此.

若 G 为一 Lie 群,它总是可定向的(记住 TG 恒为平凡的),故在其上积分没有问题. 但这时我们当然希望有一不变形式作为体积元素. 想一想这是什么意思. 若 $\varphi: M\longrightarrow N$ 为一光滑映射,ω 是 N 上的 k-形式,则有其拉回 $\varphi^*\omega$ 定义在 M 上如下:令 $X_1,\cdots,X_k$ 是 $p\in M$ 处的 k 个切矢量,有

$$(\varphi^*\omega)(X_1,\cdots,X_k) = \omega(d\varphi\cdot X_1,\cdots,d\varphi\cdot X_k).$$

若取矢量场 $X_1,\cdots,X_k$,再把 $(\varphi^*\omega)(X_1,\cdots,X_k)$ 看作函数,则有

$$(\varphi^*\omega)(X_1,\cdots,X_k)=\omega(\varphi_*X_1,\cdots,\varphi_*X_k)\circ\varphi.$$

若 G 为一 Lie 群，则有左平移 $L_g: G \longrightarrow G$. 不变形式 ω 就是对一切 $g\in G$ 适合下式的形式：

$$L_g^* \omega = \omega.$$

于是它可由其在 $e\in G$ 处的值完全决定. 因为若 $X_1, \cdots, X_k \in T_g(G)$，则 $dL_{g^{-1}}X_1, \cdots, dL_{g^{-1}}X_k \in T_e(G)$，而且

$$\begin{aligned}\omega(X_1, \cdots, X_k) &= (L_{g^{-1}}^* \omega)(X_1, \cdots, X_k) \\ &= \omega(dL_{g^{-1}}X_1, \cdots, dL_{g^{-1}}X_k).\end{aligned}$$

这也意味着我们可以任意规定 ω 在 $e\in G$ 处之值再由上式得一不变形式. 换句话说，有点象不变矢量场，不变形式可以看成与对偶 Lie 代数 $L(G)^*$ 的 k 阶外积 $\Lambda^k L(G)^*$ 一样. 特别是当 $k=n=$ 最高维数时，$\Lambda^n L(G)^*$ 之维数为 1 而任意不变 n-形式与它只相差一个标量因子. 对于紧 Lie 群 G，我们约定取规范化体积元素 ω_e 使

$$\int_G \omega_e = 1.$$

现在回忆一下积分的基本性质. 若 $\varphi: M \longrightarrow N$ 是一保持定向的微分同胚，ω 是 N 上的最高阶形式，我们有

$$\int_M \varphi^* \omega = \int_N \omega. \tag{1}$$

再设 G 为连通的. 所有左平移 L_g 均同伦于恒等映射，因而保持定向. 于是将(1)式应用于一个 n-形式 $\omega = f\omega_0$ 即得

$$\int_G L_g^* (f\omega_0) = \int_G f\omega_0.$$

但 $L_g^*(f\omega_0) = (f\circ L_g)L_g^*\omega_0 = (f\circ L_g)\omega_0$. 故(1)化为

$$\int_G (f\circ L_g)\omega_0 = \int_G f\omega_0. \tag{2}$$

当确定了体积元素 ω_0 后而处理最高阶形式的积分时，唯一需要注意的自然只有"系数"f. 所以我们总是说函数 f 的积分. 传统的记号是记 ω_0 为一微分 dg(这当然一般并不意味着 ω_0 是上边缘，而只在实直线的特例时是这样. 微分一词来源于此)，目的是指明 g 为变元，f 中之变元即是它. 因此我们有

$$\int_G f\omega_0 = \int_G f(g)dg.$$

所以(2)式表示对任意函数 f 与群元素 $g_0 \in G$，有

$$\int_G f(g_0 g)dg = \int_G f(g)dg. \tag{3}$$

这就是不变性：将变元 g 乘以固定群元素 g_0 并不改变积分. 虽然讨论起来花了一点功夫，这基本上是一个简单的事实，无非相当于

$$\int f(a+x)dx = \int f(x)dx$$

而已.

(3)中的 f 是 G 上的实值函数. 但当然可以将它推广到复的 f（这时积分值自然也是复的），而事实上还可以考虑 $f: G \longrightarrow V$ 在一矢量空间 V 中取值. 对函数 f,g 和标量 λ,μ 我们有线性性质

$$\int(\lambda f + \mu g) = \lambda\int f + \mu\int g.$$

紧群上必有不变内积存在现在成了不足道的事实了. 令 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 V 上任一内积. 对于 $u,v\in V$，

$$f: \quad G \longrightarrow K, \quad g \longmapsto \langle g^{-1}u, g^{-1}v\rangle$$

是一连续函数. 现在定义一个新内积

$$[u,v] = \int_G f(g)dg = \int_G \langle g^{-1}u, g^{-1}v\rangle dg.$$

于是有

$$[g_0u, g_0v] = \int_G \langle g^{-1}g_0u, g^{-1}g_0v\rangle dg = \int_G f(g_0^{-1}g)dg$$

$$= \int_G f(g)dg = [u,v].$$

余下一点小问题是正定性. 我们有

$$[u,u] = \int_G \langle g^{-1}u, g^{-1}u\rangle dg.$$

被积函数 $\geqslant 0$. 故若 $[u,u]=0$，必然有 $\langle g^{-1}u, g^{-1}u\rangle = 0$ 对一切 $g\in G$ 成立. 特别有 $\langle u,u\rangle = 0$，即 $u=0$.

§ 4. 特征标与权

上节中我们看到了通过积分表示空间 V 上的任意内积即可得到一不变内积. 其实这就是使用不变积分的基本思路. 若某对象在开始时不是不变的，则在积分后将成为不变的. 本节中我们将继续发掘这一思想. 但我们还需要其它的东西，即 Schur 引理. 仍设 G 为紧 Lie 群. 还有仍设其表示为有限维的，这一点已明确说过. 若 V 是这样的表示，则由 § 3，或者 V 是简单的，或者虽然不是且 $U\subset V$ 是不变子空间，则 V 可分裂为子表示的直和：$V=U\oplus U^{\perp}$. 若 $U, U^{\perp}$ 仍非简单，则可再行分裂. 因为 V 为有限维的，最终将得到简单表示；即任一表示均可写为简单表示的有限直和. 所以紧 Lie 群的表示原则上可化为简单表示来研究. Schur 引理就是关于简单表示的一个明显的事实.

Schur 引理 若 U, V 为一(可能是任意的)群 G 的简单表示，而 $f: U\longrightarrow V$ 是等变的线性映射. 则或 f 是同构，或 f 是零映射.

证明简单得出奇. $\ker f\subset U$ 是不变的. 因为 U 是简单的，故或者 $\ker f=U$ 即 f 为零映射，或者 $\ker f=0$，即 f 为一对一的. 但后者 $f(U)\subset V$ 仍为不变的、非零的(已设 $\dim U>0$)，故 $f(U)=V$，即 f 是一对一的满射.

现介绍一些常用的名词. 群 G 的表示也称为一 G-模. 等变映射 $f: U\longrightarrow V$ 亦称为一 G-线性映射. G-线性映射之集记作 $L_G(U, V)$. 记住，一切线性映射之集 $L(U, V)$ 也是一个 G-模，且 $L_G(U, V)\subset L(U, V)$是由 G 决定的后者的 G-子模.

Schur 引理的要点是，对于一般 G-模 U，V，$L_G(U, V)$ 包含许多种 G-线性映射，其中零映射与同构是其“极端”. Schur 引理只是说，若 U, V 为简单，则 $L_G(U,V)$中只有这两类“极端”. 特别是，若 $L_G(U,V)\neq 0$，则 U 与 V 同构. 作为其应用，现证

命题 14. 1(分解的唯一性) 令 G-模 V 可以分解为简单 G-模

之直和 $V=\bigoplus_{i=1}^{n}V_i$，则除次序可变或相差一同构而外，此分解是唯一的，亦即若 $V=\bigoplus_{j=1}^{m}W_j$ 是另一分解，则 $n=m$，且每个 V_i 均同构于一 W_j，反过来也一样.

证　令 U_1，…，U_k 是出现在两个分解中的非同构的项，可以把这两个分解重写为

$$V=\bigoplus_{i=1}^{k}m_iU_i,\quad V=\bigoplus_{i=1}^{k}n_iU_i.$$

m_i，n_i 是非负整数. 今证 $m_i=n_i$. 由 Schur 引理有

$$L_G(U_i,U_j)\begin{cases}=0, & i\neq j;\\ \neq 0, & i=j.\end{cases}$$

另一方面，肯定又有

$$L_G(U_i,V)=\bigoplus_{j=1}^{k}m_jL_G(U_i,U_j)=m_iL_G(U_i,U_i).$$

用第二个分解式则得

$$L_G(U_i,V)=n_iL_G(U_i,U_i).$$

因为 $\dim L_G(U_i,U_i)>0$，故有 $m_i=n_i$.

对任一 G-模 U 可取一基底而得一矩阵表示：

$$\alpha: G\longrightarrow GL(U),\ g\longmapsto\alpha(g).$$

于是有坐标函数：

$$\alpha_{ij}: G\longrightarrow K \text{ 即基域}$$
$$g\longmapsto\alpha_{ij}(g)=\text{矩阵 }\alpha(g)\text{ 的 }(i,j)\text{-元}.$$

由于基底取法不同，坐标函数仍有很大任意性. 但它们仍受到相当强的限制.

命题 14.2(Schur 正交关系)　令 U,V 是非同构的简单 G-模，在 U,V 中任取基底得到其矩阵表示 $\alpha: G\longrightarrow GL(U)$，$\beta: G\longrightarrow GL(V)$. 则对任意 (i,j)，(k,l) 有

$$\int_G\alpha_{ij}(g^{-1})\beta_{kl}(g)dg=0. \tag{1}$$

证　令 U,V 中定义 α,β 的基底为 $(e_1,\cdots,e_n)$，$(d_1,\cdots,d_s)$. 令 $f: U\longrightarrow V$ 为一线性映射，定义为 $f(e_i)=d_l$，$f(e_p)=0$，$p\neq i$. 积分后

知

$$\int_G (gf)dg \in L(U,V)$$

是不变的. 另一方面，由 Schur 引理 $L_G(U,V)=0$，故有

$$\int_G (gf)dg = 0. \tag{2}$$

由定义

$$\begin{aligned}(gf)(e_j) &= g(f(g^{-1}e_j)) \\ &= g(f(\sum_p a_{pj}(g^{-1})e_p)) = g(a_{ij}(g^{-1})d_i) \\ &= \sum_q a_{ij}(g^{-1})\beta_{ql}(g)d_q.\end{aligned}$$

代入 (2) 即可得 (1).

命题 14. 2 是由不同（即非同构）的简单 G-模讨论坐标函数. 下一个问题自然就是同一简单 G-模的 (a_{ij}) 之间有何关系. 为了得到好的结果，我们取一特殊情况. 现设基域 K 为复数域. 现将已得的结果整理得更干净些. 令 $C(G)$ 是 G 上复值连续函数之空间. 在 $C(G)$ 上有熟知的内积如下：

$$\langle\varphi,\psi\rangle = \int_G \varphi(g)\bar{\psi}(g)dg$$

(除去"—"即得实值连续函数之内积). 设命题 14. 2 中的不变内积已给且用就范正交系定义 α,β. 于是 $\alpha(g)$，$\beta(g)$将是酉矩阵而适合关系式 $\alpha(g)^t\overline{\alpha(g)}=1$ 亦即 $a_{ij}(g^{-1})=\overline{a_{ji}(g)}$. 这样命题 14. 2 中的(1)成为

$$\langle\beta_{kl},a_{ji}\rangle = 0,$$

即是说，U，V 的坐标函数(a_{ij})，(β_{kl})彼此正交.

命题 14. 3 令 U 为简单复 G-模，$f\in L_G(U,U)$. 则 $f=\lambda I$，$I\in L_G(U,U)$为恒等映射，λ 为复数. 特别是 $\dim L_G(U,U)=1$ 且以 I 为基底.

证明又是不足道的，既然 f 是线性映射且 $K=\mathbf{C}$，f 必有固有

值 λ.(使用复域唯一的理由在此.任意代数闭域都可以用.)若 $f\in L_G(U,U)$,则 $f-\lambda I$ 也属于它.但由固有值定义,$f-\lambda I$ 决非同构.由 Schur 引理,它只能为 0,即 $f=\lambda I$.

现令 U 是一具有内积的复 G-模,$(e_1,\cdots,e_n)$ 为一就范正交基底,a 为矩阵表示.固定 i,l 且令 $f:U\longrightarrow U$ 定义为 $f(e_i)=e_l,f(e_p)=0,p\neq i$.由命题 14.3,我们有某个 $\lambda\in\mathbb{C}$ 使

$$\int_G(gf)dg=\lambda.$$

作前面相同的计算,即得

$$\sum_q\left[\int_G a_{ql}(g)\overline{a_{ji}(g)}dg\right]e_q=\lambda e_j. \tag{3}$$

故若 $q\neq j$,有

$$\langle a_{ql},a_{ji}\rangle=0,\quad\forall\ i,l, \tag{4}$$

$$\langle a_{jl},a_{ji}\rangle=\lambda. \tag{5}$$

注意到 $a_{ij}=\overline{a_{ji}}$,故由(4),(5)还可知 $\langle a_{jl},a_{ji}\rangle=0$ 若 $i\neq j$.唯一不清楚的是 $\langle a_{ij},a_{ij}\rangle$ 即矢量 a_{ij} 之长 $\|a_{ij}\|$.迄今我们只有

$$\langle a_{ij},a_{ij}\rangle=\lambda=\lambda_{ij}.$$

但因不知道什么样的 $\lambda=\lambda_{ij}$(由 $f(e_j)=e_i$ 知 λ 依赖于 i,j),这也没有用.现介绍一个有用的概念.

回忆起矩阵 A 之迹定义为

$$\mathrm{Tr}(A)=\sum_i a_{ii}.$$

一个基本的性质是:对于非异矩阵 B 恒有

$$\mathrm{Tr}(BAB^{-1})=\mathrm{Tr}(A).$$

由此,函数

$$\chi(g)=\mathrm{Tr}a(g)=\sum_i a_{ii}(g)$$

与基底无关而事实上只依赖于 G-模 U 的同构类.因此,它比坐标函数是更好的不变量.函数 χ(最好写作 χ_U)称为 G-模 U 的特征标.对于 $f\in L(U,U)$,记住 gf 定义为

$$(gf)(x) = g(f(g^{-1}x)).$$

用矩阵来写即是 $gf=g\circ f\circ g^{-1}$. 故知

$$\mathrm{Tr}(gf) = \mathrm{Tr}(f)$$

为一常值函数,从而 $\mathrm{Tr}\int_G(gf)dg = \mathrm{Tr}(f)$.

注意到

$$\int_G(gf)dg = \lambda I,$$

我们有

$$n\lambda = \mathrm{Tr}(f), \qquad n = \dim U.$$

因为 λ_{ij}来自 f,因 f 定义为 $f(e_j)=e_i, f(e_p)=0, p\neq j$. 故显然有

$$\mathrm{Tr}(f) = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

最后结果就是

命题 14.4 令 U 为一简单复 G-模,(a_{ij})是它在 U 之任一就范正交基下的坐标函数,我们有

$\langle a_{ij}, a_{kl}\rangle = 0$, 若 $i\neq k$ 或 $j\neq l$;

$\langle a_{ij}, a_{ij}\rangle = 0$, 若 $i\neq j$;

$\langle a_{ii}, a_{ii}\rangle = 1/\dim U$.

作为直接的推论,我们有

定理(Schur **就范正交关系式**) 对于不同的简单复 G-模 U,V 我们有

$$\langle \chi_U, \chi_V\rangle = 0,$$

而对 U 自身则有

$$\langle \chi_U, \chi_U\rangle = 1,$$

即,复 G-模的特征标函数是 $C(G)$中的就范正交系. 特别是它们线性无关,这就导出核心的定理如下:

定理 两个复 G-模为同构 iff 其特征标相同;即是说,特征标完全刻画了 G-模.

证 令 U,V 为特征标相同的 G-模;$\chi_U=\chi_V$. 与前相同,将 U,V

展开为简单 G-模之直和：

$$U=\bigoplus_i m_i W_i,\quad V=\bigoplus_i n_i W_i.$$

W_i 是互不相同的 G-模，m_i,n_i 为非负整数．于是显然有

$$\chi_U=\sum_i m_i\chi_{W_i},\quad \chi_V=\sum_i n_i\chi_{W_i}.$$

但 $m_i=\langle\chi_U,\chi_{W_i}\rangle=\langle\chi_V,\chi_{W_i}\rangle=n_i$.

特征标定理把表示论问题归结为研究某些函数．我们详细讨论一个例子即环面群 T 即可看出它确实可以导出深刻的结果．先看一个简单的事实．

命题 14.5 紧 Abel 群 G 的简单复 G-模若非平凡的，必为一维．

因为这时对任一 $g\in G$，$\tilde{g}:U\longrightarrow U$ 是一 G-模线性映射，且因 G 为 Abel 群故为简单的，即

$$\tilde{g}(g_1x)=gg_1x=g_1gx=g_1(\tilde{g}(x)).$$

故由 Schur 引理，$\tilde{g}=\lambda I$. 这意味着 $g\in G$ 的作用只不过是标量乘法．但这时每个子空间都是不变的．U 可能为简单的唯一办法是 $\dim U=1$，除非是在平凡的情况：$U=0$.

在 U 上给一内积，则 U 上的表示 T 就是一个同态

$$\alpha:T\longrightarrow U(1)=S^1.$$

这就是特征标函数 χ_U. 故简单复 T-模之集就是同态 $\alpha:T\longrightarrow S^1$ 之集．任一个这样的同态称为一个"权"．现在解释这一名词．因 $T=S^1\times\cdots\times S^1$，故 α 可由一组同态 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$ 决定，其中

$$\alpha_i:\ S^1\xrightarrow[\text{嵌为第}i\text{个因子}]{}S^1\times\cdots\times S^1\xrightarrow{\alpha}S^1,$$

即有

$$\alpha(z_1,\cdots,z_k)=\prod_i\alpha_i(z_i).$$

同态 $\alpha:S^1\longrightarrow S^1$ 正是 S^1 的一个单参数子群，故有

$$\begin{array}{ccc} L(S^1) & \xrightarrow{d\alpha} & L(S^1) \\ \Big\downarrow \exp & & \Big\downarrow \exp \\ S^1 & \xrightarrow[\alpha]{} & S^1, \end{array}$$

图(a)

$d\alpha$ 是在 Lie 代数 $L(S^1)$上诱导的线性映射. 我们知道,α 和 $d\alpha$ 互相决定. 这里可以完全显式地说明它. 取 $L(S^1)=R$ 为实直线,exp 即通常的指数 $\exp: R \longrightarrow S^1$, $t \longmapsto e^{2\pi i t}$.

线性映射 $d\alpha: R \longrightarrow R$ 只能是 $d\alpha(t)=ct$. 图(a)的可换性指出

$$e^{2\pi i c t} = \alpha(e^{2\pi i t}).$$

令 $t=1$ 有

$$e^{2\pi i c} = \alpha(1) = 1.$$

因此 c 必为某整数 k. 这样 $d\alpha$ 并非任意的线性映射,而必映整数为整数. 我们称之为整值泛函(即认为 $d\alpha \in \mathbf{R}^*$). 故 α 可表为

$$\alpha(z) = \alpha(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i k t} = z^k.$$

同态 $\alpha: T \longrightarrow S^1$ 为

$$\alpha(z_1, \cdots, z_n) = \prod_i \alpha_i(z_i) = \prod_i z_i^{k_i},$$

$(k_1, \cdots, k_n)$是一组整数. 每个坐标 z_i 各有其"权"$z_i^{k_i}$. 故简单复 T-模之集与集 $\mathbf{Z}^n$($\mathbf{Z}$ 为整数集,$n=\dim T$)一一对应.

用一组整数$(k_1, \cdots, k_n)$表示同态 $\alpha: T \longrightarrow S^1$ 固然简单,但要小心一点. 说 $T=S^1\times\cdots\times S^1$ 其实是指选定一同构 $T \xrightarrow{\sim} S^1\times\cdots\times S^1$. 这又相当于在 Lie 代数 $L(T)$中取定一基底. 但整值泛函 $\omega: L(T) \longrightarrow \mathbf{R}$ 无需基底也有意义. 指数映射 $\exp: L(T) \longrightarrow T$ 也是内在地定义的而且是由加群 $L(T)$到 T 上的满同态. 子群$\ker(\exp) \subset L(T)$称为整值格 I. ω 是整值的,如果 $\omega(I) \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$. 给定一群同态 $\alpha: T \longrightarrow S^1$,导映射 $d\alpha: L(T) \longrightarrow \mathbf{R}$ 必为整值的. 反之,整值泛函 $\omega: L(T) \longrightarrow \mathbf{R}$ 又必定义一个群同态 $\alpha: T \longrightarrow S^1$ 如下:

$$\alpha(g) = \alpha(\exp X) = e^{2\pi i \omega(X)}.$$

这样群同态和整值泛函是一回事. 为以后之需,我们再给出第三种说法. 已给 $a: T \longrightarrow S^1$,作其 a-扩张 $E\times_a S^1 \longrightarrow BT$,而 $E \longrightarrow BT$ 是一万有 T-丛. 这是一个主 S^1-丛,故有其示性类 $c(a)\in H^2(BT;\mathbf{Z})$. 换一个说法是:$a$ 有诱导映射

$$a^*: \quad H^2(BS^1) \longrightarrow H^2(BT).$$

于是由定义 $c(a)=a^*(t)$,$t\in H^2(BS^1)$ 是典则生成元,即万有 S^1-丛 $S^\infty \longrightarrow BS^1$ 的陈类. 若用一基底,$H^*(BT)=\mathbf{Z}[t_1,\cdots,t_n]$,而

$$c(a) = a^*(t) = \sum k_i t_i,$$

k_i 正是定义 a 的整数(见第十三章关于线丛之张量积). 所以下面三个对象是完全等价的:

(1) 群同态 $a: T \longrightarrow S^1$,用坐标表示为

$$a(z_1,\cdots,z_n) = \prod_i z_i^{k_i}.$$

(2) 整值线性泛函 $\omega: L(T) \longrightarrow \mathbf{R}$,坐标表示为

$$\omega(t_1,\cdots,t_n) = \sum_i k_i t_i.$$

它与(1)的关系是 $z_j=e^{2\pi i t_j}$.

(3) 上同调类 $c\in H^2(BT)$,坐标表示为

$$c = \sum_i k_i t_i, \quad H^*(BT) = \mathbf{Z}[t_1,\cdots,t_n].$$

它与(1),(2)的关系上面已经讲了. 这三个对象我们都称之为权,若不致发生混淆,也将用相同的记号.

现令 U 为一复 T-模,但不必简单. 于是

$$U = \bigoplus_i U_i$$

是把 U 分解为简单的项(U_i 不必互异). 令 U_i 之权为 ω_i,则其特征标函数 χ_U 为

$$\chi_U(\exp X) = \sum_j e^{2\pi i\omega_j(X)}.$$

另一方面,扭积 $\xi: E\times_T U \longrightarrow BT$ 的陈特征标是

$$\mathrm{ch}(\xi) = \sum_i e^{\omega_i}.$$

不必再指出这两个公式多么相似，事实上稍加改变就完全相同．这决非偶然．其实陈特征标的定义是直接受到 G-模特征标函数的启发的．例如，在上一章中我们看到 ch 在丛的 Whitney 和和张量积运算上性态都很好．注意到 ch 和 χ 形式的类似，再由以下两个很容易验证的事实：

$$\chi_{U\oplus V} = \chi_U + \chi_V, \quad \chi_{U\otimes V} = \chi_U \cdot \chi_V,$$

这种良好的性态也是很显然的了．这是示性类与表示论的密切关系之一例．目前，我们只再提一次：复 T-模 U 可以由其权之集 $(\omega_1, \cdots, \omega_n)$，$n=\dim U$，完全描述．在 $L(T)$ 中取一基底，则每个 ω_i 可以表为整数的 n 元组：$\omega_i=(k_{1i}, \cdots, k_{ni})$，记之为列向量，则 U 可以用整数元矩阵 (k_{ij}) 来描述．

§5. 极大环面与 E. Cartan 定理

我们已经看到，使特征标函数 χ_U 成为 G-模 U 的不变量的关键的性质就是以下公式：

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(BAB^{-1}).$$

这意味着对于 g 和 $g_1 \in G$，我们有

$$\chi_U(g) = \chi_U(g_1 g g_1^{-1}).$$

换言之，G 以共轭作用于其本身上：

$$g_1 \circ g = I_{g_1}(g).$$

称为伴随作用 Ad（其导映射即 G 在 $L(G)$ 上的伴随表示）．这样 χ_U 实际上是定义在轨道空间 G/Ad 上的函数．但这并不是观察 χ_U 最方便的方法，因为 G/Ad 一般地不是好空间．例如，它很少是流形．另一种方法是找一个子集 $A\subset G$ 使 A 与 Ad 的每个轨道均相交，亦即 A 与每个共轭类 $\{gg_1g^{-1} \mid g\in G\}$ 均相交，亦即

$$G = \bigcup_{g\in G} gAg^{-1}.$$

于是 χ_U 可由它在 A 上的限制 $\chi_U|A$ 完全决定. 因此、若 A 小得合理,讨论 χ_U 就省劲一些. 若 A 可选为 G 的一个子群就更好,因为这时 U 也将是一个 A-模. 若记此 A-模为 $U|A$,则显然有

$$\chi_U|A = \chi_{U|A}.$$

它表示 G-模 U 完全由 A-模 $U|A$ 决定,若 A 比较简单,例如为一环面群,可能就更易理解. 这种思考当然需要有事实来支持. 但我们事实上已经看到过了,只不过当时忙于其它而没有注意到罢了. 回忆一下,酉群 $U(n)$ 的对角矩阵子群 $T\subset U(n)$ 就是一个环面:

$$T = \left\{\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix} \middle| \lambda_i \in S^1\right\}.$$

要求下式成立

$$U(n) = \bigcup gTg^{-1} \qquad (*)$$

就是说任给 $g_0\in U(n)$,必可找到 $g\in U(n)$ 使 $g^{-1}g_0g$ 成为对角阵. 由线性代数知,使用 I_g 相当于换基底. 所以问题是已给矩阵 A,可否换一基底使之对角化? 我们已知线性代数中有一整套对角化问题的理论. 不论对此理论知道多少,人人都知道任一酉矩阵均可对角化(提示:逐次取固有空间的正交补),即($*$)确实成立. 结果是在任一紧连通 Lie 群 G 中恒有一环面子群 $T\subset G$ 使得

$$G = \bigcup_{g\in G} gTg^{-1}. \qquad (**)$$

这是重要的 E. Cartan 定理,它在研究 G 的几乎一切问题时都起关键作用. 对现在的问题它则指出任一复 G-模 U 均由其限制 $U|T$ 决定,而 T 又由权 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ 决定,$n=\dim U$. 所以 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ 也称为 G-模 U 之群. 讲得更形式一点,令 $A(G)$ 为复 G-模的同构类. 于是包含映射 $i: T\longrightarrow G$ 诱导出

$$i^*: A(G)\longrightarrow A(T), \quad U\longmapsto U|T.$$

E. Cartan 定理和特征标定理指出 i^* 是一单射. 每个人都应清楚,我们希望注意平行的 Borel 定理:

$$i^*: H^*(BU(n)) \longrightarrow H^*(BT)$$

为单射. 可能 $A(G)\subset A(T)$ 可以与 Weyl 群 $W(G)$ 所确定的元等同起来. 这是什么意思马上就会明白.

求 Lie 群的环面子群并不罕见或困难. 现在要找 Lie 子群 $A\subset G$(指一般意义. 注意即指 $A\subset G$ 作为抽象群是一子群, A 有自己的光滑构造使包含映射 $i: A\longrightarrow G$ 也是光滑的. 所以 A 的拓扑细于相对拓扑). 它在环面子群时是紧、连通、Abel 的. G 中总可找到这样的子群, 平凡子群 $\{e\}$ 即为一例. 所以是要找大一点, 即是使得若 $A\subset B$ 而 B 是另一环面, 则 $A=B$. G 中这样的环面称为极大环面. 它总是存在的, 因为任意环面子群 A 的维数必适合 $\dim A\leqslant\dim G$. 显然具有最大维数的环面子群 $A\subset G$ 是极大环面. 但极大环面不可能唯一. 若 A 是一个, 则显然其任意共轭 gAg^{-1} 也是. 所以任意唯一性定理至多是相差一个共轭成立.

现证一个容易的事实.

命题 14.6 令 $T\subset G$ 是一环面子群使得

$$G=\bigcup_{g\in G} gTg^{-1} \qquad (**)$$

成立. 这时 T 是极大环面, 而且任意极大环面必与 T 共轭.

证 先注意, 任意环面群 $A\subset G$ 都具有以下意义的"拓扑生成元". 对任意 $x\in A$, 令 $\langle x\rangle$ 记 G 中由 x 生成的纯代数意义下的子群: $\langle x\rangle=\{x^k \mid k \text{ 是整数}\}$. 于是有 $\langle x\rangle\subset A$. 若 $\langle x\rangle$ 在 A 中稠就称 x 为拓扑生成元, 即 $\overline{\langle x\rangle}=A$. 第四章中提到 T^1 上的无理流 $\alpha(t)=(e^{2\pi it},e^{2\pi ikt})$ 且 k 为无理数时即已见到这种生成元恒存在. 那时我们就说过当 k 为无理数时, 象 $\alpha(\mathbb{R})\subset T^2$ 为稠. 很显然 $(1,e^{2\pi ik})$ 是 T^2 的拓扑生成元. 显然, 对任 意维环面都能这样做.

设 A 为一环面子群且 $T\subset A$. 取生成元 $x\in A$. 由 $(**)$, 我们有某个 $g\in G, t\in T$ 使得

$$x=gtg^{-1}\in gTg^{-1}.$$

因为 $gTg^{-1}\subset G$ 为一闭子群, 我们有

$$T \subset A = \overline{\langle x \rangle} \subset gTg^{-1}.$$

因为 T 与 gTg^{-1} 维数相同，我们有 $T=A=gTg^{-1}$ 即 T 为极大.

若 A 为任一其它极大环面，仍对某个 $g\in G$ 有 $A\subset gTg^{-1}$，从而因 A 为极大而有 $A=gTg^{-1}$.

这样，(＊＊)是环面 $T\subset G$ 为极大的充分条件. 必要性就成了明显的问题. 这就是

E. Cartan 定理 令 G 为一紧连通 Lie 群，$T\subset G$ 为极大环面. 这时必有

$$G = \bigcup_{g\in G} gTg^{-1}. \qquad (* *)$$

特别是 G 中任两个极大环面必互相共轭(命题 14.6). 其公共维数称为 G 之秩，记作 rank(G).

定理证法不止一种而各需若干预备知识，所以我们暂不详述. 我们宁可再讲一下其含义. 由 Schur 正交关系，一个复 G-模可由其特征标函数 $\chi_U: G \longrightarrow \mathbf{C}$ 决定. 由(＊＊)和 χ_U 之不变性，χ_U 可由其在一个极大环面 $T\subset G$ 上的限制 $\chi_U|T$ 决定. 因 $\chi_U|T=\chi_{U|T}$ 是 T-模 $U|T$ 的特征标函数，所以 G-模 U 可完全由 T-模 $U|T$ 决定，而后者又可由权 $(\omega_1,\cdots,\omega_n)$ 完全描述. 我们还有 $\chi_U|T$ 和 (ω_i) 之间的关系

$$\chi_U(\exp X) = \sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i\omega_j(X)},$$

$X\in L(T)$. 这一切都很好，可惜讲的是复表示而最自然的表示则是实的. 所以我们还得再作一些事，所幸并不太难.

§6. 实表示

因为现在需仔细区别实的复表示，所以把§4 再复习一下看一看复域用于何处还是好的. 首先，Schur 引理和简单模分解的唯一性在任意域中均成立. 特别是相消律在 G-模 $A(G)$ 中成立：

$$U \oplus A = V \oplus A \Rightarrow U = V.$$

这与矢量丛情况很不一样，后者在 $A(G)$ 中没有稳定现象. 不同 G-

模的坐标函数的正交关系在实 G-模中仍成立，只不过内积自然应定义为

$$\langle\varphi,\psi\rangle = \int\varphi(g)\psi(g)dg,$$

φ,ψ 是实函数，它也可看成是复函数的特例：$\psi=\bar{\psi}$. 复域起本质作用之处只有命题 14.3，其中用到固有值. 由命题 14.3 可得以下事实：即复简单 T-模 U 为一维的；$\langle\chi_U,\chi_U\rangle=1$ 以及 χ_U 可以决定 U. 以上就是我们需要进一步考察的复结果.

和矢量丛一样，实 G-模也可复化. 记住，若 U 为实矢量空间，其复化 U_c 即一矢量空间

$$U_c = U \oplus U,$$

其中并赋以复数乘法：

$$i(u,v) = (-v,u).$$

显然，若 U 为一实 G-模，则 G 的作用

$$g(u,v) = (gu,gv)$$

是复线性的. U_c 再赋以上述 G 的作用即定义为 U 的复化.

只要略去虚数乘法，则任意复 G-模均可看作实 G-模. 为了提醒这一点，我们把所得实 G-模记作 U_r. 由 U_c 之定义易见，对任意实 G-模 U 有

$$U_{cr} = U \oplus U.$$

特别是，两个实 G-模 U,V 为同构 iff 其复化 U_c,V_c 为同构.

若 U 为一实 G-模，$(e_1,\cdots,e_n)$为其基底，则它(亦即$(e_1,0),\cdots,(e_n,0)$)也是 U_c 之基. 特别是实 G-模 U 与复 G-模 U_c 特征标函数 χ_U 相同且为实值的. 由此立即可得

命题 14.7 实 G-模 U,V 为同构 iff 其特征标函数 χ_U,χ_V 相等. 特别，实 G-模 U 也可由其在极大环面 $T\subset G$ 上的限制 $U|T$ 决定.

令 U 为一复 G-模. 若 $U=V_c$，V 为实 G-模，我们已看到 χ_U 必为实的，即 $\chi_U=\overline{\chi_U}$. 这条件也是充分的. 为证明它，定义共轭 G-模 $\overline{U}$ 为 U 之共轭矢量空间，即其中数乘定义为

$$z \circ u = \bar{z}u.$$

而 G 作用相同. 若 $(a_{ij}(g))$ 是 U 由某基底 $(e_1,\cdots,e_n)$ 定义的矩阵,即

$$ge_j = \sum_i a_{ij}(g)e_i,$$

则此关系也可写为

$$ge_j = \sum_i \overline{a_{ij}(g)} \circ e_i.$$

这显然意味着 $\chi_{\bar{U}} = \overline{\chi_U}$. 设 $\chi_U = \chi_{\bar{U}}$,则有 $U \cong \bar{U}$,亦即有一同构 $\varphi: U \longrightarrow \bar{U}$. 记此映射为

$$\varphi(u) = \bar{u},$$

则 U 上的共轭运算"—"是实线性的,并有关系式

$$\overline{zu} = \varphi(zu) = z \circ \varphi(u) = \bar{z}\bar{u}.$$

定义

$$V^+ = \{u \in U \mid u = \bar{u}\}, \quad V^- = \{u \in U \mid u = -\bar{u}\}.$$

它们是 U 的实子 G-模. 容易验证

$$U \longrightarrow (V^+)_c \quad u \longmapsto (i(u - \bar{u}), u + \bar{u})$$

是一同构,$\bar{U} \longrightarrow (V^-)_c$ 也是. 因为作为实 G- 模有 $U_r = V^+ \oplus V^-$,我们有

命题 14.8 复 G- 模 U 是某实 G- 模 V 之复化 V_c,iff $\chi_U = \overline{\chi_U}$ 为实值(这时 $\chi_U = \chi_V$),一般地,对于任一复 G- 模 U,我们有

$$U_{rc} = U \oplus \bar{U}.$$

现在容易描述简单实 T- 模了. 令 U 是这样一个模. 可将其复化 U_c 写为简单复 T- 模之和. 因为 $U_c = \overline{U_c}$,U_c 之分解必为以下形状:

$$U_c = \sum_{i=1}^{k} m_i(U_i + \bar{U}_i) + \sum_{i=k+1}^{l} n_i U_i,$$

U_i 是简单复 T- 模,当 $1 \leqslant i \leqslant k$ 时,$U_i \neq \bar{U}_i$,而当 $l \geqslant i > k$ 时 $U_i = \bar{U}_i$. 这时 $U_j(k < j \leqslant l)$ 和 $U_i + \bar{U}_i(1 \leqslant i \leqslant k)$ 都是自共轭的,故有

$$U_c = \sum_{i=1}^{k} m_i(V_i)_c + \sum_{i=k+1}^{l} n_i(V_i)_c,$$

V_i 是实 G- 模. 因运算 C 是一对一的, 我们有 $U = \sum_{i=1}^{k} m_i V_i + \sum_{i=k+1}^{l} n_i V_i$, 若 U 为简单的, 它只含一项. 有两个情况:

(1) $V_c = U$ 是简单的自共轭的. 记住 χ_U 可写为 $\chi_U(z_1, \cdots, z_n) = \prod_i (z_i)^{k_i}$, k_i 为整数. χ_U 为实只有一切 $k_i = 0$ 才可能. 这时 $U = \mathbf{C}$ 且有平凡的作用. 这时 V 是实直线并赋以平凡的作用.

(2) $V_c = U \oplus \overline{U}$ 且 $U \neq \overline{U}$. 令 ω 为 U 之权. 有

$$\chi_V(\exp X) = \chi_U(\exp X) + \overline{\chi_U(\exp X)}$$
$$= e^{2\pi i\omega(X)} + e^{-2\pi i\omega(X)} = 2\cos 2\pi\omega(X).$$

我们也知道 $\dim_{\mathbf{R}} V = \dim_{\mathbf{C}} V_c = 2$. 可用 2×2 矩阵来表示 T 在 $\mathbf{R}^2$ 上的作用:

$$T \longrightarrow O(2),$$
$$\exp X = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\omega(X)) & \sin(2\pi\omega(X)) \\ -\sin(2\pi\omega(X)) & \cos(2\pi\omega(X)) \end{pmatrix}$$

也以 $2\cos 2\pi\omega(X)$ 为特征标. 故此作用必为 U. 故有

命题 14.9 简单实 T- 模或为赋有平凡作用的实直线, 或为 (2) 型的 2 维旋转而以非 0 权 ω 来刻画.

由这些结果, 我们又得到了实 T- 模的完全的表示. 它仍可由一组权 $(\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_k)$ 来表示. ω_0 是零权, 相应于平凡的子模 $U_0 \subset U$, 其维数任意. $\omega_1, \cdots, \omega_k$ 中的任一个都是相应于二维不变子模 $U_i \subset U$ 的非零权. U_0 就是 G 在 U 上作用的不动点集. 特别是, 我们恒有 $\dim U - \dim U_0 = 2k$ 为偶, 而我们需要 k 个权来刻画它.

§7. 根与 Weyl 群

我们可把 §6 的结果应用于任一 Lie 群都有的一种自然表示. 记住对每一个 $g \in G$, 均有群 G 上的内自同构 $I_g: x \longmapsto gxg^{-1}$. 它定义了 G 在其自身上的伴随作用. e 处的导映射 dI_g 是 Lie 代数 $L(G)$ 上的非异线性映射. 所以 $g \longmapsto dI_g$ 是 G 在矢量空间 $L(G)$ 上的一个表

示，称为伴随表示. 设 $T\subset G$ 是极大环面，由 § 6，$L(G)$ 可分裂为一平凡 T- 模 A_0 和一组由非零的权 $\omega_i: L(T)\longrightarrow \mathbf{R}$ 所描述的二维实简单 T- 模 A_i 之和：

$$L(G)=A_0\oplus A_1\oplus\cdots\oplus A_k. \qquad (*)$$

这些与 G 的伴随表示相关的权$(\omega_1,\cdots,\omega_k)$称为“根”. 它们与 A_0 一起完全描述了 G- 模 $L(G)$. 事实上，它们完全决定了 Lie 代数 $L(G)$ 的构造. 这一点暂时不讲，只讲一些结论. 现记 $dI_g=\mathrm{Ad}(g)$. 于是有群同态

$$\mathrm{Ad}: G\longrightarrow GL(L(G)).$$

因此可取其导映射 $d(\mathrm{Ad})=\mathrm{ad}$，并有以下图式：

$$\begin{array}{ccc} L(G) & \xrightarrow{\mathrm{ad}} & L(GL(L(G))) \\ \downarrow{\scriptstyle \exp} & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G & \xrightarrow{\mathrm{Ad}} & GL(L(G)), \end{array}$$

同态ad称为Lie代数 $L(G)$ 的伴随表示. 上面虽然引进了很多记号，事情其实并不复杂. 对每个 $X\in L(G)$，$\mathrm{ad}(X): L(G)\longrightarrow L(G)$ 是一线性映射. ad 保持 Lie 代数运算，即

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}[X,Y]&=\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)-\mathrm{ad}(Y)\mathrm{ad}(X)\\&=[\mathrm{ad}(X),\mathrm{ad}(X)].\end{aligned}$$

事实上线性映射 $\mathrm{ad}(X)$ 很容易算出来.

(1)　因ad是一导映射，$\mathrm{ad}(X)$ 可这样计算，取 G 中曲线 $t\longmapsto \exp(tX)$，应用 Ad 即得 $GL(L(G))$ 中的一曲线 $t\longrightarrow \mathrm{Ad}(\exp(tX))$. 然后定义

$$\mathrm{ad}(X)=\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(\exp(tX))\Big|_{t=0}.$$

所以对 $Y\in L(G)$ 有

$$\mathrm{ad}(X)(Y)=\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(\exp(tX))(Y)\Big|_{t=0}.$$

(2)　因 $\mathrm{Ad}(\exp(tX))$ 也是导映射，计算 $\mathrm{Ad}(\exp(tX))Y$ 时也可

取 G 中曲线 $s \longmapsto \exp(sY)$，应用 $I_{\exp(tX)}$ 又得一曲线

$$\beta: s \longmapsto I_{\exp(tX)}(\exp(sY)) = \exp(tX)\exp(sY)(\exp(tX))^{-1}.$$

然后 $\mathrm{Ad}(\exp(tX))(Y) = \frac{d\beta}{ds}\Big|_{s=0}$.

(3)　联合(1)，(2)，我们有

$$\mathrm{ad}(X)(Y) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}[\exp(tX)\exp(sY)(\exp(tX))^{-1}]\Big|_{s=0,t=0}.$$

(4)　但在第五章中已讲了怎样把上式展为 Taylor 级数：

$$\exp(tX)\exp(sY)\exp(-tX) = \exp[sY + [X,Y]ts + \cdots].$$

故有

$$\mathrm{ad}(X)(Y) = [X,Y].$$

这就是 $L(G)$ 中的括弧运算.

应用此结果到 $L(G)$ 作为 T-模通过伴随表示所得的分解($T \subset G$ 是一环面)：

$$L(G) = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1 \oplus \cdots \oplus \Lambda_k.$$

当然不论 T 是否极大，这种分裂总是有的. 所以我们暂时设 $T \subset G$ 是一任意环面.

记住 Λ_i 是权 ω_i 的根子空间，Λ_0 则特留给权零 $\omega_0 = 0$. 这就是说对 $X \in L(T)$ 与 $Y \in \Lambda_0$ 有

$$dI_{\exp(tX)}(Y) = Y.$$

对 t 求导并令 $t = 0$，按上面的计算有

$$\mathrm{ad}(X)(Y) = [X,Y] = 0.$$

换句话说，

$$\Lambda_0 = \{Y \in L(G) \mid [X,Y] = 0 \text{ 对一切 } X \in L(T)\}$$

是 $L(T)$ 的交换子. 这可对 $L(G)$ 的任意子代数定义. 其本身也是一个子代数，由 Jacobi 恒等式易证. 因 $L(T)$ 是 Abel 的，故 $L(T) \subset \Lambda_0$. 若有 $Y \in \Lambda_0$ 但 $\notin L(T)$，容易看到，$L(T)$ 和 Y 生成的子空间 $K = \langle L(T), Y\rangle$ 是一 Abel 子代数. 故它生成一 Abel 子群 $H \supset T$. H 严格大于 T，因为 $\dim H = \dim K > \dim L(T) = \dim T$. 故若 T 为极大，则 $\Lambda_0 = L(T)$. 其逆也易见. 所以，$L(G)$ 可分裂为 $L(T)$ 和相应于非零

权 ω_i 的二维子空间 Λ_i 之和

$$L(G)=L(T)\oplus\Lambda_1\oplus\cdots\oplus\Lambda_k.$$

这一事实刻画了 T 之极大性. 特别是流形 G/T 为偶数维.

也很容易在 Λ_i 上计算 ad(X). 记住在 Λ_i 上有

$$dI_{\exp(tX)}=\begin{pmatrix}\cos(2\pi\omega_i(tX)) & \sin(2\pi\omega_i(tX))\\ -\sin(2\pi\omega_i(tX)) & \cos(2\pi\omega_i(tX))\end{pmatrix}.$$

再对 t 微分, 令 $t=0$, 并记住 ω_i 是线性的, 我们有

$$\mathrm{ad}(X)=\begin{pmatrix}0 & 2\pi\omega_i(X)\\ -2\pi\omega_i(X) & 0\end{pmatrix}.$$

事实上, 在 $L(G)$ 的复化中看这一点还更清楚. 记住 $(\Lambda_j)_c=\Lambda_j\oplus\overline{\Lambda}_j$ 即分解为一维的复 T- 模 (仍记为 Λ_j) 及其共轭 $\overline{\Lambda}_j$ 之和. 在 Λ_j 上有 $dI_{\exp(tX)}=e^{2\pi i\omega_j(tX)}$. 微分后, 我们得到

$$\mathrm{ad}(X)=2\pi i\omega_j(X)\quad 在\ \Lambda_j\ 上,$$

$$\mathrm{ad}(X)=-2\pi i\omega_j(X)\quad 在\ \overline{\Lambda}_j\ 上.$$

换言之, Λ_j 和 $\overline{\Lambda}_j$ 是相应于固有值 $\pm\omega_j(X)$ 的固有空间. 将 $L(G)_c$ 分裂为 $L(T)_c$ 和 $\Lambda_j, \overline{\Lambda}_j$ 可对 $X\in L(T)$ 将所有线性算子 ad(X) 同时对角化. 在 Lie 代数特别是复 Lie 代数的代数理论中, 即不问它们是否来自某个 Lie 群 (虽然 Weyl 的一个定理指出许多 Lie 代数确来自 Lie 群), 也想作出这样一个分解. 相应于 $L(T)$ 的部分称为 Cartan 子代数.

为证明 Cartan 定理还需要一点东西, 即 Weyl 群. 记住对于酉群 $U(n)$, Weyl 群就是由那些使共轭运算 I_g 保持对角阵子群 $T\subset U(n)$ 不变的 $g\in U(n)$ 所成的置换群. 这显然可以推广到任意 Lie 群 G. 令 $T\subset G$ 为极大环面. 考虑

$$N(T)=\{g\in G\mid\ I_g(T)=gTg^{-1}=T\},$$

并称之为 T 的正规化子. 它显然是 G 的闭子群. 正规化子可对任意环面 $T\subset G$ 乃至对任意子群 $H\subset G$ 来定义. 它是 G 中使 H 为其正规子群的最大子群. 正规化子一词即由此而来. 故有商群 $N(T)/$

T. 然而 $T\subset G$ 为极大环面一事有一些重要推论.

令 Aut(T)为 T 的自同构群,即

$$\mathrm{Aut}(T)=\{\varphi\,|\,\varphi: T\longrightarrow T \text{ 为同构}\}.$$

我们知道这个群是什么样子. 若 $T=S^1\times\cdots\times S^1$ 而 $P_j: T\longrightarrow S^1$ 是 T 到第 j 个因子的投影,则 φ 可以由 $\omega_j: T\xrightarrow{\varphi}T\xrightarrow{P_j}S^1$ 决定. 但 ω_j 只是一个权而且是一个整数的 k 元组($k=\dim T$). 于是 φ 可用 $k\times k$ 整数矩阵(ω_{ij})来表示. 换言之,Aut(T)就是 $k\times k$ 整数单模矩阵之群. 因矩阵之元为整数,此群必为离散的. 特别是,Aut(T)完全不连通(即每个连通分支只是一点).

有一个自然的同态

$$\Phi: N(T)\longrightarrow \mathrm{Aut}(T)$$

即 $g\longmapsto I_g$,令 $K=\ker\Phi$,即

$$K=\{g\in N(T)\,|\,gt=tg \text{ 对一切 } t\in T \text{ 成立}\}.$$

它是 T 在 $N(T)$中的交换子. 由上所述$N(T)/K$ 完全不连通. 一个简单的点集论事实是此时 K 必包含 $N(T)$之恒等分支 N_0. (否则,连通集 $N_0/(N_0\cap K)\subset N(T)/K$ 将多于一点.)现在 $T\subset N(T)$是连通的,故 $T\subset N_0$. 但 $N_0\subset K$ 即指对 $t\in T$ 和 $g\in N_0$ 有 $gt=tg$,这又意味着对 $X\in L(T)$和 $Y\in L(N_0)$有$[X,Y]=0$,亦即 $L(N_0)\subset\Lambda_0$. 若 $T\subset G$ 为极大,必有 $L(T)=\Lambda_0\supset L(N_0)$,从而 $T=N_0$ 即 $N(T)$之恒等分量.

再回忆一个简单的点集论事实. 在任一拓扑空间 X 中,分支 $C\subset X$ 必为闭集. 但若 X 为局部连通,C 也是开的. 因为 Lie 群总是局部连通的,恒等分支 $G_0\subset G$ 既开又闭,从而空间 G/G_0是离散的(即每一点为一开集). 现 $N(T)\subset G$ 为一闭子群,故为一 Lie 群. 由前所述,$N(T)/T$ 是离散空间. 但若 G 为紧,这一点我们总是假设了的,$N(T)/T$ 也紧. 紧离散空间是有限集. 故当 $T\subset G$ 为极大环面时,群$N(T)/T$ 是有限群. 称为 G 之 Weyl 群,记作 $W(G)$.

因 T 为可换的,$T\subset\ker\Phi$,故有同态

$$\Phi: W(G) = N(T)/T \longrightarrow \mathrm{Aut}(T),$$

即是说 $W(G)$ 可通过 I_g 作用于 T. 它其实是一个嵌入，这是 Cartan 定理的推论，即 $T=\ker\Phi$，或 $W(G)$ 有效地作用于 T 上. 证明如下：若 $g_0\in N(T)$ 在 $\ker\Phi$ 中，则对一切 $t\in T$，$g_0t=tg_0$，所以由 g_0 和 T 生成的闭子群 H 是 Abel 群. 若 T 仍为极大的，$T=H_0$ 是恒等分支而 H/T 是有限的，即 $g_0^k\in T$ 对某整数 k 成立. 这表明，H/T 作为由 $[g_0]$ 生成的群是循环群. 稍微修改一下关于 T 的拓扑生成元的证明即知 H 有一拓扑生成元：$H=\overline{\langle x_0\rangle}$. 若 Cartan 定理为真，则有某个 g 使 $x_0\in gTg^{-1}$，从而 $g_0\in gTg^{-1}$. 但我们又知 $T\subset H=\overline{\langle x_0\rangle}\subset gTg^{-1}$，所以 $g_0\in gTg^{-1}=T$.

Weyl 群对于伴随表示 $L(G)$ 的分解也有推论. 记住，对复化的 Lie 代数 $L(G)_c$ 作为 T-模我们有

$$L(G)_c = L(T)_c \oplus A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$$

(对实 Lie 代数也可由此得一分解，这很容易对付)，A_j 是权为 ω_j 的根空间，即对 $Y\in A_j$，$X\in L(T)$ 有

$$dI_{\exp X}(Y) = e^{2\pi i\omega_j(X)}Y.$$

令 $\lambda\in W(G)$ 由 $g\in N(T)$ 表示，可定义新的线性形式 $\widetilde{\omega}_j$：

$$\widetilde{\omega}_j(\exp X) = \omega_j(g^{-1}(\exp X)g)$$

(它只依赖于 λ). 也可以定义一个新的矢量：

$$\widetilde{Y} = dI_gY$$

(我们不问 $\widetilde{Y}$ 是否依赖于 g 的选择). 于是由 $N(T)$ 的定义我们有

$$g^{-1}(\exp X)g = \exp X_1$$

对某个 $X_1\in L(T)$ 成立. 因此

$$\begin{aligned} dI_{\exp X}(\widetilde{Y}) &= dI_{\exp X}\cdot dI_gY = dI_{(\exp X)g}(Y) \\ &= dI_{g\exp X_1}(Y) = dI_g\cdot dI_{\exp X_1}(Y) \\ &= dI_g(e^{2\pi i\omega_j(X_1)}Y) = e^{2\pi i\omega_j(X_1)}\widetilde{Y} \\ &= e^{2\pi i\omega_j(g^{-1}(\exp X)g)}\widetilde{Y} = e^{2\pi i\widetilde{\omega}_j(X)}\widetilde{Y}. \end{aligned}$$

这说明 $\widetilde{Y}$ 是 $\widetilde{\omega}_j$ 的一个固有矢量. 所以 $\widetilde{\omega}_j$ 也可以作为一个权. 但

$\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_l$ 已是所有的权，所以有某个 l 使 $\widetilde{\omega_j}=\omega_l$. 换言之，$W(G)$ 可以看成是权之集合上的置换群. 因为当 $\omega_j=0$ 时显然 $\widetilde{\omega_j}=0$，$W(G)$ 将一切非零权重新排列. 这一作用的详细分析是 Lie 代数的构造理论的关键思想.

§8. E. Cartan 定理

现在可以证明重要的 E. Cartan 定理了.

定理 令 G 为紧连通 Lie 群，$T\subset G$ 为极大环面，则

$$G=\bigcup_{g\in G}gTg^{-1}.$$

证明的计划如下：已给 $g\in G$，有陪集空间上的左平移 $L_g: G/T\longrightarrow G/T$. 若 L_g 有一不动点，即有 $g_0\in G$ 使

$$gg_0T=g_0T,$$

即有某 $t\in T$ 使 $gg_0=g_0t$，这就正表示 $g\in g_0Tg_0^{-1}$. 所以定理归结为证明每个 L_g 均有不动点. 为此回想我们已有 Lefschetz 不动点定理：若 Lefschetz 数 $L(L_g)=\sum_i(-1)^i\mathrm{Tr}(L_g^*)^i$ 非 0，则 L_g 有不动点. 这样做的好处是诱导映射 L_g^* 在同伦下不变. 因 G 为连通，所以所有 L_g 均为同伦. 这样只需看一个特殊的 L_g. 例如取 $g=$ 恒等元 e，有 $L_e=1$ 而

$$L(L_e)=\chi(G/T)$$

即 G/T 的 Euler 示性数. 但这没有什么用，因为我们不知道怎样计算 $\chi(G/T)$. L_e 当然有不动点(G/T 之一切点). 但因 Lefschetz 定理之逆不一定对，由此得不出 $L(L_e)\neq0$. 所以我们的想法是不用 $g=e$ 而作另外适当的选择使能计算 $L(L_g)$. 为此需要回顾一下第十一章中关于相交数的讨论. 回忆起若 N_1,N_2 为定向流形 M 的两个定向子流形，其维数互补，即 $\dim N_1+\dim N_2=\dim M$，必有一整数 $N_1\cdot N_2$ 称为相交数. 相交数有两种计算方法：

(1) 从几何上说，若 N_1,N_2 相互位置很好，意即若 $P\in N_1\cap$

N_2，则切空间 $T_P(N_1)$、$T_P(N_2)$ 张成 $T_P(M)$（即所谓横截相交）. 我们指定一指标 $\varepsilon(P)=\pm 1$，视（N_1 之定向）其后再添加（N_2 之定向）$=\pm$（M 之定向）而定. 若只有有限多个交点 $P_1,\cdots,P_l$ 且全为横截，则规定

$$N_1\cdot N_2=\sum_i \varepsilon(P_i).$$

（2） 从代数上看，包含映射 $i_1: N_1\longrightarrow M$ 和 $i_2: N_2\longrightarrow M$ 给出两个同调类 $i_{1*}[N_1]$，$i_{2*}[N_2]$；$[N_1]$，$[N_2]$是 N_1 和 N_2 的基本类. 由 Poincaré 对偶性，这又给出两个上同调类 μ_1,μ_2. 于是

$$N_1\cdot N_2=\langle\mu_1\mu_2,[M]\rangle.$$

第二种作法的好处是 $N_1\cdot N_2$ 恒有定义而不问它们是否横截. 我们甚至可以讨论自交 $N_1\cdot N_1$. 二者并无矛盾. 自交就是用同伦稍微变动 N_1（使 μ_1 不变）而保证原来的象与新的象横截.

子流形 $N\subset M$ 的 Poincaré 对偶 μ 可用 Thom-Pontrjagin 构造作出. 令 V 为 N 在 M 中的一管状邻域，V 可以与 N 在 M 中的法丛等同. 故有 Thom 同构 $\varphi: H^k(N)\xrightarrow{\sim} H^{k+l}(V,\dot V)$，$l=\dim M-\dim N$. $i_!$ 是一个复合

$$i_!: H^k(N)\overset{\varphi}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} H^{k+l}(V,\dot V)\overset{\text{切除}}{\underset{\sim}{\longleftarrow}} H^{k+l}(M,M-N)\longrightarrow H^{k+l}(M).$$

且 $\mu_1=i_!(1)$.

我们已在 $\Delta: M\subset M\times M$ 为对角集的特例下做过这件事. 在那里，我们算出了

$$\langle\Delta^*\Delta_!(1),[M]\rangle=\chi(M)$$

是 M 的 Euler 示性数（第十一章 § 4）. 另一方面，$\mu=\Delta_!(1)$是 $\Delta_*(M)$在 $M\times M$ 中的对偶. 所以

$$\langle\Delta^*\Delta_!(1),[M]\rangle=\langle\mu,\Delta_*[M]\rangle=\langle\mu\cdot\mu,[M\times M]\rangle=\chi(M).$$

合并以上各点，即知 Lefschetz 数 L（L_g）是

L（L_g）$=L$（L_e）$=\chi$（G/T）$=$（G/T）$\times$（G/T）中对角集之自交数.

现在用（1）中的方法来计算这个相交数. 先作对角集

$$\Delta: G/T \longrightarrow (G/T)\times(G/T).$$

L_g 给出 Δ 以左平移 L_g 如下：

$$\Delta_g = \{(x, L_g(x)) \mid x \in G/T\},$$

即 L_g 之图象. 我们要仔细选取 g 使 Δ 与 Δ_g 有无限的横截相交. 设在极大环面 T 中取 $g=t\in T$. 点

$$P = g_0T \in \Delta \cap \Delta_g$$

只不过表示 $g_0^{-1}tg_0\in T$. 故若 $t\in T$ 是一个拓扑生成元，则 $g_0Tg_0^{-1}\subset T$ 或 $g_0\in W$ (G). 其逆也真. 故对生成元 $t\in T$ 有

$$\Delta \cap \Delta_t \simeq W(G)$$

与 Weyl 群一一对应，故它为一有限集.

最后一步是确定可得横截相交并计算其局部指标. 为此，我们先注意因为 G/T 上的左平移 L_g 都是保持定向的(均同伦于恒等映射) 微分同胚，在某一点发生的事都完全在其它点重现. 特别是若一个交点是横截的，其它点也是，而所有局部指标均同号. 所以只要看一个相交点就够了，例如看 $e_0=(\bar{e},\bar{e})$. $T_{e_0}(\Delta)=\{(u,u)\mid u\in T_{\bar{e}}(G/T)\}$, $T_{e_0}(\Delta_t)=\{(u,dL_tu)\mid u\in T_{\bar{e}}(G/T)\}$. 非横截就是这些空间有非 0 交，即有 $u\neq0$ 使

$$dL_tu = u.$$

所以我们所需的条件即 dL_t 不以 1 为固有值. 注意，$T_{\bar{e}}(G/T) = T_e(G)/T_e(T) = L(G)/L(T)$. 由于分解，可将 $T_{\bar{e}}(G/T)$ 与 $T_{\bar{e}}(G/T) = \Lambda_1\oplus\cdots\oplus\Lambda_k$ 等同起来，即非 0 权空间 Λ_i 之直和. 再由图式

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{l_t} & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ G/T & \xrightarrow[L_t]{} & G/T \end{array}$$

可知，为了计算 dL_t 只需在 $L(G)$ 上计算 dl_t 再投影到 $T_{\bar{e}}(G/T)$ 上去. 但我们完全知道怎样去做. 每个 Λ_j 都是不变的，在其上

$$dl_t = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\omega_j(X)) & \sin(2\pi\omega_j(X)) \\ -\sin(2\pi\omega_j(X)) & \cos(2\pi\omega_j(X)) \end{pmatrix},$$

这里 $t=\exp X$. 所以

$$\det(dI_t - I) = (\cos(2\pi\omega_j(X)) - 1)^2 + \sin^2(2\pi\omega_j(x))$$
$$= 2(1 - \cos(2\pi\omega_j(X))).$$

所以，我们需要的条件就是：对所有 $j=1, 2, \cdots, n$, $\omega_j(X) \neq$ 整数. 因为方程 $\omega_j(X)=$整数正是一超平面的平移面只有有限多个 ω_j，所以可以找到 $t\in T$ 避开所有这些超平面.（附带说，这些点称为正规点. 所以 T 中正规点集为开且在 T 中稠.）注意 T 之（拓扑）生成元也成一稠密集（即是“无理点”），所以可以取一生成元 t 同时也是正规点. 这就给出了所需的一切. 注意，我们还得出了一重要推论.

定理 Weyl 群 $W(G)$ 之阶等于流形 G/T 的 Euler 示性数.

例如设 $G=U(n)$. 我们已看到 $W(G)$ 至少包含了 T^n 坐标的置换（即 T^n 在 $\mathbf{C}^n$ 上的自然作用的权之集）. 故有 $|W(G/T)|\geqslant n!$. 另一方面，我们在上一章已算出了 $U(n)/T$ 的 Poincaré 多项式是

$$P(U(n)/T,t) = (1-t^2)(1-t^4)\cdots(1-t^{2n})/(1-t^2)^n$$
$$= (1+t^2)(1+t^2+t^4)\cdots(1+t^2+\cdots+t^{2n-2})$$

（见 Borel 定理之证及子群序列 $T=G_n\subset\cdots\subset G_0=G$）. 故有

$$\chi(U(n)/T) = P(U(n)/T,-1) = 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n = n!,$$

由此可知 $W(U(n))$ 就是 $T^n\subset U(n)$ 坐标之置换群.

§9. 其它评述

我们已经看到，从一开始就使紧 Lie 群本质上更为简单的基本事实是不变积分，所以非常希望知道它能否推广到其它群上. 答案是肯定的. 在任意局部紧群上有所谓 Haar 测度给出一种不变积分. 我们最感兴趣的无论如何还是紧群，因为特征标通常没有紧支集，不变积分可以相当直接地作出面不必求助测度论或光滑性的考虑. 这一点详述于 Pontrjagin 的书中（中译本第五章）.

因为每个 Lie 群都有相关联的 Lie 代数，所以希望对 Lie 代数的表示也有平行的代数理论．在计算伴随表示时我们已看到了一点．给出定义当然是容易的．记住，对于矢量空间 V，到其自身的线性映射之集（即自同态空间）E（V）在以下的括弧运算下是一 Lie 代数

$$[A,B] = A \circ B - B \circ A,$$

"$\circ$"表示复合．Lie 代数 L 的表示就是对某一矢量空间 V 的 Lie 代数同态：

$$\alpha : L \longrightarrow E(V).$$

这件事的另一个说法是元素 $x \in L$ 作为一个线性映射作用在 V 上并适合以下条件：

$$[x,y]v = x(yv) - y(xv).$$

注意，对于 $G=GL$（V），L（G）$=E$（V）．所以每个群表示 $\varphi : G \longrightarrow GL$（$V$）都诱导出一个 Lie 代数表示，$d\varphi : L(G) \longrightarrow E(V)$，并使以下图式为可换：

$$\begin{array}{ccc} L(G) & \xrightarrow{d\varphi} & E(V) \\ {\scriptstyle \mathrm{Exp}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G & \xrightarrow[\varphi]{} & GL(V). \end{array}$$

因为 $d\varphi$ 局部地决定 φ，而若 G 为连通，又可整体地决定 φ，我们知道，两个群表示为同构 iff 其相关的 Lie 代数表示为同构．另一方面我们又知道 $d\varphi$ 只能局部地保证 φ 存在，所以我们会猜想到一个 Lie 群 G 的 Lie 代数的所有表示不一定都来自 G 的表示．同一件事换一个说法：L（G）的一个表示只是一个"无穷小"表示，不一定可能把它"积分"成 G 的一个整体表示．甚至在最简单的情况下也会遇到这种现象．令 $L=L$（S^1），$V=\mathbf{C}^1$ 从而 E（V）$=\mathbf{C}^1$．因为 L 和 E（V）都是平凡的 Lie 代数，一个表示 $\alpha : L \longrightarrow E$（$V$）只是一个线性映射．特别可以取 α（x）$=$（$1/2$）x．但是找不到一个群表示 $\varphi : S^1 \longrightarrow \mathbf{C}^1$ 使 $d\varphi=\alpha$，因为我们知道 $d\varphi$（x）$=kx$ 只

对 k 为某个整数成立（φ 是权）.

若 G 为单连通，则在 G 与 $L(G)$ 的表示之间有一一对应. 但即在那里，至少就我们的理论在本章中展开的程度而言，群的理论比较简单而自然（例如有权），所以群的理论对代数理论的影响更大而不是相反. Weyl 的结果就是一例. 从群的观点看来，紧群的情况是最有利的. 于是有了一个问题：何时 Lie 代数 L 是一紧 Lie 群 G 的 Lie 代数？这样的 Lie 代数也称为紧的（还能叫什么呢？）这里有一个来自群的考虑的纯代数的判据. 令 V 为一 G-模，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为一不变内积，即 $\langle gu, gv\rangle = \langle u, v\rangle$. 令 $g=\exp tX$ 并对下式在 $t=0$ 处求导：

$$\langle \exp(tX)\, u, \exp(tX)\, v\rangle = \langle u, v\rangle$$

即得

$$\langle Xu, v\rangle + \langle u, Xv\rangle = 0, \quad X \in L, u, v \in V. \tag{1}$$

若从任一 L-模 V 开始，内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 当 (1) 成立时也称为"不变"的（即在"无穷小"意义下不变）. 任给一 Lie 代数 L，恒有伴随表示：

$$L \longrightarrow E(L), \qquad x \longmapsto \mathrm{ad}x$$

$(\mathrm{ad}x)(u) = [x, u]$. 于是得一定理：$L$ 为紧 iff 它有一在伴随作用下不变的内积，即有

$$\langle [x,u], v\rangle + \langle u, [x,v]\rangle = 0.$$

在任一 Lie 代数 L 上，均有一自然的不变双线性形式称为 Cartan-Killing 形式

$$K(x,y) = -\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}x \circ \mathrm{ad}y)$$

（这是 Lie 代数理论的第一个真正的代数思想）. 它是不变的，但不一定是内积，即不一定正定. 例如，若 L 是平凡的使 $\mathrm{ad}x=0$，则当然有 $K\equiv 0$. 若 K 为一内积就好了. 这样的 L 称为半单的. 所以，若我们熟悉紧群理论，最适宜讨论的类就是半单 Lie 代数.

因为表示论是讨论的线性映射，有固有值是方便的. 因此我们时常先讨论复表示. 由群的观点看，$L(G)$ 总是实的，除非复化.

但在讨论 Lie 代数时，我们可以从复 Lie 代数开始. 因为 K 恒为（复）双线性的，它决非 Hermite 内积，甚至尽管它是非异的. 然而若 K 为非异仍然是很好的，我们仍称这种 L 是半单的. Weyl 的一个令人吃惊的结果是，对任一复半单 Lie 代数 L，必有一紧单连通 Lie 群 G，使 $L_c(G)=L$. 所以在相当大程度上，复半单 Lie 代数的表示论与紧 Lie 群的表示论是一回事. 读者若想得知更详尽更好的说明，仍建议阅读 Pontrjagin 的书.

参 考 文 献

[1] C. Chevalley, *Theory of Lie groups*, Vol. 1—3, Princeton, N. J., Princeton Univ. Press, 1946.

[2] L. S. Pontrjagin, *Topological groups*, Princeton, N. J., Princeton Univ. Press, 1939. 中译本：邦德列雅金，《连续群》，曹锡华译，科学出版社.

[3] *Sèminar de H. Cartan*, 1959—1960, Exposé No. 1.

第十五章　示性类续论

§1. Borel-Hirzebruch 格式

我们已在第十三章中讨论了几种示性类：与酉群 $U(n)$ 有关的陈类，与正交群 $O(n)$ 有关的 Stiefel-Whitney 类和 Pontrjagin 类. 从一般理论观点看来，它们只是特例. 对每个群 G 都可假设有一组示性类. 只需找到一个万有 G-丛 $EG \longrightarrow BG$ 并计算分类空间 BG 的上同调 $H^*(BG)$. 当然在事实上不可能对每个群 G 都作出显式的计算. 我们的主要兴趣仍在研究矢量丛. 因此，$U(n)$ 和 $O(n)$ 的示性类最为重要. 但是我们确又看到矢量丛在许多时候可以化为群同态 $G \xrightarrow{\alpha} U(n)$，即有一表示. 所以我们打算寻找表示论与示性类的关系. 所得的理论称为 Borel-Hirzebruch 格式，见于他们 1958 年合写的著名论文[1].

我们在第十四章中得知，表示 $\alpha: G \longrightarrow U(n)$ 完全由它在一极大环面 $T \longrightarrow U(n)$ 上的限制 $\alpha|T$ 决定，后者又决定于一组 n 个"权"$(\omega_1, \cdots, \omega_n)$. 权就是一些同态 $\omega_j: T \longrightarrow S^1 = U(1)$. 但它们很快又变成上同调类 $\omega_j \in H^2(BT)$. 所以若理解了包含映射 $\rho: T \subset G$ 诱导出的映射 $\rho^*: H^*(BG) \longrightarrow H^*(BT)$，即可把权和示性类联系起来. 在 $G = U(n)$ 的特例下，通过详细计算已知 ρ^* 为单射，其象即由 Weyl 群 $W(G)$ 所确定的 $H^*(BT)$ 的子群. 人们自然地会问这是否一般均成立，答案是有限制地为真. 这就是下述的 Borel 的基本定理，它是整个格式的基础.

定理(Borel)　令 G 为紧连通 Lie 群，$T \subset G$ 为一极大环面，则在系数为一零特征域的上同调中，由包含映射 $\rho: T \subset G$ 所诱导的

同态

$$\rho^* : H^*(BG) \longrightarrow H^*(BT)$$

是单射，其象是 G 的 Weyl 群 $W(G)$ 所确定的元素组成的子代数 $H^*(BT)^W$.

不巧的是，不知道这个定理有无完全初等(例如象 $G=U(n)$ 那样)的证明. 所以我们只好以此作为起点尽可能做一些事.

在这之前，再回想一下怎样用不同的但是等价的方法理解权的概念.

(1) 权 $\omega : T \longrightarrow S^1$ 就是由环面群 T 到单模复数群 $S^1=U(1)$ 内的同态.

(2) 权 $\omega : L(T) \longrightarrow \mathbf{R}$ 是 T 之 Lie 代数上的线性泛函且映整格点 $\Gamma=\ker(\exp : L(T) \longrightarrow T)$ 为整数 $\mathbf{Z}\subset\mathbf{R}$. 指数映射 $L(S^1)=\mathbf{R} \longrightarrow S^1$ 即通常的 $t \longmapsto e^{2\pi i t}$.

(3) 权 ω 即整系数上同调类：$\omega\in H^2(BT;\mathbf{Z})$.

(1)与(2)的等同是明显的. 为由(1)到(3)需作 ω-扩张 $ET\times_T S^1 \longrightarrow BT$. 它是 BT 上的主 S^1-丛，故有示性类 $w\in H^2(BT;\mathbf{Z})$.

由(3)到(1)可采用坐标. $\Gamma\subset L(T)$ 是秩 $n=\dim T$ 的自由 Abel 群. 取 Γ 的一个基 $(e_1,\cdots,e_n)$(它也是 $L(T)$ 的矢量空间基)，于是可将 $L(T)$ 与 $\mathbf{R}^n$ 等同，T 则与 $T_0^n=S^1\times\cdots\times S^1$ 等同如下：

$$\begin{array}{ccc} L(T) & \longrightarrow & \mathbf{R}^n, \\ X=\sum_i t_i e_i & \longmapsto & (t_1,\cdots,t_n) \\ \Big\downarrow \exp & & \Big\downarrow \\ T & \xrightarrow{\ \Phi\ } & S^1\times\cdots\times S^1=T_0^n, \\ \exp X & \longmapsto & (e^{2\pi i t_1},\cdots,e^{2\pi i t_n}). \end{array}$$

记住 $H^2(BS^1)=H^2(\mathbf{CP}^\infty)$ 有一典则生成元 $\tau\in H^2(\mathbf{CP}^\infty)$，即典则复线丛的 Euler 类 γ(见第十三章). 令 $P_j : T_0^n \longrightarrow S^1$ 是到第 j 个因子上的投影，则等同关系 Φ 定义了 $H^2(BT;\mathbf{Z})$ 的一个基 $\{\sigma_j=$

$\Phi^* P_j^*(\sigma), j=1,\cdots,n\}$. 在这个基底下，可以写出

$$w = \sum_j \lambda_j \sigma_j,$$

λ_j 按定义为整数. 所以，同态

$$\tilde{w}(\exp X) = \prod_j (e^{2\pi i t_j})^{\lambda_j} = e^{2\pi i \sum_j t_j \lambda_j}$$

是 T 上之权. 应该验证 $\tilde{w}$ 与基底的选取无关. 令$(e'_1,\cdots,e'_n)$为 Γ 之另一基底，由定义有

$$e'_i = \sum_j \mu_{ij} e_j,$$

μ_{ij}是整数. 故对 $X = \sum_i t'_i e'_i$，有

$$X = \sum_{i,j} t'_i \mu_{ij} e_j = \sum_j t_j e_j, \quad t_j = \sum_i \mu_{ij} t'_i.$$

设用$(e'_1,\cdots,e'_n)$定义的等同映射是

$$\Psi: T \longrightarrow T_0^n, \quad \sum_i t'_i e'_i \longmapsto (e^{2\pi i t'_1},\cdots,e^{2\pi i t'_n}).$$

于是

$$\alpha = \Phi \Psi^{-1}: T_0^n \longrightarrow T_0^n.$$

可以用权 $\alpha_j = P_j \alpha$ 来简单地表示为

$$\alpha_j(z_1,\cdots,z_n) = \prod_i (z_i)^{\mu_{ij}}.$$

由张量积的示性类之公式(见第十三章)有

$$\alpha_j^*(\tau) = \sum_i \mu_{ij} \tau_i, \quad \tau_i = P_i^*(\tau).$$

故有

$$\sigma_j = \Phi^* P_j^*(\tau) = \Psi^* \alpha_j^*(\tau) = \sum_i \mu_{ij} \Psi^* P_i^*(\tau) = \sum_i \mu_{ij} \sigma'_i.$$

令(ν_{ij})为(μ_{ij})之逆，我们有

$$\sigma'_i = \sum_j \nu_{ji} \sigma_j.$$

现在有

$$w=\sum_i\lambda_i'\sigma_i'=\sum_{i,j}\lambda_i'\nu_{ji}\sigma_j=\sum_j\lambda_j\sigma_j,$$

其中 $\lambda_j=\sum_i\lambda_i'\nu_{ji}$，故有 $\sum_j t_j\lambda_j=\sum_{j,i,k}\mu_{ij}\nu_{jk}t_i'\lambda_k'=\sum_i t_i'\lambda_i'$.

现在容易表述 Borel-Hirzebruch 格式了. 令 G 为一紧 Lie 群，$T\subset G$ 为一极大环面，$G\xrightarrow{\alpha}U(n)$ 为 G 的复表示，则 α 可由一组权 $(\omega_1,\cdots,\omega_n)$ 来表示. 令 $\xi: EG\longrightarrow BG$ 为一万有 G-丛面 $\alpha(\xi): EG\times_G U(n)\longrightarrow BG$ 是 ξ 的 α 扩张，我们有

定理(Borel-Hirzebruch)　在上述情况下，$\alpha(\xi)$ 的陈类满足方程

$$\rho^*[c(\alpha(\xi))]=\prod_j(1+\omega_j),$$

$\rho^*: H^*(BG)\longrightarrow H^*(BT)$ 是由包含映射 $\rho: T\longrightarrow G$ 诱导的典则同态. 特别是，若上同调的系数域具有特征 0，则此式可决定 $c(\alpha(\xi))$.

几乎没有什么需要证明的了. 令 $T_0^n\subset U(n)$ 为对角阵子群，可设 $\alpha(T)\subset T_0^n$，从而 $(\omega_1,\cdots,\omega_n)$ 只是描述 $\alpha: T\longrightarrow T_0^n$ 的权. 令 $\tau_i=P_i^*(\tau)\in H^2(BT_0^n)$. 由定义有：万有陈类将由下式给出，其中 $\rho_0: T_0^n\longrightarrow U(n)$ 是包含映射：

$$\rho_0^*(c)=\prod_j(1+\tau_j).$$

记住，从 $\alpha(\xi)$ 的分类映射由下式给出：

$$\begin{array}{ccc}EG & \xrightarrow{\varphi} & EU(n)\\ \downarrow & & \downarrow\\ BG & \longrightarrow & BU(n),\end{array}$$

其中 φ 是“等变”(equivariant)的，即对 $x\in EG, g\in G$ 有

$$\varphi(xg)=\varphi(x)\alpha(g).$$

由此可得下面的可换图式：

$$
\begin{array}{ccccc}
EG & \xrightarrow{\varphi} & & EU(n) & \\
\vdots & \searrow & & \vdots & \searrow \\
\vdots & & EG/T = BT & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & EU(n)/T_0^n = BT_0^n \\
\downarrow & \swarrow \rho & & | & \swarrow \rho_0 \\
BG & \longrightarrow & & BU(n) &
\end{array}
$$

因为$\bar{\varphi}^*=\alpha^*$，而由等同的格式，$\omega_j=P_j\circ\alpha\cong\alpha^*P_j^*\tau=\bar{\varphi}^*(\tau_j)$，即得定理之证. 注意，上面的$EG\dashrightarrow BG$可代以任意的主$G$-丛$E\longrightarrow B$，这时$\rho$应代以$\rho: E/T\longrightarrow B$而$\omega_j$应解释为$\bar{\varphi}^*(\tau_j)$.

对于Pontrjagin类也有类似结果. 回忆一下定义：令$E\longrightarrow B$为一实丛，将它复化可得一复丛$E_{\mathbf{C}}\longrightarrow B$. 然后定义

$$p_j(E)=(-1)^j c_{2j}(E_{\mathbf{C}}).$$

我们重新来说明这一定义. 我们讨论的是$G=O(n)$，所以用万有G-丛$\xi: EG\longrightarrow BG$来代替$E\longrightarrow B$. 复化只是一个表示$\alpha: G\longrightarrow U(n)$. 由定义，

$$p_j(\xi)=(-1)^j c_{2j}(\alpha(\xi)).$$

所以我们可以应用Borel-Hirzebruch格式. 考虑以下形状的分块正交阵所成的子群$T\subset O(n)$：

$$\begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{bmatrix},$$

其中每个A_j均为以下形状：

$$A_j=\begin{pmatrix} \cos(2\pi t_j) & \sin(2\pi t_j) \\ -\sin(2\pi t_j) & \cos(2\pi t_j) \end{pmatrix}.$$

方块数$k=m$. 若$n=2m$或$2m+1$，而且约定在n为奇时，则在对角线上A_k之后再加上1，即有

$$T=\left\{\begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_m \end{bmatrix} \middle| n=2m\right\}\subset O(2m),$$

$$T=\left\{\begin{pmatrix}A_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & A_m & \\ & & & 1\end{pmatrix}\middle| n=2m+1\right\}\subset O(2m+1).$$

众所周知，每个正交阵均可"对角线化"如上. 因此 $T\subset G$ 为极大环面，t_j 可用作 T 之坐标，即视

$$\begin{pmatrix}A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k\end{pmatrix}\longmapsto(e^{2\pi i t_1},\cdots,e^{2\pi i t_k})$$

为 T 与 $S^1\times\cdots\times S^1=T_0^k$ 的等同关系. 因此

$$\omega_j:\begin{pmatrix}A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k\end{pmatrix}\longmapsto e^{2\pi i t_j}\quad(\text{对一切 } j)$$

是 T 的一个权. 现在 $\mathbb{R}^n$ 可以分解为二维不可约 T-模 $V_1,\cdots,V_m$(若 $n=2m+1$，还要加一个平凡的 V_0). 若 (a,b) 是 T_j 的一个就范正交基，我们已知 $(V_j)_c$ 可分裂两个不可约 T-模，其基为 $d^+=\frac{1}{\sqrt{2}}(a+ib)$ 与 $d^-=\frac{1}{\sqrt{2}}(a-ib)$，其计算如下：

$$A_ja=\cos(2\pi t_j)\cdot a-\sin(2\pi t_j)\cdot b,$$
$$A_jb=\sin(2\pi t_j)\cdot a+\cos(2\pi t_j)\cdot b,$$
$$A_jd^+=(\cos(2\pi t_j)+i\sin(2\pi t_j))d^+=e^{2\pi i t_j}d^+,$$
$$A_jd^-=e^{-2\pi i t_j}d^-.$$

故在 d^+ 上 A_j 之作用如权 ω_j，而在 d^- 上如 $-\omega_j$. 由 Borel-Hirzebruch 格式，有

$$\rho^*c(\alpha(\xi))=\prod_j(1+\omega_j)(1-\omega_j)=\prod_j(1-\omega_j^2).$$

考虑到 Pontrjagin 类定义中的符号，我们有

定理(Borel-Hirzebruch)　令 $\alpha:G\longrightarrow O(n)$ 为紧 Lie 群 G 的实表示，$T\subset G$ 为一极大环面，$(\pm\omega_j,j=1,2,\cdots,k,2k\leqslant n)$ 为其权. 若

$\pi: E \longrightarrow B$ 为一主 G-丛，$\rho: E/T \longrightarrow B$ 是相关的 G/T-丛，则 π 的 Pontrjagin 类适合

$$\rho^*(p(\pi)) = \prod_j (1 + \omega_j^2).$$

§2. 齐性空间上的计算

作为 Borel-Hirzebruch 格式的第一个应用，我们来研究齐性空间 G/H 的切丛。记住(第十四章)$T(G/H)$是主 H-丛 $G \longrightarrow G/H$ 的 α 扩张，而迷向表示为 $\alpha: H \longrightarrow L(G)/L(H)$。回想一下 α 的定义。G 在 $L(G)$上有伴随表示，且可限制在 H 上。作为 H-模，$L(H) \subset L(G)$自然是子模，故有商模 $L(G)/L(H)$即为 α。用实际的话来说，给 $L(G)$一个 G 不变内积(使伴随表示为正交的)，再以 $L(G)/L(H)$为 $L(H)$在 $L(G)$中的正交补$L(H)^{\perp}$。用权来表述，取 H 之极大环面 $T_H \subset H$。$L(G)$可分解为 T_H 之权空间，取其一部分即可合成 $L(H)$。故 α 可用 $L(G)$之这样一些权来表示，它们并非 $L(H)$之权。详细看一个例即知是怎样做的了。取复射影空间 CP^{n-1}，我们已在第十三章中作过了有关计算。但那是以 $T(CP^{n-1})$的几何分析为基础的。记住 CP^{n-1}是一复流形，故 $T(CP^{n-1})$是一 $2n-1$ 维复丛。令 $\bar{\gamma}$ 为典则线丛 γ 在 CP^{n-1}上的对偶。于是有关系式

$$T(CP^{n-1}) \oplus \varepsilon = \oplus(\bar{\gamma}), \quad (n \text{ 项 Whitney 和})$$

故若以 Euler 类 $t \in H^2(CP^{n-1})$之生成元，我们有

$$c(T(CP^{n-1})) = (1-t)^n, \quad p(T(CP^{n-1})) = (1+t^2)^n.$$

复习一下 $CP^{n-1} = U(n)/(U(1) \times U(n-1))$，$U(1) \times U(n-1) = H \subset G = U(n)$是以下形状的矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad \lambda \in S^1, A \in U(n-1).$$

这时，极大环面 T_H 和 $T_G = T$ 是一样的，即对角阵。所以我们先计算 G 的伴随表示的权(记住，这时称为根)。和平常一样，令 $\chi_j: T \longrightarrow$

S^1 为第 j 个投影的标准的权：

$$\chi_j: \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \longmapsto \lambda_j.$$

注意 $L(U(n))=\{A\in E(n,\mathbb{C}) \mid A+A^*=0\}$是复 Hermite 斜对称矩阵(对$(\exp(tA))(\exp(tA^*))=I$ 求导). 它是实空间,维数为

$$2(1+2+\cdots+n-1)+n=n(n-1)+n=n^2$$

(对角线上方的 A_{ij}是任意的,对角线上的 A_{jj}必须是纯虚的). $L(T)$是 $L(U(n))$中的对角阵之集：

$$\begin{pmatrix} 2\pi i t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 2\pi i t_n \end{pmatrix}, \quad t_j \text{ 为实}.$$

所以 $L(U(n))-L(T)$必可分解为 $n(n-1)/2$ 重实 2 维根空间. 对每一对 $1\leqslant i<j\leqslant n$,令 A_{ij}为 $L(U(n))$中除(i,j)和(j,i)元外均为 0 的矩阵. 若 X 是对角阵 $X=\begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix}$,我们有

$$(XAX^{-1})_{st} = \sum_{p,q} x_{sp}A_{pq}x_{qt}^{-1} = x_s x_t^{-1} A_{st}.$$

所以除非$(s,t)=(i,j)$或(j,i),$(XAX^{-1})_{st}=0$. 我们有

$$(XAX^{-1})_{ij}=x_i x_j^{-1}A_{ij},$$

$$(XAX^{-1})_{ji}=x_j x_i^{-1}A_{ji}=-\overline{(x_i x_j^{-1}A_{ij})},$$

这是因为 $X_i\in S^1$,$\overline{A}_{ij}=-A_{ji}$. 但这就表示 A_{ij}是相应于根 x_i-x_j 的根矢量. 因为 A_{ij}构成二维空间,且有$\binom{n}{2}=n(n-1)/2$ 个,$\{(x_i-x_j) \mid 1\leqslant i<j\leqslant n\}$即 $U(n)$一切根之集.

由上述易见,子群 $H=U(1)\times U(n-1)$之根是$\{(x_i-x_j) \mid 2\leqslant i<j\leqslant n\}$. 所以 H 在 $L(G)/L(H)$上的迷向表示的权由(x_1-x_j),$2\leqslant j\leqslant n$ 给出.

迄今我们讨论的是 H 在 $L(G)/L(H)$ 上的实表示. 说 $\mathbf{CP}^{n-1}$ 有复构造表示 $L(G)/L(H)$ 可变成一复 H-模. 有两种方法做这件事. 对 $c\in\mathbf{Z}$ 和 A_{ij} 如上, 可定义

$$(cA_{ij})_{ij}=cA_{ij},\quad (cA_{ij})_{ji}=\bar{c}A_{ji}.$$

这使 $L(G)/L(H)$ 成为权为 $x_1-x_j,\ j=2,\cdots,n$ 的复 H-模. 但也可取其共轭. 这将是以 $x_j-x_1,\ j=2,\cdots,n$ 为权的 H-模. 要问何者相应于 $\mathbf{CP}^{n-1}$ 的复构造, 可以看元素 $x=(e^{2\pi i x_1},\cdots,e^{2\pi i x_n})$ 如何作用在点 $P=[1,z_2,\cdots,z_n]$ 上:

$$\begin{aligned} xP &= [e^{2\pi i x_1},e^{2\pi i x_2}z_2,\cdots,e^{2\pi i x_n}z_n] \\ &= [1,e^{2\pi i(x_2-x_1)}z_2,\cdots,e^{2\pi i(x_n-x_1)}z_n], \end{aligned}$$

故复 H-模 $L(G)/L(H)$ 之权为 $x_j-x_1,\ j=2,\cdots,n$.

为了应用 B-H 格式, 记住我们需要 $G\longrightarrow G/H$ 到万有 G-丛 $EG\longrightarrow BG$ 的分类映射 $\tilde{\varphi}$. 然后由图式

$$\begin{array}{ccccccc} G & & & \longrightarrow & EG & & \\ & \searrow & & & & \searrow & \\ \downarrow & & G/T & \xrightarrow{\ \varphi\ } & \downarrow & \rightarrow & BT \\ & \swarrow \rho & & & & \swarrow \rho_n & \\ G/H & & & \xrightarrow{\ \tilde{\varphi}\ } & BG & & \end{array}$$

可得

$$\rho^*(c(G/H))=\varphi^*\prod_{j=2}^{n}(1+x_j-x_1).$$

但 $\tilde{\varphi}$ 易求. 若 $G\longrightarrow EG$ 只是纤维的包含, 则有

$$\begin{array}{ccccccc} G & & & \longrightarrow & EG & & \\ & \searrow & & & & \searrow & \\ \downarrow & & G/H & \longrightarrow & \downarrow & \rightarrow & BH \\ & \swarrow & \circlearrowright & \tilde{\varphi}\searrow & & \circlearrowleft\ \swarrow & \\ \cdot & & & \longrightarrow & BG & & \end{array}$$

图中两个弯箭头的任一个都可取作 $\tilde{\varphi}$. 特别, 因为 $\tilde{\varphi}$ 可以过一点分解为因子, $\tilde{\varphi}^*$ 是简单的. 由陈类的定义有

$$\rho_0^*(\sum_{j=1}^{n} z^{n-j}c_j) = \prod_{j=1}^{n}(z+x_j).$$

z 是未定元，放入上式只是为了方便. 令 $z=1-x_1$，我们有

$$\begin{aligned}
\varphi^*\prod_{j=2}^{n}(1+x_j-x_1) &= \varphi^*\prod_{j=1}^{n}(1-x_1+x_j) \\
&= \varphi^*\rho_0^*\sum_{j=1}^{n}(1-x_1)^{n-j}c_j \\
&= \rho^*\sum_{j=1}^{n}(1-x_1)^{n-j}\widetilde{\varphi}^*(c_j) \\
&= \rho^*(1-\varphi^*(x_1))^n,
\end{aligned}$$

这里用到当 $j>0$ 时 $\widetilde{\varphi}^*(c_j)=0$. 故有

$$\rho^*(c(G/H))=\rho^*(1-\varphi^*(x_1))^n.$$

按我们的约定所选的生成元 $t\in H^2(\mathrm{CP}^{n-1})=H^2(G/H)$ 显然适合

$$\rho^*(t)=\varphi^*(x_1).$$

此时又知 ρ^* 为单射(甚至在整系数上同调时)，故

$$c(\mathrm{CP}^{n-1})=(1-t)^{n+1},$$

和以前一样.

当然可以说，此法并不比以前用的几何方法简单. 但要点在于那个方法是特意作出来的，多少有点运气. 与此相比，现在的方法是有系统的. 例如举一个更一般的例，即 Grassmann 流形 $U(m+n)/(U(m)\times U(n))$. 用 $x_1,\cdots,x_m$ 记对角阵子群 $T_0\subset U(m+n)$ 的前 m 个坐标. 用 $y_1,\cdots,y_n$ 记后 n 个坐标. $U(m)$ 的根是 $\{x_i-x_j\mid 1\leqslant i<j\leqslant m\}$，$U(n)$ 的根则是 $\{y_i-y_j\mid 1\leqslant i<j\leqslant n\}$，$U(m+n)$ 的根则是 $\{x_i-x_j;1\leqslant i<j\leqslant m;y_i-y_j;1\leqslant i<j\leqslant n;x_i-y_j;1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n\}$. 所以 $U(m+n)/(U(m)\times U(n))$ 的迷向表示的权是 $\{x_i-y_j\mid 1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n\}$. 和前面一样，其整个陈类由下式给出

$$\rho^*(G/H)=\varphi^*\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(1+x_i-y_j).$$

为了适当解释此式，需要对 Grassmann 流形的上同调 $H^*(U(m+n)/(U(m)\times U(n)))$ 有所了解. 记住，我们有 Stiefel 流形 $U(m+n)/$

$U(n)$及$U(m)$-主丛

$$V=U(m+n)/U(n)\longrightarrow U(m+n)/(U(m)\times U(n))=M.$$

故在 $H^*(M)$中有陈类 $\sigma_1,\cdots,\sigma_m$. 若能证明上述 $U(m)$-丛是 $2n$ 万有的，即当 $i\leqslant 2n$ 时 $\pi_i(V)=0$，则在 $m\leqslant n$（这里 m 与 n 就不对称了）时，$\sigma_1,\cdots,\sigma_m$ 直到 $2n$ 次为代数独立的. 事实上，在图式

$$\begin{array}{ccccccc}
G=U(m+n) & & \longrightarrow & & EG & & \\
\downarrow & \searrow & & & & & \\
 & & G/T_0 & \xrightarrow{\varphi} & \downarrow & \searrow & \\
 & \swarrow \rho & & & & & BT_0 \\
G/H & & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & & BG & \swarrow \rho_0 &
\end{array}$$

中，我们有

$$\rho^*\left(\sum_{i=1}^{m} z^{m-i}\sigma_i\right)=\varphi^*\prod_{i=1}^{m}(z+x_i).$$

这里和前面一样，$\tilde{\varphi}$可在一点分解因式，故在 $H^*(G/T_0)$中有

$$\varphi^*\prod_{i=1}^{m}(1+x_i)\prod_{j=1}^{n}(1+y_j)=1.$$

略去 φ^*（即以 $\varphi^*(x_i)$ 代替 x_i）和 ρ^*（因为它是单射），即在 $H^*(G/H)$中有

$$\sum_{i=1}^{m} z^{m-i}\sigma_i=\prod_{i=1}^{m}(z+x_i),$$

以及

$$\prod_{i=1}^{m}(1+x_i)\prod_{j=1}^{n}(1+y_j)=1,$$

z 是一未定元（事实上可以证明 $H^*(G/H)$是 x_i 与 y_j 的满足上述关系式的对称多项式环），但我们不来讨论这件事. 这样，公式

$$c(G/H)=\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(1+x_i-y_j)$$

可以用 $\sigma_1,\cdots,\sigma_m$ 来表示. 例如，由于 $\sum_{i=1}^{m}x_i+\sum_{j=1}^{n}y_j=0$，有

$$c_1(G/H)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i-y_j)=\sum_{i=1}^{m}\left(nx_i-\sum_{j=1}^{n}y_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}(nx_i + \sigma_1) = n\sigma_1 + m\sigma_1 = (n+m)\sigma_1.$$

我们再以四元数射影空间 QP^n 为例，Q 为四元数代数. 在 n 维四元数空间(即一 $2n$ 维复矢量空间或 $4n$ 维实矢量空间)中，有四元数的 Hermite 内积，即对 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,\cdots,y_n)$定义

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i \in Q,$$

这里若四元数 $a=\lambda_0+\lambda_1 i+\lambda_2 j+\lambda_3 k$，我们规定 $\bar{a}=\lambda_0-\lambda_1 i-\lambda_2 j-\lambda_3 k$. n 维辛群 Sp(n)即保持(　,　)的 Q-线性映射之群，例如Sp(1)即单位长四元数之群：Sp(1)$=S^3$. 和实及复的情况一样，定义 QP^n 为单位球面 $S^{4n+3}\subset Q^{n+1}$对于 Sp(1)之元作右乘的商空间(在实或复情况下，左、右乘都可以，但因四元数乘法是非交换的，现在必须小心点). 用齐性空间的记号，有

$$QP^n = \mathrm{Sp}(n+1)/(\mathrm{Sp}(1)\times \mathrm{Sp}(n)).$$

和 CP^n 情况一样，S^3-丛 $S^{4n+3}\longrightarrow QP^n$ 的 Gysin 序列给出

$$H^*(QP^n) = Z[t]/(t^{n+1}),$$

$t\in H^4(QP^n)$可取为与 $S^{4n+3}\longrightarrow QP^n$ 相关的 C^2-丛之 Euler 类($S^3=$ Sp(1)自然地作用在 $C^2=Q$ 上).

现计算 Sp(n)之根. 作为其极大环面，可取对角阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

所成的子群 D. λ_i 为复数(故 rank(Sp(n))$=n$). 和前面一样，Lie 代数 L(Sp(n))由斜对称四元数矩阵构成. 它是一实矢量空间，其维数为

$$3n+4\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)=3n+2n(n-1)=n(2n+1).$$

故 dimSp(n)$-$dim$D=2n^2$. 在 L(Sp(n))中，有

(1)　对 $i<j$，矩阵

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} & z \\ -\bar{z} & \end{pmatrix}.$$

z 位于(i,j)处．和前面一样，我们有

$$DA_{ij}D^{-1} = (\lambda_i - \lambda_j)A_{ij}.$$

故根为$\pm(x_i - x_j)$，$1 \leqslant i < j \leqslant n$.

(2) 对 $i \leqslant j$，矩阵

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} & z\vec{j} \\ z\vec{j} & \end{pmatrix},$$

$z \in \mathbb{C}$ 位于(i,j)处．(矩阵中的 $\vec{j}$ 是四元数单位，故$\overline{z\vec{j}} = \overline{\vec{j}}\bar{z} = -\vec{j}\bar{z} = -z\vec{j}$!)我们有

$$(DB_{ij}D^{-1})_{ij} = \lambda_i z\vec{j}\,\bar{\lambda}_j = \lambda_i z\lambda_j\vec{j} = \lambda_i\lambda_j z\vec{j}.$$

即根为$\pm(x_i + x_j)$．总之，$i < j$ 时根为$\pm(x_i - x_j)$，$\pm(x_i + x_j)$，以及$\pm 2x_i$.

故 $\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n-1)$的根是$\pm 2x_i$，$1 \leqslant i \leqslant n$，$\pm(x_i \pm x_j)$，$2 \leqslant i < j \leqslant n$. 而相补的根是$\pm(x_1 \pm x_j)$，$j = 2, \cdots, n$.

$\mathbb{Q}P^{n-1}$的 Pontrjagin 类于是由下式给出：

$$p(\mathbb{Q}P^{n-1}) = \prod_{j=2}^{n}(1 + (x_1 + x_j)^2)(1 + (x_1 - x_j)^2).$$

我们还知道，在 $\mathbb{Q}P^{n-1}$中 $t = x_1^2$，故对未定元 z 有

$$\prod_{i=1}^{n}(z + x_i) = z^n.$$

将 z 换成$-z$，并将所得式与上式相乘，有

$$\prod_{i=1}^{n}(z + x_i)(z - x_i) = z^{2n}.$$

令 $z = y + x_1$ 又有

$$y(y + 2x_1)\prod_{j=2}^{n}(y + x_1 + x_j)(y + x_1 - x_j) = (y + x_1)^{2n}.$$

令 $y = \pm i$ 并将所得二式相乘，有

$$(1 + 4x_1^2)\prod_{j=2}^{n}(1 + (x_1 + x_j)^2)(1 + (x_1 - x_j)^2) = (1 + x_1^2)^{2n},$$

亦即

$$p(\mathbf{QP}^{n-1}) = (1+t)^{2n}/(1+4t).$$

此式应理解为$(1+4t)^{-1}=1-4t+16t^2-\cdots$而当$k\geqslant n$时$t^k=0$. 例如有

$$p_1(\mathbf{QP}^{n-1}) = (2n-4)t,$$

$$p_2(\mathbf{QP}^{n-1}) = (2n^2-9n+16)t^2,$$

等等. 这些相当复杂的公式用几何方法不易理解. 作为一个有趣的应用,考虑$\mathbf{CP}^{n-1}$上的共轭映射

$$\varphi:[z_1,\cdots,z_n]\longrightarrow[\bar{z}_1,\cdots,\bar{z}_n].$$

易见$\varphi^*(t)=-t, t\in H^2(\mathbf{CP}^{n-1})$. 故$\varphi$保持定向 iff $n-1$为偶. 所以在$\mathbf{CP}^{n-1}$上有保持定向的微分同胚使得$\varphi^*(t)=-t$. 但因任意微分同胚均保持p_1而不论是否保持定向,在$\mathbf{QP}^{n-1}$上不会有类似的微分同胚φ存在. 因为$\varphi^*(t)$必须为t,而t^{n-1}使$\mathbf{QP}^{n-1}$定向,$\mathbf{QP}^{n-1}$上任一微分同胚均保持定向.

§3. $H^*(BO(n);Q)$和$H^*(BSO(n);Q)$的计算

我们在第十三章中介绍了示性类,其中理论最完备者是陈类,其完备是因为$H^*(BU(n);Z)$是万有陈类$c_1,\cdots,c_n$之多项式环. 在非常明显的意义下,它们都是群$U(n)$的示性类. 对实正交群$O(n)$,理论就不那么好. 我们通过复化定义了其 Pontrjagin 类$p_i\in H^*(BO(n))$,但有一问题仍未解决,即它们是否$O(n)$的全部示性类. 问题在于$H^*(BO(n);Z)$中有挠元素(即 Abel 群中阶数有限的元)而构造更复杂. 它们的出现使得描述$H^*(BO(n);Z)$更困难. 于是我们用其它系数域R来更漂亮地描述它. 现在解释一下. 因恒设R中有恒等元,故有同态$Z\longrightarrow R$变$1\in Z$为$1\in R$. 这就给出一同态$H^*(BO(n);Z)\longrightarrow H^*(BO(n);R)$. 设$u\in H^*(BO(n);Z)$为挠元素而$R$是特征为0的域,例如有理数域、实数域或复数域,我们说

u 之象 $\bar{u}\in H^*(BO(n);R)$ 为 0. 因为若 $u=[\varphi]$是用值在 Z 中的上链 φ 来表示的，$ku=0$ 表示 $ku=\delta\psi$ 为上边缘. 但既然值在 R 中，则 $\varphi=\delta(\frac{1}{k}\psi)$ 也是上边缘，故在$H^*(BO(n);R)$中 $\bar{u}=0$. 所以，应用特征为 0 的系数域即可去掉挠元素. 例如 $H^*(BO(n);Q)$即 $H^*(BO(n);Z)$ 的自由部分的描述. 我们还可挑选 R 为特征 t，t 与 k 互素. 这时存在正整数 n 与 m 使 $nk+mt=1$. 我们有 $\varphi=nk\varphi+mt\varphi$，但在 R 中 $t\varphi=0$. 所以

$$\varphi = nk\varphi = n\delta\psi$$

仍是 R 中的上边缘. 所以在 $H^*(BO(n);R)$中仍有 $\bar{u}=0$，但阶数与 t 不互素的挠元素以及自由元仍得保存. 可以得知 $H^*(BO(n);Z)$中所有的挠元素阶数均为 2，所以我们需要用的系数域只有 $R=Z_2$ 和 $R=Q$. 当 $R=Z_2$ 时，我们已知 $H^*(BO(n);Z_2)$是万有 Stiefel-Whitney 类 $w_1,w_2,\cdots,w_n$ 的多项式环. 因此仅须讨论另外的域 $R=Q$. 我们要证明 $H^*(BO(n);Q)$是万有 Pontrjagin 类 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 的多项式环，这里 $m=\left[\frac{n}{2}\right]$.

记住极大环面 $T\subset O(n)$由以下形状的 2×2 分块方阵构成：

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & A_m & \\ & & & \Delta \end{pmatrix},$$

当 $n=2m+1$ 时 $\Delta=1$，当 $n=2m$ 时就没有这一项，每个 A_j 则是一个旋转：

$$A_j = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t_j) & -\sin(2\pi t_j) \\ \sin(2\pi t_j) & \cos(2\pi t_j) \end{pmatrix}.$$

这样，令 $A\longmapsto(e^{2\pi i t_1},\cdots,e^{2\pi i t_m})$可将 $S^1\times\cdots\times S^1$ (m 重)与 T 等同. 为计算 Pontrjagin 类，需将丛复化，即将 $O(n)$扩张为 $U(n)$. 容易描述这个表示的权. $\mathbb{R}^n$ 可分解为 m 个二维子空间 U_j 而 A_j 作用在其上，其权为 t_j. 若 $\mathbb{R}^n$ 复化为 $\mathbb{C}^n$，U_j 可分解为两个一维子空间 U_j^+ 和 U_j^-，

T 在其上之作用如 $t_j, -t_j$. 取定坐标后，权将如前一样记作 $\pm x_j$. 所以完全的陈类是 $\prod_j(1-x_j^2)$，记住 $p_j=(-1)^j c_{2j}$，故 $p=\prod_{j=1}^{m}(1+x_j^2)$. 这只是以下事实的一个简记法：

$$\rho^* : H^*(BO(n);Q) \longrightarrow H^*(BT;Q), \quad \sum_{i=1}^{n} p_i \longmapsto \prod_{j=1}^{m}(1+x_j^2).$$

令 $S \subset H^*(BT;Q)$ 是 $x_1^2,\cdots,x_m^2$ 的对称多项式所成的子代数. 我们有 $\operatorname{Im}\rho^* \supset S$. 另一方面，我们由 Borel 定理知道 $\operatorname{Im}\rho^* = H^*(BT;Q)$ 之由 Weyl 群确定的子代数，所以我们只需计算 $W(O(n))$. 首先，和 $U(n)$ 的情况一样，可以交换 x_i 和 x_j. 令 $U_i=\langle e_i, d_i\rangle, U_j=\langle e_j, d_j\rangle$. 令 $g \in O(n)$ 互换 e_i 和 e_j，d_i 和 d_j 而将其余矢量保留不动（注意此 $g \in SO(n)$），我们有

$$\begin{aligned}(gAg^{-1})(e_i) &= gAe_j = g[(\cos(2\pi t_j))e_j + (\sin(2\pi t_j))d_j] \\ &= (\cos(2\pi t_j))e_i + (\sin(2\pi t_j))d_i,\end{aligned}$$

即 A 通过权 x_j 作用在 U_i 上，即互换了 x_i 与 x_j.

但因我们现在 $O(n)$ 中，所以还可以多作些事. 若令 $g(e_i)=-e_i$ 而固定其余，则有

$$\begin{aligned}(gAg^{-1})(e_i) &= -gAe_i = g[-(\cos(2\pi t_i))e_i - (\sin(2\pi t_i))d_i] \\ &= (\cos(2\pi t_i))e_i - (\sin(2\pi t_i))d_i.\end{aligned}$$

即 x_i 换成了 $-x_i$. 所以 W 至少包含了所有置换和变号. 很清楚有

$$\operatorname{Im}\rho^* = H^*(BT;Q)^W \subset S.$$

因为在有理数域上我们也知道 ρ^* 为单射，$H^*(BO(n);Q)$ 可与 S 等同. S 是 $x_1^2,\cdots,x_m^2$ 的初等对称多项式（即万有 Pontrjagin 类）生成的多项式环.

稍作修正，可对特殊正交群 $SO(n)$ 作类似计算. 首先，因为 $SO(n)\subset O(n)$ 是恒等元分支. 前面讲的极大环面 T 也在 $SO(n)$ 中且显然也是其极大环面. 因为 $SO(n)$-丛也是 $O(n)$-丛，我们知 Pontrjagin 类 $p_1,\cdots,p_m \in H^*(BSO(n);Z)$ 且也有关系式

$$\rho^*(\sum_{i=1}^{m} p_i) = \prod_{i=1}^{m}(1+x_i^2),$$

$\rho: T\subset SO(n)$是包含映射. 故 $H^*(BT;Z)$中的象 $\rho^*(H^*(BSO(n);Z))$仍包含由 $x_1^2,\cdots,x_m^2$ 生成的对称多项式之子代数 S. 记住我们然后即可通过估计 Weyl 群 $W(O(n))$之大小而知 $\mathrm{Im}\rho^*\subset S$. 现在需计算 $SO(n)$的 Weyl 群 $W(SO(n))$. 情况在这里起了变化. 因为 $W(SO(n))$只能有 $I_g, g\in SO(n)$. 前已提到,互换权 x_i 和 x_j 的 I_g 可以用 $-g\in SO(n)$作出. 所以 $W(SO(n))$仍包含一切置换. 但在 $O(n)$中可以用反射 $g: e_i\longmapsto -e_i$ 来实现变号 $x_i\longmapsto -x_i$, 此 g 不在 $SO(n)$中. 现在要区分 n 为奇或偶两种情况:

(1) 若 $n=2m+1$ 为奇,除二维简单模 $U_i=\langle e_i,d_i\rangle (i=1,\cdots,m)$外,还有另一个平凡的一维模 F. 令 $f\in F$ 为其基. 可考虑 $g: e_i\longmapsto -e_i, f\longmapsto -f$, 它使 x_i 变为 $-x_i$ 且仍在 $SO(n)$中. 故对 $O(n)$中作的一切置换均可移过来,而结果相同. $H^*(BSO(2m+1),Q)=Q[p_1,p_2,\cdots,p_m]$是万有 Pontrjagin 类 $p_1,\cdots,p_m$ 生成的多项式环.

(2) 若 $n=2m$ 为偶,因为没有 F,情况不好了. 现在唯一可作的是每次换两个 $e_i\longmapsto -e_i$, 即 $W(SO(n))$只能同时换偶数个 x_i 的符号. 当然 $x_1^2,\cdots,x_m^2$ 的对称多项式仍在 $W(SO(n))$下不变. 但还有更多的. 易见初等对称多项式$\sum x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}$中,在 $W(SO(n))$下不变的只有最后一个 $\sigma_m=x_1\cdots x_m$. 因为 $x_1^2\cdots x_m^2=\sigma_m^2$, 故

$H^*(BT;Q)^W\subset x_1^2,\cdots,x_{m-1}^2$和 $x_1x_2\cdots x_m$ 生成的对称多项式.

我们知道 $x_1^2,\cdots,x_{m-1}^2$的对称多项式是 $H^*(SO(2m))$中的万有 Pontrjagin 类 $p_1,\cdots,p_{m-1}$. $x_1\cdots x_m=\sigma_m$ 又如何? 答案很简单. $SO(2m)$-丛即可定向实丛. 故有 Euler 类 $\chi\in H^{2m}(BSO(2m);Q)$. 若将丛限制到 $T\subset SO(2m)$上,它将分裂为 m 个二维丛而各用 U_i 表示. 这个平面丛的 Euler 类是$\pm x_i\in H^2(BT)$($\pm$视 U_i 之定向而定). 因 Euler 类是乘法的,由自然性可得

$$\rho^*(\chi)=\prod_{i=1}^m x_i.$$

故有以下结果:对 $n=2m$ 为偶, $H^*(BSO(2m);Q)=Q[p_1,\cdots,p_{m-1},\chi]$是由 $m-1$ 个万有 Pontrjagin 类 $p_1,\cdots,p_{m-1}$和 Euler 类 χ 生成的

多项式环.

这就带来一个问题：$SO(2m+1)$-丛也有 Euler 类，为什么它在 $H^*(BSO(2m+1);Q)$中不出现？解释是：整类$\chi\in H^*(BSO(2m+1);Z)$是挠元素，所以在由 Z 转到 Q 时被抹掉了. 如果确是这样，应该有一直接的几何论证表明 $2\chi=0$. 请读者试做一下.

万有 Pontrjagin 类和 Euler 类都是整类. 我们知道它们在 Q 中是 $H^*(SO(n);Q)$的代数生成元. 这通常并不意味着它们是 $H^*(BO(n);Z)$的生成元，即令除去一切挠元素. 这就是熟知的可除性问题. 例如 $2\in Z$ 是矢量空间 Q 的基，但并非 Z 作为 Abel 群的生成元，因为 $1=\frac{1}{2}\cdot 2$ 在 Z 中无意义. 然而，在现在的情况下整系数映射 $H^*(BSO(n);Z)\longrightarrow H^*(BT;Z)$的以下关系式仍成立：

$$\rho^*(\sum_i p_i)=\prod_i(1+x_i^2),\quad \rho^*(\chi)=\prod_i x_i.$$

虽然我们不知 ρ^* 在 Z 上是否单射，这两式确实意味着 p_i 和 χ 在 $H^*(BSO(n);Z)$上不可除. 若不然，两式意味着初等对称多项式在 $H^*(BT;Z)$中可除，而我们知道并不如此. 这样我们事实上证明了 $H^*(BSO(n);Z)$的无挠部分是 p_i 和 χ 生成的多项式代数. 这虽然仍不是 $H^*(BSO(n);Z)$的完全描述，它确实给出了 p_i 和 χ 是 $H^*(BSO(n);Z)$的"全部"示性类的论证，这就是我们想做的.

还有最后一个问题. 因 $H^*(BO(n);Z_2)$是 Stiefel-Whitney 类 $w_1,\cdots,w_n$ 生成的多项式环，$H^*(BO(n);Z)$ mod 2 的任一整类，即 $H^*(BO(n);Z)\longrightarrow H^*(BO(n);Z_2)$的象，必可用 $w_1,\cdots,w_n$ 表示. 对 Pontrjagin 类又如何？回到定义也容易计算. 先记任一整类 u 的 mod 2 化约为 $\bar{u}$.

记住对于 Stiefel-Whitney 类，我们考虑由以下对角矩阵所成的极大 Z_2 环面 $T_2\subset O(n)$：

$$E=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n\end{pmatrix},\qquad \varepsilon_i=\pm 1,$$

而对 Pontrjagin 类则作嵌入 $O(n)\subset U(n)$ 并考虑对角矩阵

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},\qquad \lambda_i\in S^1$$

所成的实极大环面 $T\subset U(n)$. 这样就有 $T_2\subset T$,它由明显的嵌入 $j: Z_2\longrightarrow S^1$ 实现. 我们显然需计算

$$j^*: H^*(BS^1;Z_2)\longrightarrow H^*(BZ_2;Z_2).$$

回忆起

$$H^*(BS^1;Z_2)=Z_2[\bar{t}],\quad t\in H^2(BS^1;Z),$$
$$H^*(BZ_2;Z_2)=Z_2[c],\quad c\in H^1(BZ_2;Z_2),$$

我们指出

$$j^*(\bar{t})=c^2.$$

为证明它,取球面 S^{2n+1}. 我们有图式

$$\begin{array}{ccc} S^{2n+1} & & \\ & \searrow^{\rho} & \\ \pi\downarrow & & RP^{n+1}=BZ_2. \\ & \swarrow_{j} & \\ CP^n=BS^1 & & \end{array}$$

我们知道 π 是主 S^1-丛,其拉回 $j^*(\pi)$ 有一 Z_2 化约即主 Z_2-丛 ρ. 用矢量丛来说,即 BS^1 上的典则复线丛 π 在拉回到 BZ_2 后分裂为两个典则实线丛 ρ.

$$j^*(w(\pi))=(1+c)(1+c),$$

$w(\pi)$是作为实平面丛的 π 之全 Stiefel-Whitney 类. 由于 $H^*(BS^1;Z_2)$, $w(\pi)$应可表为

$$w(\pi)=1+a\bar{t},\qquad a\in Z_2.$$

但上式证明了 $a=1$,从而 $j^*(\bar{t})=c^2$.

由定义,全陈类由下式给出

$$\sum_{i=0}^{n}c_i=\prod_{i=1}^{n}(1+t_i).$$

作 mod 2 化约后给出

$$\sum_{i=0}^{n}\bar{c}_i=\prod_{i=1}^{n}(1+c_i^2).$$

记住我们是在 Z_2 中，上式可写为

$$\sum_{i=0}^{n}\bar{c}_i=\prod_{i=1}^{n}(1+c_i)^2=[\prod_{i=1}^{n}(1+c_i)]^2.$$

因为式右定义了全 Stiefel-Whitney 类，我们有

$$\bar{c}_i=w_i^2. \qquad (*)$$

最后，因 $p_i=(-1)^i c_{2i}$ 而 $(-1)^i$ 在 mod 2 后消失，故有

$$\bar{p}_i=w_{2i}^2.$$

这样 mod 2 Pontrjagin 类和 Stiefel-Whitney 类的关系很简单.

还有最后一点说明. (*)式也说明 $w_i^2\in H^*(BO(n);Z_2)$ 即当 i 为奇时也是一个整类的 mod 2 化约. 准确些说，令 c_i 在由包含映射诱导出的自然映射

$$H^*(BU(n);Z)\longrightarrow H^*(BO(n);Z)$$

下的象是 $\bar{c}_i$. 我们有

$$\bar{c}_i=w_i^2, \quad \text{mod } 2.$$

但当 i 为奇时，$\bar{c}_i$ 是一挠元素(见第十三章，§4). 这就是为什么它们与 Pontrjagin 类 $p_i=(-1)^i\bar{c}_{2i}$ 不尽相同. 然而，由(*)式，可定义 i 为奇时的 $\bar{c}_i$ 为(1/2)-Pontrjagin 类

$$p_{i+1/2}=\bar{c}_{2i+1}.$$

故有

$$\bar{p}_{i+1/2}=w_{2i+1}^2.$$

确实可以证明，类 w_{2i+1} 本身也是一个整类. 例如把 w_{2i+1} 看成一个障碍类即可证明它，Whitney 原来就是这样做的，也可以多用一些 Steenrod 运算的工具. 但现在我们就不再讲了.

§4. Pontrjagin 数和配边不变性

我们已经作了相当多的计算，所以不妨再回来看看理论本身.

这些计算虽然很有效,却仍然留下了基本的问题:示性类理论好在哪里?这本讲义一开始就提出了一个问题:判断何时两个流形为微分同胚.这类问题当然在任意范畴中都可以提.但若没有某些方法来处理它,它就只是一个学院式的问题.有些情况下这个问题得到了回答,例如紧半单 Lie 群.但更常见的是,它的回答还遥遥无期.五十年代末以来数学的一个重大发展是:光滑流形的微分同胚的研究取得了实质的进展,示性类理论在其中起了关键作用.现回到最简单的考虑.有许多方法来区别空间.S^2 和 $\mathbf{R}^2$ 不同,前者为紧后者则否.S^2 与 $S^1\times S^1$ 也不同,因其同调不同.$\mathbf{CP}^3$ 与 $S^2\times S^4$ 虽有相同同调,上同调环的构造却不同,等等.但若能用同调来区分流形,则它们不仅不微分同胚,甚至也不能同胚.换言之,想要区分细微的特性,同调不变量还不够精密.在我们的情况下,例如两流形的同胚或有相同伦型但不微分同胚就是这种细微之处.因为示性类是流形切丛的不变量,它显然依赖于流形的光滑构造,说不定有希望它足够精密能分清这种差别.例如我们已经算出了

$$p(\mathbf{CP}^n) = (1 + t^2)^{n+1},$$

所以第一 Pontrjagin 类是

$$p_1(\mathbf{CP}^n) = (n + 1)t^2.$$

若 $f: M \longrightarrow \mathbf{CP}^n$ 是微分同胚,必有

$$p_1(M) = (n + 1)t_1^2,$$

其中 $t_1=f^*(t)\in H^2(M;Z)$ 是生成元.故若可作出同胚于 $\mathbf{CP}^n$ 的 M 但 $p_1(M)=kt_1^2$, $k\neq\pm(n+1)$, M 就不会微分同胚于 $\mathbf{CP}^n$.项武忠就是这样首先作出了这种例子.

但一般情况远非如此简单直接.这方面一个最惊人而值得注意的早期结果大概是吴文俊的,它表明流形 M 的 Stiefel-Whitney 类 $w(M)$ 只依赖于 M 的伦型.所以用它们来区分流形就十分不够了.因为我们已经知道由示性类作出的种种不变量精密程度各有不同.我们当然就理解了类似这般的情况难得说是好或不好.精密性和可计算性总是互有得失的.真本事就在于找到适当的平衡以

得出深刻的结果.我们想要解释其中之一即 Hirzebruch 指标.但我们首先需要一些预备概念.

令 M 为一流形,$p_1(M),\cdots,p_m(M)$为其切丛的 Pontrjagin 类,$m\leqslant n/2$. 对$\leqslant m$ 的整数之任意序列$(i_1,i_2,\cdots,i_k)$. 作积$p_{i_1}(M)\cdots p_{i_k}(M)$,它是维数 $n=\sum_{j=1}^{k}4i_j$ 的整上同调类. 现设 M 为紧的可定向的而 $n=\dim M$(故 $\dim M\equiv 0 \bmod 4$),我们可以估计它在基本类$[M]$上之值而得一整数

$$p(i_1,\cdots,i_k)=\langle p_{i_1}(M)\cdots p_{i_k}(M),[M]\rangle,$$

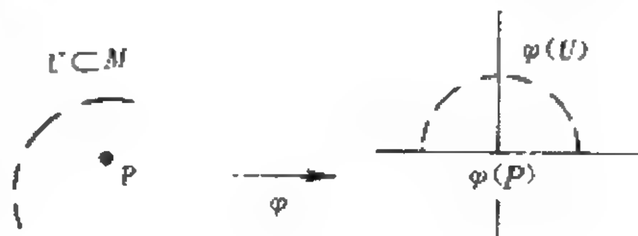
称为 Pontrjagin 数. 为方便起见,拓广其定义,设当$\sum_j 4i_j\neq\dim M$ 时它为 0,这样得到 $p(i_1,\cdots,i_k)$的一般定义. 可以类似地定义紧流形 M 的 Stiefel-Whitney 数而不问其可否定向. 这些是 mod 2 的整数.

这些数是比类更弱的不变量,因为数可能为 0 而类则不然. 举一个简单的例,取 $M=\mathbb{RP}^5$. M 可定向. 但因 $\dim M=5\not\equiv 0 \bmod 4$,故所有 Pontrjagin 类均为 0. Stiefel-Whitney 类是 $w(M)=(1+t)^6$,$t\in H^1(M;Z_2)$. 经简单计算有

$$w(M)=1+t^2+t^4.$$

故 $w_1(M)=w_3(M)=w_5(M)=0$,$w_2(M)=t^2$,$w_4(M)=t^4$. 但 2 与 4 加起来不为 5,所以也没有 Stiefel-Whitney 类. 那么这些数精密到什么程度?

我们先要回忆一些几何概念. 在第七章中介绍了有边流形的概念. 这种流形 M 就是有一些点 $P\in M$ 具有一个邻域 U,不同胚于一球体,却同胚与半个球体. 这种点就构成了 M 的边缘 $\partial M\subset M$. 它本身也是一个(无边的)流形,且 $\dim(\partial M)=\dim M-1$. 虽然少了半个球体,$\varphi(U)$中仍



包含了所有的基底方向. 这就是能在 $\varphi(U)$ 上作微分的理由，而切从 $T(M)$ 的概念仍可和前面一样定义.

令 $P\in\partial M$，$T_P(\partial M)\subset T_P(M)$ 是一超平面. 法空间 $\nu_P=T_P(M)/T_P(\partial M)$ 则是一维空间. ν_P 恒具有典则定向，即内法线. 回顾一下其定义如下. 取一坐标映射 $\varphi\longrightarrow(x_1,\cdots,x_n)$ 使 $\varphi(U)\subset$ 上半空间 $x_n\geqslant 0$. ν_P 的定向由 $\left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_P$ 给出. 若 $\psi\longrightarrow(y_1,\cdots,y_n)$ 是另一个这种坐标，则在 ν_P 中有

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_P=\left(\frac{\partial y_n}{\partial x_n}\right)_P\left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_P.$$

现在

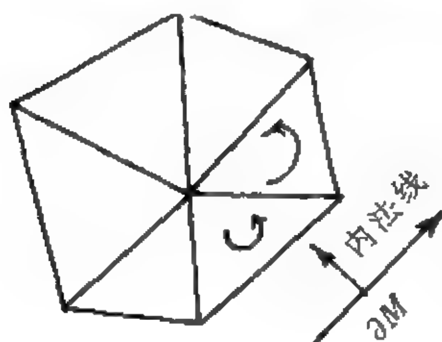
$$\left(\frac{\partial y_n}{\partial x_n}\right)_P=\lim_{x_n\to 0}\ y_n(0,\cdots,0,x_n)/x_n.$$

因当 $x_n\geqslant 0$ 时按我们的约定 $y_n\geqslant 0$，此极限恒为正，即 $(\partial/\partial x_n)_P$ 与 $(\partial/\partial y_n)_P$ 定义相同的定向.

用丛的语言说，就是 ∂M 上的丛 $\nu=(T(M)|\partial M)/T(\partial M)$ 恒可定向而不问 M 是否可定向. 因 ν 为一线丛，这意味着 ν 的群是 $SO(1)=e$，即是说 ∂M 在 M 中的法丛 ν 恒为平凡的. 作为推论，若 M 可定向则 ∂M 亦然，因为

$$i^*(w_1(M))=i^*(w_1(M))+w_1(\nu)=w_1(\partial M).$$

若 M 可定向，我们规定这样取 ∂M 的定向，使得若在其后再加上内法线即得 M 之定向，正好象 $(e_1,\cdots,e_n)$ 给出 $\mathbf{R}^n$ 之上半空间的定向.



用同调语言来说，M 的基本类不再是 M 之一切单形的和 C，因为它不再是一循环. 但当然有 $\partial C=\partial M$ 的一切单形之和(见左图). 故基本类是 $H_n(M,\partial M)$ 中之类，记作 $[M,\partial M]$. 有同调序列

$$\longrightarrow H_n(M,\partial M)\xrightarrow{\partial}$$

$$H_{n-1}(\partial M) \longrightarrow \cdots.$$

显然,按我们采取的约定

$$\partial[M,\partial M] = [\partial M]$$

是 ∂M 的基本类.

现在可定义配边的概念了.两个流形 M_0 和 M_1 称为配边的,若存在一流形 W 使 $\partial W = M_0 \sqcup M_1$."$\sqcup$"表示分离并.可以使此要求更严一些,即加上可定向性要求.这时要求 M_0, M_1 和 W 均为可定向流形,而且要求

$$\partial W = M_0 \sqcup (-M_1).$$

这表示 ∂W 上按以上规定给了诱导定向,此定向在一部分上与 M_0 的定向一致而在另一部分上与 M_1 定向相反.这些都是等价关系.紧流形的无定向配边类之集记作 $\mathscr{N}$,紧定向流形的定向配边类之集记作 Ω. $\mathscr{N}$ 与 Ω 中都有显然的加法和乘法,前者即分离并,后者为笛卡尔积.然而它们在加法"+"下成群并非不足道的事实(虽然并不难证.再加上"×"就成了环).问题显然出在反面,即已给 M_0 是否有 M_1 使 M_0 $(-M_1) = \partial W$,W 是某流形.但是现在不来讨论它.

配边性其实是一简化.已给流形 M,说在 Ω 中 $M=0$,就是说有某个 W 使 $M=\partial W$ 为其边缘.许多熟悉的流形都是这一类,例如 $S^n = \partial D^{n+1}, T^2 = \partial(D^2 \times S^1)$.但如 $\mathbf{RP}^n, \mathbf{CP}^n$ 之类又如何?而且认为作为边缘的东西就可以不计,其理由又何在?第一个简单的回答是下面的

定理 若 $M = \partial W$,则 M 的 Pontrjagin 数和 Stiefel-Whitney 数均为 0.

证明很简单.令 $p = p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}$ 是 Pontrjagin 类的任意组合.令 $i: M \longrightarrow W$ 是包含映射.我们知道

$$i^* T(W) = T(M) \oplus \nu$$

且 ν 是平凡的.所以

$$i^* p(W) \equiv p(M) \qquad \text{mod } 2(\text{挠元素})$$

因为对任意挠上同调类 u 有 $u[M]=0$，故在计算 Pontrjagin 数时可以略去. 故有

$$\begin{aligned}\langle p(M),[M]\rangle &= \langle i^* p(W),[M]\rangle = \langle i^* p(W),\partial[W,\partial W]\rangle \\ &= \langle p(W),i_*\partial[W,\partial W]\rangle = 0,\end{aligned}$$

最后一式是因为按下面的同调序列 $i_*\partial=0$：

$$\cdots \longrightarrow H_n(W,M) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(M) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(W) \longrightarrow \cdots.$$

就是说 Pontrjagin 数不能显示出任何成为边缘的东西. 例如，我们有

$$p(\mathbf{CP}^n) = (1+t^2)^{n+1}.$$

若 $n=2k$ 为偶，我们恒有

$$p_k(\mathbf{CP}^n) = \binom{2k+1}{k} t^{2k}.$$

所以 $\langle p_k(\mathbf{CP}^{2k}),[\mathbf{CP}^{2k}]\rangle = \binom{2k+1}{2k} \neq 0$. 我们于是知道 $\mathbf{CP}^{2k}$ 不是边缘. 但是我们也算出过 $\mathbf{RP}^5$ 没有 Stiefel-Whitney 数，所以不能确定 $\mathbf{RP}^5$ 是否边缘. 事实上当 n 为奇数时的 $\mathbf{RP}^n$ 均为边缘，其证如下：令 $E\longrightarrow B$ 为一主 S_1-丛. 可以作相关的圆盘丛 $W=E\times_{S^1}D^2\longrightarrow B$. 和圆盘一样，$W$ 也是一个有边流形，且 $\partial W=E\times_{S^1}\partial D^2=E\times_{S^1}S^1$. 但由以下等同关系 $[x,z]\longmapsto xz$，$x\longmapsto[x,1]$，$E\times_{S^1}S^1=E$. 所以任意光滑 S^1-丛的全空间 E 都是边缘. 现考虑主 S^1-丛 $S^{2n+1}\longrightarrow\mathbf{CP}^n$. 令 $Z_2\subset S^1$，则有下图

$$\begin{array}{ccl} S^{2n+1} & & \\ & \searrow & \\ \downarrow & & \mathbf{RP}^{2n+1}=S^{2n+1}/Z_2, \\ & \swarrow{\scriptstyle\pi} & \\ \mathbf{CP}^n & & \end{array}$$

这里 $\pi:\mathbf{RP}^{2n+1}\longrightarrow\mathbf{CP}^n$ 是一个丛，其群为 $S^1/Z_2\cong S^1$. 这样 π 仍是一主 S^1-丛，证毕.

以上所作似乎表明配边性是一个有意思的东西：它相当简单所以代数上易于处理，而在几何上又相当丰富. 除 Pontrjagin 数和

Stiefel-Whitney 数以外,还有没有其它的配边不变量？下一章我们就来讨论这个问题.

参 考 文 献

[1] Borel, A. and Hirzebruch, F., Characteristic classes and homogeneous spaces, I, II, *Amer. Journ. of Math.*, Vol. 80 (1958), 458—538; ibid. Vol. 81 (1959), 315—382.

[2] Hirzebruch, F., *Topological Methods in Algebraic Geometry*, 3rd. ed., Springer-Verlag, Berlin, 1966.

第十六章　Hirzebruch 指标定理

§1. 流形的指标

令 M 为一紧可定向流形：对维数互补的上同调类 $u\in H^k(M)$，$v\in H^{n-k}(M)$($n=\dim M$)，其上积 $u\smile v\in H^n(M)$具最高维，故可在基本类$[M]$上计值而得一整数$\langle u\smile v,[M]\rangle$，见第十二章. 例如设 u 和 v 是 M 的子流形 K 和 L 的对偶类，则此数即其相交数(先把 K 与 L 移到横截位置). 现在要更形式地研究这种配对：

$$H^k(M)\times H^{n-k}(M)\to R,$$
$$(u,v)\longmapsto B(u,v)=\langle u\smile v,[M]\rangle.$$

R 是上同调系数整环而不一定是整数. 最有趣的情况是 $k=n-k$ (从而 $n=2k$ 为偶)，则有定义于中间维数上同调类上的双线性形式：

$$H^k(M)\times H^k(M)\to R,$$
$$(u,v)\longmapsto B(u,v)=\langle u\smile v,[M]\rangle.$$

记住上同调的上积服从符号规则

$$u\smile v=(-1)^{k(n-k)}v\smile u,$$

故当 k 为偶时 $B(u,v)$为对称，k 为奇时为斜对称. 因为对称形式在代数上更有趣且更有用，我们就先限于这个情况，这样我们讨论的是紧可定向流形 M 而 $\dim M\equiv 0 \mod 4$. 下面对对称双线性形基本的代数作一复习. 为简单记先设系数整环 R 为一个域. 这样我们考虑的是定义在矢量空间 V 上的对称双线性形式

$$B: V\times V\to R.$$

B 的对称性给出了熟知的极化关系式

$$B(u+v,u+v)=B(u,u)+B(v,v)+2B(u,v).$$

至少当 R 的特征非 2 时 $B(u,v)$ 可由"二次型"

$$V\to R,\quad u\longmapsto B(u,u)$$

完全决定. 由此原因我们不再区分这两个名词.

令 (B,V), (B_1,V_1) 各为 V 和 V_1 上的二次型. 线性映射 $\varphi: V\to V_1$ 称为等距的或不变的, 如果

$$B(u,v)=B_1(\varphi u,\varphi v).$$

如有不变的线性同构存在就说 B 与 B_1 等价. 这是一种等价关系. 二次型理论只能确定二次型到等价为止.

令 $(e_1,\cdots,e_n)$ 是 V 的基底, $(d_1,\cdots,d_n)$ 是 V_1 的基底 (恒设 $\dim V=\dim V_1$, 否则 B 与 B_1 不会等价). 由双线性性, B 完全由矩阵 $\overline{B}=(B_{ij})$ 决定, 这里

$$B_{ij}=B(e_i,e_j),$$

对任意双线性形 B 都如此. 对于二次型, $\overline{B}$ 是对称的: $\overline{B}^t=\overline{B}$, t 表转置. 对任意线性映射 φ, 可将 $\varphi(e_i)$ 用 (d_j) 展开. 这就是 φ 通常的矩阵表示:

$$\varphi(e_i)=\sum_j\varphi_{ij}d_j,\qquad \overline{\varphi}=(\varphi_{ij}).$$

若 φ 是不变的, 我们有

$$\begin{aligned}B_{ij}&=B(e_i,e_j)=B_1(\varphi(e_i),\varphi(e_j))\\&=B_1\Big(\sum_l\varphi_{il}d_l,\sum_k\varphi_{jk}d_k\Big)=\sum_{l,k}\varphi_{il}(B_1)_{lk}\varphi_{jk}.\end{aligned}$$

用矩阵来表示即

$$\overline{B}=\overline{\varphi}\cdot\overline{B}_1\cdot\overline{\varphi}^t.$$

若两矩阵有如上的关系就称为相合的. 若要求 $\overline{\varphi}$ 是非奇异的, 则它是等价关系. 故二次型 B 与 B_1 为等价的 iff 其矩阵 $\overline{B}$ 与 $\overline{B}_1$ 对任意基底均为相合的.

已知二次型 (B,V) 与 (B_1,V_1) 可在 $V\oplus V_1$ 上定义其和 $C=B\oplus B_1$ 如下:

$$C(u \oplus u_1, v \oplus v_1) = B(u,v) + B_1(u_1,v_1).$$

即它在 V 上为 B，V_1 上为 B_1，且这两块互相"正交"，即指对于 $u \in V$，$u_1 \in V_1$，有

$$C(u,u_1) = C(u \oplus 0, 0 \oplus u_1) = B(u,0) + B_1(0,u_1) = 0.$$

用矩阵来说，若 B 对 V 之一基底 (e_i) 矩阵为 $\overline{B}$，B_1 对 V_1 的基底 (d_j) 矩阵为 $\overline{B_1}$，则 C 对 $V \oplus V_1$ 的基底 $(e_1, \cdots, e_m; d_1, \cdots, d_n)$ 矩阵为对角形

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} \overline{B} & 0 \\ 0 & \overline{B_1} \end{pmatrix}.$$

显然，任给二次型 (B, V)，我们总想把它分解为(B_i, V_i)之和使 $\dim V_i$ 尽可能小. 例如，若能使 $\dim V_i = 1$，则 B 被"对角化". 这种二次型更容易理解. 但在做这件事之前，先除去一些意义不大的部分.

令 B 为 V 上的双线性形，V^* 是 V 的对偶. 我们有两个自然地诱导出来的映射

$$V \to V^*, u \longmapsto B(u, \cdot), v \longmapsto B(\cdot, v).$$

对于二次型，这两个映射是相同的，记之为$\widetilde{B}: V \to V^*$. 若$\widetilde{B}$为同构就说 B 是非奇异的. 因为恒设维数有限，这就相当于说$\widetilde{B}$是一对一的. 一般说来，我们有

$$\ker \widetilde{B} = V^0 = \{u \mid B(u,v) = 0 \text{ 对于一切 } v \in V\}.$$

显然，若 $V_1 \subset V$ 是 V^0 的补空间，即 $V = V^0 \oplus V_1$，有

$$(B,V) = (B_0, V^0) \oplus (B_1, V_1),$$

这里 $B_0 = B|V^0, B_1 = B|V_1$. 但 B_0 在 V^0 上显然为 0，

$$B_0(u,v) = 0, \quad u,v \in V^0.$$

另一方面(B_1, V_1)则显然是非奇异的. 这就是所谓除去意义不大的部分：可以作商空间除去 V^0 而在 $V/V^0 = V_1$ 上得到一个新的非奇异形式 B_1. 令人高兴的是在我们关心的情况下，不必要作这样的化约.

命题 对于紧可定向流形 M，以域 R 为上同调的系数整环，则以下二次型是非奇异的：

$$H^{2k}(M)\times H^{2k}(M)\to R,$$

$$(u,v)\longmapsto B(u,v)=\langle u\smile v,[M]\rangle.$$

这只不过是重述了 Poincaré 对偶性. 回忆一下，Poincaré 对偶性就是说，映射

$$P: H^i(M)\to H_{n-i}(M),\quad v\longmapsto v\cap[M]$$

为一同构. 另一方面，我们恒有自然的配对：

$$H^i(M)\times H_i(M)\to R,\quad (v,\alpha)\longmapsto\langle v,\alpha\rangle$$

即是赋值配对. 这就给出了一个自然的映射

$$D: H_i(M)\to H^i(M)^*,\alpha\longmapsto\langle\cdot,\alpha\rangle.$$

记住，它有时也是同构. 例如当 R 为一域时就总是这样，更一般地，当 R 为任意但模 $H_{i-1}(M)$ 为 R-自由时也是这样（见第十章§2）. 作复合

$$D\circ P: H^{2k}(M)\to H_{2k}(M)\to H^{2k}(M)^*,v\longmapsto\langle\cdot,v\cap[M]\rangle,$$

则对任一 $u\in H^{2k}(M)$，我们有

$$\langle u,v\cap[M]\rangle=\langle u\smile v,[M]\rangle=B(u,v),$$

这表明

$$D\circ P(v)=B(\cdot,v)=\widetilde{B}(v).$$

所以 $\widetilde{B}=D\circ P$ 为一同构. 虽然我们仅对系数域 R 需要它，有时也考虑 $R=Z$ 为整数环. 这时我们需要加一条件：$H_{2k-1}(M)$ 是自由 Abel 群.

现在回到一般理论. 读者大概记得：二次型可以用一串行或列的初等运算对角化. 用与坐标无关的形式来表述，这就是以下的

命题 令 (B,V) 为一二次型，$V_1\subset V$ 为一子空间. 若 $B_1=B|V$ 非奇异，则 (B,V) 可分解为和：

$$(B,V)=(B_1,V_1)\oplus(B_2,V_2).$$

证 取 V 之一基底 $(e_1,\cdots,e_n)$ 使 $V_1=\langle e_1,\cdots,e_k\rangle$ 由前 k 个矢量

张成. 这时矩阵$\overline{B}$形如

$$\overline{B}=\begin{pmatrix}\overline{B}_1 & A\\ A^t & C\end{pmatrix},$$

$\overline{B}_1$ 是 B_1 的矩阵，A 和 C 各为某 $k\times(n-k)$ 和 $(n-k)\times(n-k)$ 矩阵. 由假设，$\overline{B}_1$ 非奇异. 考虑矩阵

$$P=\begin{pmatrix}I & 0\\ -A^tD & I\end{pmatrix},$$

其中 $D=(\overline{B}_1)^{-1}$. 我们有(注意$\overline{B}_1$，C 以及从而还有 D 均为对称)：

$$\begin{aligned}P\overline{B}P^t&=\begin{pmatrix}I & 0\\ -A^tD & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{B}_1 & A\\ A^t & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & -DA\\ 0 & I\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\overline{B}_1 & A\\ 0 & C_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & -DA\\ 0 & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{B}_1 & 0\\ 0 & C_1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

其中 $C_1=C-A^tDA$.

我们要提醒读者，这就是经典的经由行或列的初等运算作对角化的程序. 设

$$\overline{B}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}$$

是 B 关于任意基底$(e_1,\cdots,e_n)$的矩阵表示. 令 $V_1=\langle e_1\rangle$是使 $B_1=B|V_1$ 非奇异的子空间. 这意味着 $b_{11}\neq 0$. 矩阵 P 不过是给出了新基底

$$e_1'=e_1-\sum_{j\geqslant 2}\frac{b_{j1}}{b_{11}}e_j,$$
$$e_i'=e_i,\quad i\geqslant 2.$$

它按我们的规定是初等的行或列运算. 矩阵在新基底下对角化为

$$\begin{pmatrix}b_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{\;*\;} & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

然后可以再做下去.

有对角化定理后即可将二次型分类. 结果与基域 R 有关. 最简单的是 R 为代数闭域, 例如 $R=\mathbf{C}$ 为复数域. 在 $V=\mathbf{C}^n$ 上有典则形式 B_n: 对于 $u=(u_1,\cdots,u_n)$, $v=(v_1,\cdots,v_n)$, 有

$$B_n(u,v)=\sum_i u_i v_i.$$

在典则基底 $e_i=(0,\cdots,1,\cdots,0)$, $i=1,2,\cdots,n$, 矩阵 $\overline{B}_n=I_n$ 即为单位阵. 我们有

定理 n 维复矢量空间上的任意非奇异二次型 (B,V) 均等价于 $(B_n,\mathbf{C}^n)$. 因此没有复域上的二次型理论.

证 因 B 为非奇异, 至少有一 $u\neq 0$ 使 $B(u,u)\neq 0$. 否则如前所述, 作极化可得: 对一切 $u,v\in V$, $B(u,v)=0$. 现将 u 规范化为 $e_1=u/\sqrt{B(u,u)}$. 我们有 $B(e_1,e_1)=1$. 由上之命题可以分解出 $V_1=\langle e_1\rangle\subset V$. 在 V_1 的补空间上重复以上论证, 最终可得一基底 $(e_1,\cdots,e_n)$ 使 B 对应的矩阵 $\overline{B}$ 为单位阵.

上述定理之所以简单当然是由于在复域中可取平方根 $\sqrt{B(u,u)}$ 才使 u 可规范化为 e_1 而 $B(e_1,e_1)=1$. 在实数域 $\mathbf{R}$ 中最多可取 $\sqrt{|B(u,u)|}$, 这样得到基底 $(e_1,\cdots,e_n)$ 使 $B(e_i,e_i)=\pm 1$. 我们称 B 为 (p,q) 型的, 若有 p 个 e_i 使 $B(e_i,e_i)=1$, q 个使 $B(e_i,e_i)=-1$. 问题自然是确定型是否二次型 B 的不变量. 这里有著名的

Sylvester 惯性定理 令 (B,V) 为一二次型而有 (p,q) 型基底, (B',V') 则有 (p',q') 型基底. 于是

$$B\sim B'\Leftrightarrow(p,q)=(p',q').$$

"$\Leftarrow$"是不足道的. 至于另一半, 我们需要反射的概念. 令 (B,V) 为一二次型, $a\in V$ 为一矢量, $B(a,a)=\alpha\neq 0$, 映射 $\varphi: V\rightarrow V$, $\varphi(u)=(2B(u,a)/\alpha)a-u$ 是一不变线性映射, 因为我们有

$$B(\varphi(u),\varphi(v))=\frac{4}{\alpha}B(u,a)B(v,a)-\frac{2}{\alpha}B(u,a)B(a,v)$$
$$-\frac{2}{\alpha}B(u,a)B(v,a)+B(u,v)$$

$$=B(u,v).$$

我们还有 $\varphi(a)=2a-a=a$. 将 φ 应用到等式

$$u+\varphi(u)=(2B(u,a)/a)a$$

上可得 $u+\varphi(u)=\varphi(u)+\varphi^2(u)$. 亦即 $\varphi^2=1$. 因此 φ 是对于直线 $\langle a\rangle$ 的反射. 我们有以下巧妙的

引理 令 $u,v\in V$ 使 $B(u,u)=B(v,v)=\alpha\neq 0$, 则必有一反射变 u 为 v.

证

$$B(u+v,u+v)=2\alpha+2B(u,v),$$
$$B(u-v,u-v)=2\alpha-2B(u,v).$$

二式中至少有一不为 0, 否则 $4\alpha=0$. 设 $B(u+v,u+v)\neq 0$. 对于 $u+v$ 的反射 φ 将变 u 为 v, 因为

$$\begin{aligned}\varphi(u)&=\frac{2B(u,u+v)}{2\alpha+2B(u,v)}(u+v)-u\\&=\frac{2B(u,u)+2B(u,v)}{2\alpha+2B(u,v)}(u+v)-u\\&=\frac{2\alpha+2B(u,v)}{2\alpha+2B(u,v)}(u+v)-u=v.\end{aligned}$$

现在来证明定理. 令 $(e_1,\cdots,e_n)$ 为 (B,V) 的一基底, 型为 (p,q), $(e_1',\cdots,e_n')$ 是 (B',V') 的 (p',q') 型基底. 设 $B(e_1,e_1)=B'(e_1',e_1')=1$. 由假设 B 与 B' 间有一等价 $\psi: V\to V'$. 故有 $B'(\psi(e_1),\psi(e_1))=B(e_1,e_1)=1=B'(e_1',e_1')$. 应用引理, 存在一反射 $\varphi: V'\to V'$ 变 $\psi(e_1)$ 为 e_1'. 于是 $\varphi\psi: V\to V'$ 是变 e_1 为 e_1' 的等价. 但它也必变 e_1 的正交补 $(e_2,\cdots,e_n)$ 为 e_1' 的正交补 $(e_2',\cdots,e_n')$, 然后即可继续这一论证. 这样实数域或有理数域上的二次型 (B,V) 全由 (p,q) 决定. 通常定义 (B,V) 的指标或称符号数 $I(B)=p-q$. 在固定维数 $n=p+q$ 的矢量空间上, $I(B)$ 完全决定 B. 用 $I(B)$ 而不用 p,q 是因为它在几何上更有启发. 说 $I(B)=0$ 即指 V 可以分解为两个等维数的子空间 $V=V^+\oplus V^-$, B 在 V^+ 上为正定, V^- 上为负定. (一般情况下 V 可以分解为一个正定与一个负定部分 $V=V^+\oplus V^-$. 当然, 分解不是唯一的, 但 Sylvester 定理指出它们的维数一定.) 我们马上就会知道何时

$I(B)=0$，因为我们又有另一个巧妙的

引理 $I(B)=0$ iff 有一子空间 $V_1\subset V$ 使 B 在其上恒为 0 而 $\dim V=2\dim V_1$.

证 设这样的 V_1 存在. 令 $V=V^+\oplus V^-$ 而 $\dim V^+=p$，$\dim V^-=q$，(p,q) 是 B 之型. 自然的投影 $\pi: V_1\to V/V^+$ 以 $V_1\cap V^+$ 为核. 但若 $u\in V_1\cap V^+$，则

$$0=B(u,u)\Rightarrow u=0$$

因为 B 在 V^+ 上为正定. 于是 π 为一对一. 故有

$$q=\dim V^-=\dim(V/V^+)\geqslant\dim V_1.$$

同理也可证明

$$p\geqslant\dim V_1.$$

但因 $\dim V=p+q\geqslant 2\dim V_1=\dim V$，故必有 $p=q=\dim V_1$.

我们所需的有关二次型的代数知识尽在此. 从代数来说这是最初等的部分，因为我们处理的是域. 在环(例如整数环)上二次型的分类就复杂多了. 现回到几何而令 M 为紧可定向流形且 $\dim M=4k$. 取一域为上同调系数整环，例如取有理数域 Q. 于是上积定义了 $H^{2k}(M)$上的一个二次型. 其指标即定义为 M 的指标 $I(M)$. 为方便起见，当 $\dim M\neq 0 \bmod 4$ 时就定义 $I(M)=0$. 关于 $I(M)$最有趣的事实就是以下的

定理(R. Thom) 若 $M=\partial W$，W 是紧可定向流形，则 $I(W)=0$.

证明前先作一点一般的说明. 令 V 为一有限维矢量空间，V^* 为其对偶，于是有自然的配对：

$$V^*\times V\to K,\ (\varphi,\ u)\longmapsto\varphi(u).$$

令 $A\subset V$ 为一子空间，其零化子空间 $A^0\subset V^*$ 即使 $\varphi|A^*=0$ 的 $\varphi\in V^*$ 之子空间. 它的用处是：令 $i: A\to V$ 为包含映射，我们有诱导映射 $i^*: V^*\to A^*$，由定义 $i^*(\varphi)=\varphi|A$，故有

$$A^0=\ker i^*.$$

另一方面 i^* 恒为满射(这相当于说 A 上之任意线性函数均可拓展到 V 上. 提示：取 A 之补). 故

$$A^* = V^*/A^0.$$

因为 $\dim V = \dim V^*$,所以我们有

$$\dim A + \dim A^0 = \dim V. \tag{1}$$

现在给出定理之证.若 W 存在,包含映射 $i: M \to W$ 将给出 $i^*: H^{2k}(M) \to H^{2k}(M)$,$\dim M = 4k$. 令 $A = \mathrm{Im} i^*$,因为系数在域中,Pontrjagin 对偶性成立,故可将 $(H^*(M))^*$ 与 $H_*(M)$ 等同起来. 现计算零化子 A^0,对于 $\varphi \in H_{2k}(M)$,$u \in H^{2k}(W)$ 我们有

$$\langle i^* u, \varphi \rangle = \langle u, i_* \varphi \rangle,$$

故 $\varphi \in A^0$ iff $\langle u, i_* \varphi \rangle = 0$ 对一切 $u \in H^{2k}(W)$ 成立. 再用 Pontrjagin 对偶性:$(H^{2k}(W))^* = H_{2k}(W)$,这意味着 $i_* \varphi = 0$ 即

$$\varphi \in \ker i_* : H_{2k}(M) \to H_{2k}(W).$$

这样就定出了

$$(\mathrm{Im} i^*)^0 = \ker i_*. \tag{2}$$

以上计算对任意的对(W, M)均成立. 但对于流形还可应用 Poincaré 对偶性. 我们将它写成

$$\begin{array}{ccccc}
H^{2k}(W) & \xrightarrow{i^*} & H^{2k}(M) & \xrightarrow{\delta} & H^{2k+1}(W, M) \\
\downarrow \sim P_1 & & \downarrow \sim P_2 & & \downarrow \sim P_3 \\
H_{2k+1}(W, M) & \xrightarrow{\partial} & H_{2k}(M) & \xrightarrow{i_*} & H_{2k}(W),
\end{array}$$

P_1, P_2, P_3 是对偶映射:$P_1 = \cap [W, M] = P_3$, $P_2 = \cap [M]$. (注意$[W, M] \in H_{4k+1}(W, M)$, $[M] \in \partial [W, M] \in H_{4k}(M)$.)由上之图式易得

$$P_2 : \mathrm{Im} i^* \simeq \ker i_*. \tag{3}$$

由(1),(2),(3)可知

$$\dim H^{2k}(M) = 2\dim A.$$

现在可以应用引理了. 若能证明上积配对在 A 上为 0 则定理得证. 但这很容易. 对 $u, v \in H^{2k}(W)$ 有

$$\begin{aligned}
&\langle i^* u \smile i^* v, [M] \rangle \\
&\qquad = \langle i^*(u \smile v), [M] \rangle
\end{aligned}$$

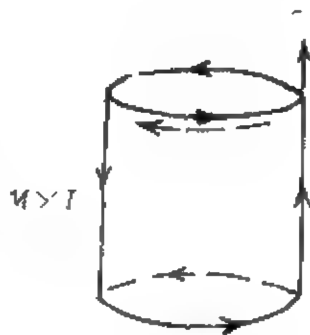
$$=\langle u\smile v, i_*[M]\rangle$$
$$=\langle u\smile v, i_*\partial[W,M]\rangle=0,$$
因为 $i_*\partial=0$.

我们已找到两个配边不变量：Pontrjagin 数和指标，有意思的是在证明其配边不变性时，都用到了 $i_*\partial=0$ 这一事实.

§2. 配边环的构造

指标与 Pontrjagin 数确有关系. 然而这远非简单. 其基础是关于配边环构造的深刻的定理.

所以我们再温习一些一般知识. 记住，有两类配边环. 在无定向情况我们考虑一切无边紧流形. $M\sim N$ iff 存在一个紧流形 W 使
$$\partial W = M\sqcup N \qquad (分离并).$$
在有定向情况，只考虑可定向流形且要求
$$\partial W = M\sqcup(-N).$$
所得集 $\mathfrak{N}$ 与 Ω 是环，其运算为 $[M]+[N]=[M\sqcup N]$，$[M]\times[N]=[M\times N]$（$[M]$表 M 之配边类）. 当然需要验证它们的合理性. 但这只是容易的公式文章. 例如，群 Ω 之零元即任意边缘类$[\partial W]$（例如球面）. 已给流形 M，图(16—1)以及关于内法线的约定给出
$$\partial(M\times I) = M\sqcup(-M).$$
所以在 Ω 中有
$$-[M]=[-M]$$
（在 $\mathfrak{N}$ 中则有 $2[M]=0$，所以 $\mathfrak{N}$ 是 Z_2 上的矢量空间）. R. Thom 的出色的工作就在于他成功地给出了这样一般的对象以显示的公式. 我们有



图(a)

图 (16—1)

定理(R. Thom) 无定向配边环 $\mathfrak{N}$ 是 Z_2 上的多项式环，且对各维数 k，只要 $k\neq 2^n-1$，$n\geq 1$ 均有一生成元. 且当 k 为偶时，

可取此生成元为$[\mathbf{RP}^k]$.(由上一章,当 k 为奇时 $\mathbf{RP}^k$ 恒为一边缘,所以当 k 为奇且不为 2^n-1 时要另找生成元.)

定向配边环 Ω 的构造较复杂,因为它是 Z 上的代数,可能有挠元素,即是说,一流形自身并非边缘,但取几个相同定向的 M 拼起来可能成一边缘(因此 $M\times I$ 不能是例子). 然而例如若与有理数域 $\mathbf{Q}$ 或实数域 $\mathbf{R}$ 作张量积而抹去挠元素,Thom 也有一构造定理:

定理(R. Thom) 代数 $\Omega\otimes\mathbf{Q}$ 是 $\mathbf{Q}$ 上的多项式代数且对每个维数 $4k$ 均有一生成元 $[\mathbf{CP}^{2k}]$(即 $[\mathbf{CP}^{2k}]\otimes 1$).

这个构造定理在 Pontrjagin 类上有有趣的含义. 按此定理,对一切序列 $I=(i_1,\cdots,i_k)$ 单项式 $\mathbf{CP}^{2i_1}\times\cdots\times\mathbf{CP}^{2i_k}$形成 $\Omega\otimes\mathbf{Q}$ 的加法基. 另一方面,相应于此序列 I 可作 Pontrjagin 类 $p_I=p_{i_1}\cdots p_{i_k}$,它定义一个映射

$$p_I:\Omega\to Z,\qquad [M]\longmapsto\langle p_I(M),[M]\rangle$$

即一 Pontrjagin 数. 它显然是线性的(以分离并为加法),从而可看作对偶空间 Ω^* 之元:$p_I\in\Omega^*$. 把 p_I 自然地拓展到 $\Omega\otimes\mathbf{Q}$ 上,恒可视 p_I 为$(\Omega\otimes\mathbf{Q})^*$中之元. 这样我们注意到 $p_I\in(\Omega\otimes\mathbf{Q})^*$ 与 $\Omega\otimes\mathbf{Q}$ 中的 $\mathbf{CP}^I=\mathbf{CP}^{2i_1}\times\cdots\times\mathbf{CP}^{i_k}$个数一样多. 这会引导我们设想$\{p_I\}\in(\Omega\otimes\mathbf{Q})^*$构成与$\{\mathbf{CP}^I\}\in\Omega\otimes\mathbf{Q}$ 对偶的基底. 不巧的是这并非事实. 例如取 $I=(2),J=(1,1)$,有

$$\langle p_I,\mathbf{CP}^J\rangle=\langle p_2,\mathbf{CP}^2\times\mathbf{CP}^2\rangle=\langle p_2(\mathbf{CP}^2\times\mathbf{CP}^2),\mathbf{CP}^2\times\mathbf{CP}^2\rangle.$$

但是 $p(\mathbf{CP}^2\times\mathbf{CP}^2)=(1+t^2)^3(1+s^2)^3$,故 $p_2(\mathbf{CP}^2\times\mathbf{CP}^2)=9t^2s^2$,故

$$\langle p_I,\mathbf{CP}^J\rangle=9\neq 0.$$

但是仍然可能将$\{p_I\}$改变为一个与$\{\mathbf{CP}^I\}$对偶的新基底. 我们就来做这件事. 这只是一些熟知的但不太容易的代数. 所以先作一些安排. 首先单项式 $\mathbf{CP}^I=\mathbf{CP}^{i_1}\times\cdots\times\mathbf{CP}^{i_k}$并不唯一对应于$(i_1,\cdots,i_k)$因为将各 i_j 置换并不改变单项式. 所以我们要讲到无次序序列 $I=[i_1,\cdots,i_k]$. 这个无次序序列称为 $|I|=\sum_j i_j$ 的一个分划(设 $i_j>0$,

允许重复．k 称为 I 的长度)．另一种形式的说法是：令对称群 Γ_k 作用在长为 k 的序列之集上，如 $g(i_1,\cdots,i_k)=(i_{g(1)},i_{g(2)},\cdots,i_{g(k)})$．分划就是此作用的轨道亦即等价类．整数 n 的一切分划之集记作 $P(n)$．例如

$$P(1)=\{[1]\},$$
$$P(2)=\{[2],[1,1]\},$$
$$P(3)=\{[3],[2,1],[1,1,1]\},\cdots$$

相应于分划 $I=[i_1,i_2,\cdots,i_k]$ 有单项式 $\mathbf{CP}^I=\mathbf{CP}^{i_1}\times\cdots\times\mathbf{CP}^{i_k}$ 和 Pontrjagin 类 $p_I=p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}$．这时置换没有关系，因为一切都是偶数维的．(在 Ω 中，$[M]\times[N]=[M\times N]$，以 M 之定向继之以 N 为定向．)Thom 定理告诉我们，$\{\mathbf{CP}^I|I$ 为分划$\}$ 是 $\Omega\times\mathbf{Q}$ 之基底．现在想证明，$\{P^I|I$ 为分划$\}$ 是 $(\Omega\times\mathbf{Q})^*$ 之基底，只要将 $\{P^I\}$ 换成一个新的集 $\{Q^I\}$，它确是 $\{\mathbf{CP}^I\}$ 之对偶基底．为此，记住 p_i 可用初等对称函数表示，即视 $H^*(BO(n))$ 为 $H^*(BT^m)$ 的子代数，$n=2m$ 或 $2m+1$．这时

$$\sum_{i=0}^{m}p_i=\prod_{i=1}^{m}(1+t_i^2).$$

因为我们是对一切 i 处理 p_i，我们不固定 n，即考虑无限多个 t_i．在形式上用不用 t_i^2 显然也无关紧要．这样有一串未定元 t_1，t_2，$\cdots$，且 $\deg t_i=4$．它们与 p_i 的关系是

$$\sum_{i=0}^{m}p_i=\prod_{j=1}^{n}(1+t_j),$$

m 和 n 是任意的，但要求 $m\leqslant n$．

我们也可以直接用关于 t_i 的对称函数而不用 p_i．已给一个分划 $I=[i_1,i_2,\cdots,i_k]$ 对所有不同的 $t_{g(1)}^{i_1}\cdots t_{g(k)}^{i_k}$ 作和

$$S_I=\sum_{g\in\Gamma_k}t_{g(1)}^{i_1}\cdots t_{g(k)}^{i_k}$$

即令 Γ_k 作用在所有的长为 k 的单项式上，并在此轨道上求和．由定义，S_I 是一对称函数．我们可以把它既看成函数 $S_I=S_I(i_1,\cdots,i_k)$ 又可看成函数 $S_I=S_I(p_1,\cdots,p_k)$．按我们的约定，它的次数是 4

$|I|$. 例如有

$$S_{(1)} = t_1 = t_1 + t_2 + \cdots + t_k = p_1,$$

$$S_{(2)} = t_1^2 + t_2^2 = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = (t_1 + t_2)^2 - 2t_1t_2$$

$$= (t_1 + t_2 + t_3)^2 - 2(t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1) = p_1^2 - 2p_2,$$

$$S_{(1,1)} = t_1t_2 = t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = p_2,$$

$$S_{(3)} = t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 = (t_1 + t_2 + t_3)^3$$

$$- 3(t_1 + t_2 + t_3)(t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1) + 3t_1t_2t_3$$

$$= p_1^3 - 3p_1p_2 + 3p_3.$$

由定义，在对称函数代数 $S=Q[t_1,t_2,\cdots]=Q[p_1,p_2,\cdots]$中，$\{S_I\}$和$\{p_I\}$都是基底. 故它们之间有一非奇异矩阵变换.

因 S_I 是一 Pontrjagin 类，可将它应用于一实矢量丛 E(适当维数)，于是得到相应于乘积公式的 Whitney 和的公式. 令 $I=[i_1,\cdots,i_k]$，$J=[j_1,\cdots,j_l]$均是两个分划，其组合

$$K = IJ = [i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_l]$$

即将 I,J 合在一起之分划(记住，由定义次序无关). 这样，我们就有

命题 $S_I(E\oplus F) = \sum_{JK=I} S_J(E)S_K(F).$

证明完全是组合学. 取 n 充分大使 $E\oplus F$ 总共有 $2n$ 个未定元，即 E 有$(t_1,\cdots,t_n)$，F 有$(t_{n+1},\cdots,t_{2n})$(即是说，添上一些平凡丛可设 $\dim E=\dim F=4n$，n 充分大). 令 $I=(i_1,\cdots,i_k)$我们有

$$S_I(E\oplus F) = \sum_{g\in\Gamma_{2n}} t_{g(1)}^{i_1}\cdots t_{g(k)}^{i_k}.$$

对固定的 g，令 $J(g)=\{i_j|g(j)\leqslant n\}$，$K(g)=\{i_j|g(j)\geqslant n+1\}$，显然可得 $S_{J(g)}(E)S_{K(g)}(F)$含于 $S_I(E\oplus F)$中，令 g 遍取 Γ_{2n}之元，即得一切可能的组合 $JK=I$.

我们立即可得一推论：

$$\langle S_I,\mathbf{CP}^{2j_1}\times\cdots\times\mathbf{CP}^{2j_l}\rangle = \sum_{I_1\cdots I_l=I}\langle S_{I_1},\mathbf{CP}^{2j_1}\rangle\cdots\langle S_{I_l},\mathbf{CP}^{2j_l}\rangle.$$

为使右方非 0，自然需要$|I_1|=j_1$，$|I_2|=j_2$，$\cdots$，$|I_l|=j_l$，换言之，I

$=I_1I_2\cdots I_l$ 可分解为较小的分划$(j_1,\cdots,j_l)=J$. 这时我们说 I 是 J 的细分, 记作 $I\leqslant J$. 这自然是分划的偏序. 注意到

$$p(\mathbf{CP}^{2k})=(1+t^2)^{2k+1}$$

是一形式的因式分解而 $t_1=t_2=\cdots=t_{2k+1}=t^2$, 我们有

$$\langle S_{(k)},\mathbf{CP}^{2k}\rangle=\langle(2k+1)t^{2k},\mathbf{CP}^{2k}\rangle=2k+1\neq 0.$$

另一方面, 对任意 I, $\langle S_I,\mathbf{CP}^{2k}\rangle\geqslant 0$ 显然非负, 因此特别有$\langle S_I,\mathbf{CP}^I\rangle\neq 0$. 现可就 I 之长归纳地定义 Pontrjagin 类之集$\{Q_I\}$使得

$$\langle Q_I,\mathbf{CP}^J\rangle\neq 0\quad\Leftrightarrow\quad I=J.\qquad (*)$$

若 $|I|=k$ 之长为 1, 就设 $Q_I=S_I$. 因 I 不细分任意 J, (*)是显然的. 设已对(I 之长)-1 定义了 Q_J, 今定义

$$Q_I=S_I-\sum_{I\leqslant J,I\neq J}a_JQ_J,\qquad (**)$$

$a_J=\langle S_I,\mathbf{CP}^J\rangle/\langle Q_J,\mathbf{CP}^J\rangle$. 注意此式仅当 I 细分 J 且 $I\neq J$ 时有意义. J 之长必短于 I. (*)是显然的. 由 Thom 构造定理, $\{Q_I\}$是$\{\Omega\otimes\mathbf{Q}\}^*$的对偶于$\{\mathbf{CP}^I\}$的基底. 另一方面, 由(* *)$\{Q_I\}$可写为$\{S_I\}$之线性组合, 反之亦然. 故得$\{P_I\}$也是$\{\Omega\otimes\mathbf{Q}\}^*$之基底. 作为直接的推论, 我们有

定理(R. Thom) 流形 M 与 N 在 $\Omega\times\mathbf{Q}$ 中定义相同配边类, iff 它们有相同 Pontrjagin 数.

无定向情况也有类似定理, 即$[M]=[N]$于 $\mathfrak{N}$ 中 iff M 与 N 有相同 Stiefel-Whitney 类.

另一个直接推论是 Ω 上之任意线性泛函必为 Pontrjagin 数的有理线性组合. 我们恰好知道一个这样的对象即指标函数

$$I:\Omega\to Z,\quad [M]\longmapsto I(M).$$

更准确地说, $I=(I_n)$是一个函数序列, 而且

$$I_n:\Omega_n\to Z$$

在 Ω_n 上是线性的. 它可以自然地拓展为

$$I_n:\Omega_n\otimes Q\to Q.$$

因此, 作为$(\Omega_n\otimes Q)^*$之元, 可以把它写成

$$L_k = \sum \lambda_I p_I, \quad \lambda_I \in Q \qquad (***)$$

即为分划的线性组合，$|I| = n/4$. 因为当 $n \neq 0 \bmod 4$ 时 $\Omega_n \otimes Q = 0$，习惯上写 L_k 而不写 L_{4k}. 这在本质上即 Hirzebruch 指标定理，只不过 Hirzebruch 把展开式显示地表出了. 甚至在做到这件事前(见下节)，已经有了重要的教益. 记住我们一直关心着示性类. 作为一个不变量在决定流形的微分同胚类精密度如何？现在又多了一个这方面的结果. Pontrjagin 类的某些有理线性组合只依赖于上同调，从而只依赖于流形的伦型. 如果还认为这一点仍然令人不够满足，有理由还是稍等一下再作这种判断.

将会看到，显示展开式$(***)$也是有意思的. 对小的 n 可以直接计算. 例如 $n=1$ 时只有一个分划$(1)=I$. 我们有 $I(\mathbf{CP}^2)=1$，而$\langle p_1, \mathbf{CP}^2\rangle = 3$，所以

$$L_1 = \frac{1}{3}p_1.$$

$n=2$ 时有两个分划 $I=(2)$和 $J=(1,1)$. 我们有

$$\langle p_I, \mathbf{CP}^I\rangle = \langle p_2, \mathbf{CP}^4\rangle = 10,$$
$$\langle p_J, \mathbf{CP}^I\rangle = \langle p_1^2, \mathbf{CP}^4\rangle = 25,$$
$$\langle p_I, \mathbf{CP}^J\rangle = \langle p_2, \mathbf{CP}^2 \times \mathbf{CP}^2\rangle = 9,$$
$$\langle p_J, \mathbf{CP}^J\rangle = \langle p_1^2, \mathbf{CP}^2 \times \mathbf{CP}^2\rangle = 18.$$

我们还有

$$I(\mathbf{CP}^4) = 1, \quad I(\mathbf{CP}^2 \times \mathbf{CP}^2) = 1.$$

所以

$$\begin{vmatrix} \langle p_I, \mathbf{CP}^I\rangle & \langle p_I, \mathbf{CP}^J\rangle \\ \langle p_J, \mathbf{CP}^I\rangle & \langle p_J, \mathbf{CP}^J\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 9 \\ 25 & 18 \end{vmatrix} = -45,$$

$$\lambda_I = \begin{vmatrix} 1 & 25 \\ 1 & 18 \end{vmatrix} / (-45) = 7/45,$$

$$\lambda_J = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} / (-45) = -1/45.$$

这就给出 $I_2=\frac{1}{45}(7p_2-p_1^2)$.

这些计算的意义如下：由定义，展开式（* * *）右方的系数 λ_i 是有理数，所以将（* * *）用于一流形 M 时将得出一有理数. 另一方面，$I(M)$ 由其本性是一整数. 这就给出 M 的 Pontrjagin 类的很强的可除性条件. 例如，任意 4 维流形 M 的 $p_1(M)$ 必可用 3 整除. 任意 8 维流形 M 的 $(7p_2-p_1^2)(M)$ 必可为 45 整除. 这些显然是相当不简单的事，所以我们要进一步探讨它. 为此我们需要更有效的方法，这将是下一节的主题.

§3. 乘法序列

我们在上节已看到，由于 $\Omega\times Q$ 的构造定理，任意加法配边不变量必可用 Pontrjagin 数表示. 对于指标函数 $I=(I_n)$，我们也看到怎样对小的 n 用直接计算来做这件事. 当然，对一切 n 在原则上都可进行同样的计算. 例如稍微耐心一点就可算出

$$I_3=\frac{1}{945}(62p_3-13p_2p_1+2p_1^3).$$

但是，想得到系统的结果显然需要比直接计算更多一点东西. 所幸这些“东西”确实是有的. 因为指标函数不仅是加法的，也是乘法的，即为环同态. 为此令 M、N 为紧可定向流形且 $\dim M=4k$, $\dim N=4l$. 故 $M\times N$ 的中间维数是 $2n=2(k+l)$. 因为设系数在体中，故可用 Künneth 公式. 故有

$$V=H^{2n}(M\times N)=\sum_{p+q=n}H^{2p}(M)\otimes H^{2q}(N).$$

记住，上积双线性形 B 对 $u,u'\in H^*(M)$, $v,v'\in H^*(N)$ 为

$$\langle(u\otimes v)(u'\otimes v'),[M\times N]\rangle=\langle uu',[M]\rangle\langle vv',[N]\rangle.$$

上式只有当维数匹配即 $\dim u+\dim u'=4k$, $\dim v+\dim v'=4l$ 时才 $\neq 0$. 这意味着 V 可以分解正交子空间

$$V^p=[H^{2p}(M)\otimes H^{2q}(N)]\oplus[H^{4k-2p}(M)\otimes H^{4l-2q}(N)],$$

这里 $p<k$(从而 $q=n-p>l$)，而当 $p=k$ 时则有

$$V^k = H^{2k}(M) \otimes H^{2l}(N).$$

我们可以在每一片上计算 B 的指标再相加.

当 $p<q$ 时，由 Poincaré 对偶性有 $H^{2p}(M)\simeq H^{4k-2p}(M)$. 取 $H^{2p}(M)$ 的基底 $(e_1,\cdots,e_t)$ 和 $H^{4k-2p}(M)$ 对偶的基底 $(\bar{e}_1,\cdots,\bar{e}_t)$ 即

$$\langle e_i\bar{e}_j,[M]\rangle = \delta_{ij}.$$

对 $H^{2q}(N)$ 与 $H^{4l-2q}(N)$ 也可作同样的 $(d_1,\cdots,d_s)$，$(\bar{d}_1,\cdots,\bar{d}_s)$. 于是可得 V^p 的一个基底

$$\{e_i\otimes d_j,\bar{e}_i\otimes \bar{d}_j \mid 1\leqslant i\leqslant t,1\leqslant j\leqslant s\}.$$

V^p 于是可以进一步分解为许多二维子空间

$$V^p_{ij} = \{e_i\otimes d_j,\bar{e}_i\otimes \bar{d}_j\}.$$

把基底换成 $\frac{1}{\sqrt{2}}(e_i\otimes d_j+\bar{e}_i\otimes\bar{d}_j)$，$\frac{1}{\sqrt{2}}(e_i\otimes d_j-\bar{e}_i\otimes\bar{d}_j)$，乘积形式的矩阵成为 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，故在 V^p 上当 $p<k$ 时指标为 0.

对 $p=k$，取 $H^{2k}(M)$ 的基底 $(e_1,\cdots,e_t)$ 使其上积形式对角化，取 $H^{2l}(N)$ 的基底 $(d_1,\cdots,d_s)$ 使 N 之上积形式对角化. 显然，基底 $e_i\otimes d_j$，$1\leqslant i\leqslant t$，$1\leqslant j\leqslant s$ 使 $H^{2k}(M)\otimes H^{2l}(N)$ 的上积形式对角化. 简单的计算表明，指标为 $I(M)\cdot I(N)$.

故若将 $I=(I_n)$ 表为 Pontrjagin 类的函数 $(I_n(p_1,\cdots,p_n))$. 必有类似的乘法性质. 先把这一点弄明确. 把 p_i 看成代数 $H^*(BO)=\lim\limits_{n\to\infty}H^*(BO(n))$ 的万有 Pontrjagin 类，即令 $H^*(BO)$ 为

$$H^*(BO(1))\subset H^*(BO(2))\subset\cdots\subset H^*(BO(n))\cdots$$

之并. 对任一流形 M，或更一般地，对任一矢量丛 $E\to B$，以 Pontrjagin 类 $p(E)=(p_i(E))$ 代入 I 即得一序列

$$I(p(E)) = (I_n(p_1(E),\cdots,p_n(E)) \in H^*(B).$$

因为对于大的 n，$I_n(p_1(E),\cdots,p_n(E))=0$，故可考虑和式

$$I(p(E)) = \sum_{n=0}^{\infty}I_n(p_1(E),\cdots,p_n(E)).$$

所以，乘法性质清楚地应表示：对于矢量丛 $E\to B, E_1\to B_1$，应有

$$I(p(E\oplus E_1)) = I(p(E)\otimes p(E_1)) = I(p(E))\otimes I(p(E_1)),$$

或按分支表为

$$I_n(p(E)\otimes p(E_1)) = \sum_{p+q=n} I_p(p(E))\otimes I_q(p(E_1)).$$

这种对象研究起来并不困难，它们可以形式地表述为乘法序列。

我们按文[1]固定一基环 R 及 R 上的分级代数 $A^* = \sum_{i=0}^{\infty} A^i$，而且 $1\in A^0$。例如 $A^* = H^*(M)$ 即 M 在 R 上的上同调代数，或 $A^* = H^*(BO)$。

对每个 A^* 令 $A^\natural$ 为以下的形式和之集：

$$a = \sum_{s=0}^{\infty} a_s, \quad a_s \in A^s.$$

$A^\natural$ 其实是所有序列 (a_s)，$a_s\in A^s$ 之集。把它写成形式和是为了容易记忆乘积公式应如何定义。对于 $a=\sum a_s, b=\sum b_s$ 当然应该定义 $ab=\sum c_n$，这里 $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$。就是说，乘法是象多项式一样来作的。

现考虑未定元 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 的多项式环

$$A_0^* = A[x_1, x_2, \cdots].$$

A_0^* 可按 $\deg x_i = i$ 来分级。于是 $A_0^\natural$ 之元是一级数

$$K(x) = \sum K_n(x), \quad K_n \in A_0^n.$$

由此，每个 K_n 只是前 n 个未定元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之多项式：

$$K_n(x) = K_n(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

它是未定元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 次齐性多项式，且 $\deg x_i = i$。

给出任一 R 代数 A^* 和 $a\in A^\natural$ 后，必可作出元素

$$K(a) = \sum_n K_n(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in A^\natural$$

称为 $K(x)$ 中令 $x=a$ 时的值。$K(x)$ 称为"乘法的"如果

$$K(ab) = K(a)K(b)$$

对任意代数 A^* 及任意 $a,b\in A^1$ 均成立. 实际上, 我们恒有 $K_0=1$ 而且只用 $a_0=b_0=1$ 的 a,b 代入. 以后我们不再明显地提出这一假设.

研究乘法序列的关键如下: 当然, x_i 都是 Pontrjagin 类, 如果我们停止在 n, 则可以把全 Pontrjagin 类表示成一形式乘积

$$1 + x_1 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n}(1 + t_i),\ \deg t_i = 1.$$

这引导我们考虑环 $R[t]$, 其中 $\deg t=1$. $R[t]^1$ 中的元就是形式幂级数

$$f(t) = 1 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \cdots + \lambda_n t^n + \cdots,\ \lambda_i \in R.$$

特别是 $1+t\in R[t]^1$, 而我们有

$$K(1 + t) = f(t) \in R[t]^1.$$

我们称 $f(t)=K(1+t)$ 为 K 的示性级数并有

定理 (Hirzebruch) 乘法序列由其示性幂级数决定. 任意形式幂级数均为某乘法序列的示性幂级数. 故研究乘法序列就是研究形式幂级数.

证 令 K 为一乘法序列. 固定 n 并作嵌入

$$R[x_1,x_2,\cdots,x_n]\subset R[t_1,t_2,\cdots,t_n]$$

即令

$$x_i \longmapsto t_1,\ \cdots,\ t_n \text{ 的第 } i \text{ 个初等对称函数}.$$

换言之,

$$a = 1 + x_1 + \cdots + x_n = \prod_{i=1}^{n}(1 + t_i).$$

但显然当 $i\leqslant n$ 时, $K_i(a)=K_i(x)$. 因为

$$K(a) = K\Big(\prod_{i=1}^{n}(1 + t_i)\Big) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i),$$

故 K 由 f 决定. 反之若给定 f, 上式右方显然是一对称函数, 所以可当 $j\leqslant n$ 时定义

$$K_j(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \prod_i f(t_i) \text{ 中次数为 } j \text{ 的部分.} \qquad (*)$$

与此等价地，记

$$f(t) = 1 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \cdots + \lambda_n t^n + \cdots$$

对分划 $I=(i_1,\cdots,i_k)$，令

$$\lambda_I = \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_k}$$

并且定义

$$K_j(x_1,\cdots,x_j) = \sum_I \lambda_I S_I(x_1,\cdots,x_j), \qquad (**)$$

这里是对 j 的一切分划求和. 于是 K 的乘法性质将是上节命题的容易的推论. 当然由定义(*)也可得到乘法性质.

已给一乘法序列 $K=(K_n(x_1,\cdots,x_n))$，例如设其系数是有理数，则它定义一线性映射称为 K-亏数：

$$K: \quad \Omega\otimes\mathbf{Q}\to\mathbf{Q}$$

$$[M]\longmapsto\langle K(p(M)),[M]\rangle=K(M).$$

更准确些，若 $\dim M\not\equiv 0 \mod 4$，则令 $K(M)=0$，$\dim M=4k$ 时

$$K(M) = \langle K_k(p_1(M),\cdots,p_k(M)),[M]\rangle.$$

这当然与 Pontrjagin 数是一样的. 现在还多一性质，即若 K 是乘法的，K-亏数是一环同态. 故为计算 K，并不需要其在矢量空间生成元 $\mathbf{CP}^I$ 上之值. 只需它在环生成元 $\mathbf{CP}^{2k}$上之值即可. 表示指标函数 I 的乘法序列 L 称为 Hirzebruch L-亏数. 现计算其示性幂级数. 令 $f(t)=L(1+t)$为其示性幂级数，我们有

$$p(\mathbf{CP}^{2k}) = (1 + a^2)^{2k+1},$$

$a\in H^2(\mathbf{CP}^{2k})$. 故有

$$L(\mathbf{CP}^{2k}) = \langle f(a^2)^{2k+1},[\mathbf{CP}^{2k}]\rangle.$$

另一方面，我们有 $I(\mathbf{CP}^{2k})=1$. 故级数 $f(t)$应有以下性质，即由计算 a^{2k}的系数有

$$L_1 = \frac{1}{3}p_1, L_2 = \frac{1}{9}p_2 - \frac{1}{45}(p_1^2 - 2p_2) = \frac{1}{45}(7p_2 - p_1^2),$$

和前面的结果一样.

我们已经注意到，Hirzebruch 指标定理有两个值得注意的结论. 一方面它表明，流形 M 的 L-亏数 $L(M)$ 尽管是用 M 的 Pontrjagin 类来定义的，其实只是一个同伦不变量. 另一方面，$L(M)$ 由定义是有理数，最终得知它是整数确实很不简单. 如果认为第一个结论很弱甚至是否定的，那就太天真了. 如果会灵活地应用它将得到很不可思议的结果，这一点下节就会看到.

§4. Milnor 的怪球

本节中我们要讲 Milnor 的一个例子[2]，即一流形 M 同胚但不微分同胚于一 7 维球面 S^7. 你们还记得，只要定义了这两个概念那么就可在任意范畴中提出这个一般问题. 我们肯定希望迟早能找到互相同胚而不微分同胚的流形. 在复流形范畴中，我们一上来就找到了这样的例(见第一章)，以后就再不提了. 在光滑范畴中就需要等得很久了，因为直到现在各种工具才准备就绪. 甚至这样，做起来也很不容易（我们还不能把一切都说清楚）. 它涉及非常独特的思想，使它成为当代数学的突出贡献. 所谓“标准”球面 S^n 即指 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$$

而且赋有作为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的子流形而得的光滑构造. “光滑”一语即指这一构造. 我们想作一 7 维流形 M 作为一个拓扑空间同胚于 S^7 但作为一微分流形不微分同胚于它. 这种流形称为“怪球”(exotic).

我们先描述用以区分光滑构造的不变量. 这就是示性类. 这似乎有些奇怪，因为我们迄今所做的一切都涉及说它们不够精密的结果. 更奇怪的是我们从球面开始，而它是没有示性类的. 令 M 为同胚于 S^7 的流形，因其维数不对所以没有 Pontrjagin 数. 故在 $\Omega\otimes\mathbf{Q}$ 中配边 $[M]=0$. 我们想把它强化为在 Ω 中 $[M]=0$. C. T. C. Wall 有一定理指出，若 M 的一切 Stiefel-Whitney 数均为 0，则确实如此. 对 S^7 我们知道，因其切丛稳定平凡，即 $TS^7\oplus\varepsilon=\varepsilon^8$

故没有 Stiefel-Whitney 类. 对 M 则不知道是否如此. 但吴文俊的定理指出 Stiefel-Whitney 类是同伦不变量. 所以仍可以说 M 没有 Stiefel-Whitney 类，也没有 Stiefel-Whitney 数. 这样我们得一 8 维紧可定向流形 W 使 $\partial W=M$ (即 ∂W 连同其得自 W 的光滑构造微分同胚于 M). 按我们的作法，这样的 W 是自然得出的，但我们需要以上的一般论证以作出我们的不变量.

首先，和无边缘情况一样，W 有上积形式

$$H^4(W, M) \times H^4(W, M) \to \mathbf{Q},$$
$$(u, v) \longmapsto \langle u \smile v, [W, M]\rangle.$$

也如无边缘情况一样，Poincaré 对偶性指出它是非奇异的. 故有 W 的指标 $I(W)$. 当然也有 Pontrjagin 类 $p(W)\in H^*(W)$. 但不能算出它在基本类上之值，因$[W,M]\in H_*(W,M)$. 由上同调序列

$$0 = H^3(M) \to H^4(W,M) \xrightarrow{j^*} H^4(W) \to H^4(M) = 0$$

知 j^* 是同构. 所以有唯一的类 $q_1(W)\in H^4(W,M)$使 $j^*(q_1)=p_1(W)$. 今定义一整数 $\lambda(W)=2\langle q_1(W)^2,[W,M]\rangle - I(W) \bmod 7$. 这样定义的理由是

引理 $\lambda(W)$独立于流形 W，故可记它为 $\lambda(M)$.

有一立即的推论：若 $\lambda(M)\neq 0$，则 M 将不微分同胚于 S^7. 因为对于 S^7 可取 $W=D^8$，从而 $\lambda(S^7)=0$.

证明是同调论的简单练习. 令 W_1, W_2 是两个可定向流形且 $\partial W_1=\partial W_2=M$. 将 W_1, W_2 沿 M 连接起来. $W=W_1\cup W_2$ 显然是无边流形，可给 W 以定向使之与 W_1 之定向相同而与 W_2 的相反. 现有以下的 Mayer-Vietoris 序列

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & & & & H^i(W_1\cap W_2, M) \simeq 0 & & \\
\| & & & & \uparrow & & \\
H^{i-1}(W_1\cap W_2, M) & \longrightarrow & H^i(W, M) & \xrightarrow{\varphi^*} & H^i(W_1, M)\oplus H^i(W_2, M) & & \\
& & \swarrow j^* & & \swarrow j^* & & \swarrow j^* \\
\longrightarrow H^{i-1}(M) & \longrightarrow & H^i(W) & \xrightarrow{\psi^*} & H^i(W_1)\oplus H^i(W_2) & \longrightarrow & H^i(M).
\end{array}$$

取 $i=4$ 与 8，可见 $H^4(W,M)$ 可分解为正交和 $H^4(W_1,M)\oplus H^4(W_2,M)$. 所以

$$I(W)=I(W_1)-I(W_2). \tag{1}$$

负号来自关于定向的规定. 自然性说明

$$\psi^*(p_1(W))=p_1(W_1)\oplus p_1(W_2).$$

当 $i=4$ 时上图表明有唯一 $q_1(W,M)=q_1\in H^4(W,M)$ 使

$$\varphi^*(q_1)=q_1(W_1,M)\oplus q_1(W_2,M),\ j^*(q_1)=p_1(W).$$

在同调上也有一图式

$$\begin{array}{ccc} H_8(W_1,M)\oplus H_8(W_2,M) & \xrightarrow{\varphi_*} & H_8(W,M) \\ & & \uparrow{\scriptstyle j_*} \\ & & H_8(W). \end{array}$$

由我们关于定向的规定，并考虑到三角剖分，有

$$\varphi_*([W_1,M]-[W_2,M])=j_*(W).$$

这就给出

$$\begin{aligned}\langle p_1(W)^2,[W]\rangle &= \langle j^*(q_1)^2,[W]\rangle=\langle q_1^2,j_*[W]\rangle \\ &= \langle q_1^2,\varphi_*([W_1,M]-[W_2,M])\rangle \\ &= \langle \varphi^*q_1^2,[W_1,M]-[W_2,M]\rangle \\ &= \langle q_1(W_1,M)^2,[W_1,M]\rangle \\ &\quad -\langle q_1(W_2,M)^2,[W_2,M]\rangle. \end{aligned} \tag{2}$$

下面讲到巧妙的部分. 因 W 是 8 维无边流形，可以应用 Hirzebruch 指标定理，此定理指出

$$I(W)=\frac{1}{45}\langle 7p_2(W)-p_1(W)^2,[W]\rangle$$

为整数. 故

$$45I(W)+\langle p_1(W)^2,[W]\rangle\equiv 0 \mod 7.$$

乘以 2，注意到 $90\equiv -1 \mod 7$，由(1)，(2)即得引理.

注意，不变量 $\lambda(W_1)-\lambda(W_2)=\lambda(M)$ 不涉及 $p_2(W_1)$ 与 $p_2(W_2)$. 这是关键之点. 当然我们一直在找与 W_1 无关的东西. 可以用

$I(W_1)$ 与 $p_1(W_1)$，因为它们都是加法的(见(1)与(2))．但对 W_2 则不如此．事实上 $H^8(W_1)=0$ 但 $H^8(W)$则不然．故用 Hirzebruch 公式以消去 $p_2(W)$．所幸公式中其系数为 7，这才能用 mod 7．若此系数为 1，就应当用 mod 1，也就没有不变量了．

现在找一 7 维流形 M 使 $\lambda(M)\neq 0$．它依赖于有某个辛群的矢量丛．所以先讲一些关于辛示性类的知识．令 Q 为四元数体．单位四元数之集

$$S^3=\{x\in Q\,|\,|x|=1\}$$

称为辛群 Sp(1)．S^3 在单位球面 $S^{4n+3}\subset Q^{n+1}$ 上之右乘是一自由作用，其轨道空间 $S^{4n+3}/S^3=QP^n$ 称为四元数 n 维射影空间．和 $G=Z_2$，$G=S^1$ 的情况一样，"望远镜并"(telescopic union)

$$\begin{array}{ccccccccc} S^7 & \subset S^{11} & \subset\cdots & \subset S^{4n+3} & \subset\cdots & \subset S^{\infty} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ QP^1 & \subset QP^2 & \subset\cdots & \subset QP^n & \subset\cdots & \subset QP^{\infty} \end{array}$$

给出万有 S^3-丛其分类空间为 $BS^3=QP^\infty$．由纤维化 $S^\infty\to QP^\infty$ 的 Gysin 序列并记住纤维球面是 S^3，可得

$$H^*(BS^3,Z)=Z[t],\quad \deg t=4,$$

$t\in H^4(QP^\infty;Z)=H^4(QP^n;Z)$是一生成元而可适当选取．这就是辛示性类．至此它与 Z_2，S^1 完全一样，却有一基本的区别．S^3 不是 Eilenberg-MacLane 空间，所以辛示性类不能将主 S^3-丛分类．

和实、复情况一样，S^3 在 Q 上的乘法定义了四元数线丛．然而因 Q 与 R，C 不同是不可交换的，故有两种不同的四元数线丛，一种是通常的左乘作用

$$S^3\times Q\to Q,\quad (g,x)\longmapsto gx\quad (x\in S^3,g\in Q),$$

另一种是"共轭"作用

$$S^3\times Q\to Q,\quad (g,x)\longmapsto x\bar{g}\quad (x\in S^3,g\in Q)$$

(注意$\overline{\alpha+i\beta+j\gamma+k\delta}=\alpha-i\beta-j\gamma-k\delta$，$\overline{g_1g_2}=\bar{g}_2\bar{g}_1$，上面的定义才是合法的)．具有左作用的万有线丛 $\gamma=S^\infty\times_{S^3}Q$ 和第二种作用的共

轭线丛 $\bar{\gamma}$ 由定义均有示性类 t，因其主丛相同. 我们要证明，作为实矢量丛来看它们是不同的. 首先回忆一下我们已算出了嵌入 $S^1\subset S^3$（由 $\mathbf{C}\subset Q$ 所诱导. $S^1\subset S^3$ 其实是 S^3 的极大环面）诱导出

$$H^*(BS^3)\to H^*(BS^1),\quad t\longmapsto a^2.$$

$a\in H^2(BS^1)$ 是典则生成元. 因 $Q=\mathbf{R}^4$ 是一实矢量空间，任一四元数线丛均可看作一实矢量丛. 更确切些说，$L_g: x\longmapsto gx$ 是一实线性映射因为实数与四元数可交换. 映射

$$L: S^3\to SO(4),\quad g\longmapsto L_g$$

是一个表示，它定义 γ 为一 $SO(4)$-丛. 这样，它有两个 $SO(4)$ 示性类，即第一 Pontrjagin 类 p_1 和 Euler 类 χ. 为计算它们，注意若将 L 限制到极大环面 $S^1\subset S^3$ 上，Q 分解为两个不变子空间 $\langle 1,i\rangle=V_1$，$\langle j,k\rangle=V_2$. 在 V_1 上 S^1 的作用具有标准的权

$$x:\quad S^1\to S^1,\quad z\longmapsto z,\quad z=a+bi,$$

即 $z\cdot 1=a+bi$ 和 $zi=-b+ai$ 可用矩阵 $\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ 表示. 类似地在 $\langle j,k\rangle=V_2$ 上有 $z\cdot j=(a+bi)j=aj+bk$，$z\cdot k=(a+bi)k=-bj+ak$ 也可用矩阵 $\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ 表示. 在以下图式中

$$\begin{array}{ccc} H^*(BSO(4)) & \xrightarrow{L^*} & H^*(BS^3)\\ \downarrow i^* & & \downarrow i^*\\ H^*(BT) & \xrightarrow{L^*} & H^*(BS^1), \end{array}$$

$T\subset SO(4)$ 是 V_1,V_2 上的旋转所定义的极大环面，以上的计算表明

$$L^*(p)=(1+x^2)^2,$$
$$L^*(\chi)=x^2.$$

因为 $i^*(t)=x^2$ 是单射，我们有

$$\begin{cases} p_1(\gamma)=2t,\\ \chi(\gamma)=t. \end{cases}\tag{1}$$

对于共轭表示

$$\bar{L}: \quad S^3 \to SO(4), \quad g \longmapsto \bar{L}_g(x) = x\bar{g},$$

我们有

$$1 \cdot \bar{z} = a - bi,$$

$$i \cdot \bar{z} = i(a - bi) = b + ai.$$

现有负权 $-x$. 但是

$$j \cdot \bar{z} = j(a - bi) = aj + bk.$$

$$k \cdot \bar{z} = k(a - bi) = -bj + ak$$

之权仍为 x. 故知

$$\begin{cases} p_1(\bar{\gamma}) = 2t \text{ 和前面一样,但} \\ \chi(\bar{\gamma}) = -t. \end{cases} \tag{2}$$

和实、复线丛一样,对四元数线丛也有张量积运算. 它是四元数体上的张量积,故两个四元数线丛 E,F 之张量积仍是四元数线丛. 为把它与 R、C 上之张量积区别开来,我们将它记作 $E\otimes_Q F$. 和前面一样,$E\otimes_Q F$ 之迁移函数若用 E 与 F 之迁移函数

$$\varphi_{ij}: U_i \cap U_j \to S^3, \quad \psi_{ij}: U_i \cap U_j \to S^3$$

来表示,将为

$$\varphi_{ij}\otimes\psi_{ij}: U_i \cap U_j \to S^3,$$

$$b \longmapsto \varphi_{ij}(b)\psi_{ij}(b).$$

(所以现在次序很重要). 张量积和前面一样定义一个映射

$$\varphi: BS^3 \times BS^3 \to BS^3,$$

由此可以算出

$$t(E\otimes_Q F) = t(E)\otimes 1 + 1\otimes t(F), \tag{3}$$

$$\chi(E\otimes_Q F) = \chi(E)\otimes 1 + 1\otimes \chi(F). \tag{4}$$

现在可以描述流形 M 了. 令 $E = S^7 \times_{S^3} Q \to QP^1$ 为万有丛 γ 在 $QP^1 \subset QP^\infty$ 上的限制,$\bar{E}$ 是 $\bar{\gamma}$ 在 QP^1 上的限制. 对每一对整数 (h,j) 令

$$E(h,j) = (\underbrace{E\otimes_Q \cdots \otimes_Q E}_{h\text{个}}) \otimes (\underbrace{\bar{E}\otimes_Q \cdots \otimes_Q \bar{E}}_{j\text{个}}).$$

令 $B(h,j)$ 为相应的球体丛,$M(h,j)$ 为相应的球面丛. $M = M(h,j)$ 即所求的流形. 当然,(h,j) 应适当选取但首先 $M(h,j) = \partial B(h,j)$ 是

一边缘(有定向)且 $\dim M(h,j)=7$. 首先的考虑是使 $M(h,j)$成为一球面,由已作的运算我们见到

$$\begin{aligned} p_1(E(h,j)) &= 2(h+j)t, \\ \chi(E(h,j)) &= (h-j)t, \end{aligned} \qquad t \in H^4(QP^1).$$

球丛的 Gysin 序列有这样的一部分

$$\cdots \to H^0(QP^1) \to H^4(QP^1) \to H^4(M) \to H^1(QP^1)=0,$$
$$1 \longmapsto (h-j)t.$$

由此知 $H^4(M(h,j))=0$ iff $h-j=1$. 事实上,易见只要 $H^4(M)$是对的,则至少 $H^*(M(h,j))=H^*(S^7)$是对的. 所以我们第一个需要的条件是

$$h-j=1. \tag{$*$}$$

现计算 $\lambda(M)$. 为此我们当然取 $W=B(h,j)=B$. 我们需要知道 B 的切丛. 因为本质上:$B\subset E=E(h,j)$是一个开流形,我们来看 E. 有零截面 ρ:

$$QP^1 \xrightarrow{\rho} A \xrightarrow{i} E, \quad i = \text{嵌入}, A = \operatorname{Im}\rho.$$

我们有

$$i^*(T(E)) = T(A) \oplus \nu(A,E).$$

$\nu(A,E)$是 A 在 E 中的法丛. 显然 $\nu(A,E)=\pi^*(E)$就是丛 $E\xrightarrow{\pi}QP^1$ 本身(提升到 A 上). 我们以后将见到 $QP^1=A=S^4$ 是一个四维球面. 所以

$$p_1(B) = i^*(p_1(T(E))) = p_1(\nu(A,E)) = \pi^*(2(h+j)t).$$

图式

$$\begin{array}{ccc} H^4(B,M) & \xrightarrow[\sim]{j^*} & H^4(B) \\ \uparrow{\scriptstyle \pi^*} & & \uparrow{\scriptstyle \pi^*} \\ H^4(QP^1,*) & \xrightarrow{\sim} & H^4(QP^1) \end{array}$$

表明

$$q_1(B,M) = (j^*)^{-1}(p_1(B)) = \pi^*(2(h+j)t).$$

至于指标 $I(B)$，由 Thom 同构我们有

$$H^0(QP^1)\xrightarrow{\varphi}H^4(B,M),1\longmapsto \iota.$$

它表明 $I(B)=1$ 而且

$$\langle q_1^2,[B,M]\rangle = 4(h+j)^2.$$

令 $h+j=k,M(h,j)=M_k$，由此我们有

$$\lambda(M_k) = 8k^2-1 \mod 7.$$

所以我们应取 (h,j) 使得 $h-j=1$ 且

$$8(h+j)^2-1\not\equiv 0 \mod 7.$$

例如可取 $h=2,j=1,k=3$.

我们还要证明 M_k 同胚于 S^7. 这就需要做更多的事. 我们至少已经证明 M_k 的同调是对的，我们也就到此为止.

以上的作法虽然十分漂亮，也还是拼凑起来的. 以后 Milnor 和 Kervaire 的工作使我们系统地了解了一切同胚于球面的流形. 他们的工作的漂亮和深度标志了流形理论最新发展的一个光辉的高峰.

参 考 文 献

[1] Milnor, J. and Stasheff, J., Characteristic classes, *Ann. of Math. Studies*, No. 76, Princeton Univ. Press, 1974.

[2] Milnor, J., On manifolds homeomorphic to the 7-spheres, *Ann. of Math.*, Vol. 64(1956), 399—405.

第十七章　Laplace 方程和 Hodge 理论

§1. 偏微分方程（PDE）概况

从 Milnor 的例可以看到，对于 Hirzebruch 指标定理之极大重要性，无论就其基本思想或表述方式，都没有问题了．它的意义主要在于它揭示了两个似乎没有什么关系的领域之间的既不明显又不简单的联系．在数学中，其实在一般科学里也一样，一旦发现了这样的现象，就会有新的见地和前景．这是很常见的事．这一方面，我们才得到的 Hirzebruch 指标定理只是一个开始．因为我们将要看到，流形的指标另有解释并将导致更深远的结论．这一次将在相差更远的对象即指标和 Laplace 方程间建立联系，最终导致椭圆算子的所谓 Atiyah-Singer 指标理论．我们在这本讲义中希望解释的归结起来几乎也就是它．但要走的路还长，所以我们先从调和函数的基本事实开始．

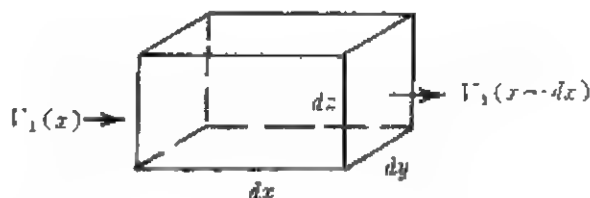
记住，定义在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的区域 D 上的实值或复值函数 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)$ 称为调和函数，如果它在 D 中满足所谓 "Laplace" 方程

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}=0.$$

这是一类重要的函数，因为它在物理中时常出现．流体力学是一个典型例子．下面是数学物理教本中的讲法．设空间中充满不可压缩流体，即设其密度 ρ 为常数．令 $\vec{V}=(V_1, V_2, V_3)$ 为速度矢量场，即 $\vec{V}=\vec{V}(x,y,z)$ 是描述各点速度的矢量值函数．我们设讨论

的是定常态，从而$\vec{V}(x,y,z)$不随时间t而变但是是位置变元.(x, y, z)的函数. 现在讨论三边为dx, dy, dz的无穷小长方体. 在dt时间区间中，从右方流出该体的质量是

$V_1(x+dx,y,z)dydz\cdot\rho dt.$



同一时间内从左侧流入的质量则是

$V_1(x,y,z)dydz\cdot\rho dt.$

x方向的净流出量是

$$[V_1(x+dx,y,z)-V_1(x,y,z)]dydz\cdot\rho dt=\frac{\partial V_1}{\partial x}dxdydz\cdot\rho dt.$$

而单位时间内从单位体积内的总流出量应是

$$\frac{\partial V_1}{\partial x}+\frac{\partial V_2}{\partial y}+\frac{\partial V_3}{\partial z}=\mathrm{div}\vec{V}\qquad(\text{设 }\rho=1).$$

若在区域D中没有源，质量就不会有净增减，于是我们得到“连续性方程”

$$\mathrm{div}\vec{V}=0.$$

如果再设矢量场$\vec{V}$可以用势函数$f=f(x,y,z)$表示，即设f是一标量函数且使

$$\vec{V}=\mathrm{grad}f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

连续性方程就成了 Laplace 方程 $\Delta f=0$.

类似地，在电磁学中也有真空的连续性方程

$$\mathrm{div}\vec{E}=0,\qquad \mathrm{div}\vec{H}=0,$$

$\vec{E}$和$\vec{H}$分别是场的电场和磁场强度. 于是势函数又将满足 Laplace 方程. 所以，Laplace 方程是势论的基础.

从偏微分方程（以后都采用标准的缩写 PDE）观点看来，Laplace 方程是所谓椭圆型方程. 读者可能熟悉 PDE 按型的分类及其含义. 虽然这里不能详谈，我们确实需要懂得椭圆性的概念及其直接的推论. 所以我们将就更简单的二维情况回顾一些基本的

事实．一般的两变量二阶线性 PDE 可写成

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu+G=0,$$

系数 A，B，…，G 都是 x，y 的函数，并设有一定的光滑性．因为我们最终将在光滑流形上讨论问题，所以我们总设它们是 C^∞ 函数．不论是谁，一看见这个方程就会想到一般圆锥曲线的方程

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+G=0$$

（没有 F 项）．由解析几何可知可用平移与旋转将它化为"标准形"．平移是用来除去一次项，不那么要紧．重要的是最高次项 A，B，C．最关键的不变量是判别式 $\Delta=B^2-AC$，视其<0，$=0$，>0 而得椭圆、抛物线与双曲线．我们对 PDE 也想作这件事．当然我们不会得出这些曲线．但若可作类似的化为标准形，则将使方程简化．例如，Laplace 方程显然是椭圆型方程的标准形．对于 PDE，情况当然比对圆锥曲线复杂，因为系数 A，B，C 是函数而非常数．这意味着简单地作坐标旋转或线性变换是没有用的．我们必须准备用一般的微分同胚来变换坐标，在流形上这样作恰好是件好事．我们也应指出，方程的型各点可以不同，因为 Δ 是函数．但至少对椭圆和双曲情况，型是局部固定的．我们将只考虑具有最高阶项即"主部"的方程以求简化，于是考虑

$$Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}=0 \tag{1}$$

（当然采用了标准的简写如 $u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 等等）．结果发现几何上最清楚的情况是双曲方程，故设在定点 $P_0=(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$ 附近 $\Delta>0$．我们心目中的标准形是 $u_{xy}=0$（相应于双曲线 $xy=1$）．设 A，C 尚不为 0，例如 $C\neq0$．设用微分同胚 Φ 作坐标变换

$$(x,y)\stackrel{\Phi}{\longmapsto}(\xi,\eta)$$

直接计算可知 $v=v(\xi,\eta)=u(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))=u\circ\Phi^{-1}$ 满足方程

$$\overline{A}v_{\xi\xi}+2\overline{B}v_{\xi\eta}+\overline{C}v_{\eta\eta}=0, \tag{1$'$}$$

其中

$$\bar{A}=A\xi_x^2+2B\xi_x\xi_y+C\xi_y^2,$$
$$\bar{B}=A\xi_x\eta_x+B(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+C\xi_y\eta_y, \tag{2}$$
$$\bar{C}=A\eta_x^2+2B\eta_x\eta_y+C\eta_y^2.$$

故设法求函数 ξ，η 使 $\bar{A}=\bar{C}=0$. 顺便说一下，易见

$$\bar{\Delta}=\bar{B}^2-\bar{A}\,\bar{C}=(B^2-AC)(\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x)^2=\left|\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right|^2\Delta. \tag{3}$$

因 Φ 是微分同胚，Jacobi 行列式 $\left|\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right|\neq 0$. 又因 (3) 中出现平方，故知 PDE 在一点的型在微分同胚下不变.

回到方程 $\bar{A}=\bar{C}=0$. 因 Φ 为微分同胚且 $C\neq 0$，必有 $\xi_x\neq 0$，否则会有 $0=C\xi_y^2\Rightarrow\xi_y=0$ 而 Φ 不是微分同胚. 令 $\lambda=\xi_y/\xi_x$，我们有

$$A/C+2B/C\ \lambda+\lambda^2=0.$$

因已设 $\Delta>0$，上述二次方程可以分解因式为

$$(\lambda-W_1)(\lambda-W_2)=0$$

这里

$$W_1=(B+\sqrt{\Delta})/C,\quad W_2=(B-\sqrt{\Delta})/C. \tag{4}$$

注意方程 $\bar{C}=0$ 和 $\bar{A}=0$ 是一样的. 这样，只要找到 ξ, η 使

$$\xi_y-W_1\xi_x=0,\quad \eta_y-W_2\eta_x=0, \tag{5}$$

且 $\left|\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right|\neq 0$ 即可达到目的.

有幸的是我们已有了处理 (5) 的必要工具. 考虑 $\mathbb{R}^2$ 上的矢量场 $X=X(x,y)=(W_1(x,y),-1)$. 因为 X 显然在 P_0 附近(其实处处都是)非零. 由 Frobenius 定理的第一个情况（第四章），有一新坐标 (p, q) 使 X 在其中可表为$\frac{\partial}{\partial p}$. 回顾一下矢量场分量的变换公式. 若

$$X=W_1\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}=\alpha\frac{\partial}{\partial p}+\beta\frac{\partial}{\partial q},$$

则

$$\alpha=W_1\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\ ,\ \ \beta=W_1\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial q}{\partial y}.$$

所以 $X=\frac{\partial}{\partial p}$就意味着 $\beta=0$ 亦即

$$\frac{\partial q}{\partial y}-W_1\frac{\partial q}{\partial x}=0, \tag{6}$$

即 $q=q(x,y)$满足(5)中之一. 类似于此,也有一个坐标(r,s)使得 $Y=(W_2,-1)$等于 $\partial/\partial r$. 于是函数 $s=s(x,y)$满足方程

$$\frac{\partial s}{\partial y}-W_2\frac{\partial s}{\partial x}=0.$$

余下的只需检验

$$(x,\ y)\stackrel{\Phi}{\longmapsto}(q(x,y),s(x,y))$$

是否局部微分同胚. 但我们有

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y}\\ \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y}\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)\begin{vmatrix}1 & -W_1\\ 1 & -W_2\end{vmatrix}.$$

我们必有$\frac{\partial q}{\partial x}\neq 0$. 否则由（6）有$\frac{\partial q}{\partial y}=0$ 而（x, y）$\longmapsto$（p, q）不会是微分同胚. 类似地$\frac{\partial s}{\partial x}\neq 0$. 最后，由假设

$$\begin{vmatrix}1 & -W_1\\ 1 & -W_2\end{vmatrix}=W_1-W_2=2\sqrt{\Delta}/C\neq 0.$$

至此完成. 将

$$Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}=0 \tag{*}$$

用一微分同胚（x, y）$\longmapsto$（ξ, η）化为

$$V_{\xi\eta}=0 \tag{**}$$

好处是明显的. 可以直接写出（* *）之解其形为

$$v(\xi,\eta)=f(\xi)+g(\eta), \tag{7}$$

$f(\xi)$和 $g(\eta)$是 ξ 和 η 的一元函数. 正是为此我们宁用（* *）而不用“另一个”标准形式

$$u_{xx}-u_{yy}=0. \tag{***}$$

当然可以由（* *）变为（* * *）或反过来，只需用下面的坐

标变换即可

$$\xi=x+y, \quad \eta=x-y.$$

标准形（7）不但使我们能得出（1）之解，且能容易地讨论解的唯一性．例如在矢量场即常微分方程情况，我们知道只要知道起始点 $u(0)=P_0$ 即可决定解 $u(t)$．现在它显然不对了．指定一个初始点 $v(\xi_0,\eta_0)$ 只能确定 $f(\xi)$，$g(\eta)$ 在一点之值 $f(\xi_0)$，$g(\eta_0)$．在物理上习惯讨论"初始函数" $u_0(x)=u(x,0)$，这里变量 y 代表时间．因为 PDE 是二阶的，还需要指定初速 $u_y(x,0)$．几何上说，就是要有一个流形 $M=\{(x,y)\mid y=0\}$ 而不止是一个点使 u 及其沿法线方向的导数在 M 上之值是事先给定的．后一条件并不奇怪．因为若 u 在 M 上之值已知，则也知道 u 沿切线方向的导数在 M 上之值．所以根本上说是要确定 u 及其一阶导数在初始子流形 M 上之值．很清楚，没有理由限制 M 只能是 x 轴．我们应该可取任意子流形为 M．（可以加一个限制．因为我们要求的是在 P_0 附近的局部解，我们显然应要求 M 含有 P_0．）有意思的就在这里．这里我们并不完全自由．如果想初始数据（u 及其导数在 M 上之值）完全自由，M 就不能完全任意．反过来也一样．这很容易理解．例如若取 M 为曲线 $M=\{(x,y)\mid\xi(x,y)=0\}$，则由(7)有

$$v(0,\eta)=f(0)+g(\eta),$$

$$v_\xi(0,\eta)=f_\xi(0).$$

故法向导数沿 M 之初始值不变．这样，对于双曲型方程，过任一定点可以分出两曲线 $\xi(x,y)=0$ 与 $\eta(x,y)=0$ 在其上不能自由指定初始值．由此，称它们为方程的**特征子流形**．

特征子流形问题是 PDE 分类的本质．对这种子流形 $M=\{(x,y)\mid\xi(x,y)=0\}$，$(\xi_x,\xi_y)$ 是其法向量，它满足方程

$$A\xi_x^2+2B\xi_x\xi_y+C\xi_y^2=0.$$

由于 $\Delta>0$，它有两个相异解．故抛物型方程只有一个特征子流形，椭圆型方程则**没有**．因为特征子流形在初始值上限制了我们的手脚，所以没有最好．

在结束双曲型方程前，必须再提一个重要例子，必须讲 Maxwell 方程组. 记住我们已经讲过其中两个，即真空中的 $\operatorname{div}\vec{E}=\operatorname{div}\vec{H}=0$. 它们只不过是守恒律而不是真正重要的. 另外两个大家知道是讲电磁感应的（即 Faraday 定律）才是真正本性为动力学的方程. 在无源情况下这就是

$$\operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t},\quad \operatorname{rot}\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

将第二个方程对 t 求导再以第一个代入即有

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E}.$$

但是容易验证

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E}-\Delta\vec{E}$$

（$\Delta\vec{E}=(\Delta E_1,\ \Delta E_2,\ \Delta E_3)$）. 再由 $\operatorname{div}\vec{E}=0$ 即得

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\Delta\vec{E}.$$

为简单计，考虑一维情况，即 $\vec{E}=E_1(x,t)$（记作 $E(x,t)$），有

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}=0.$$

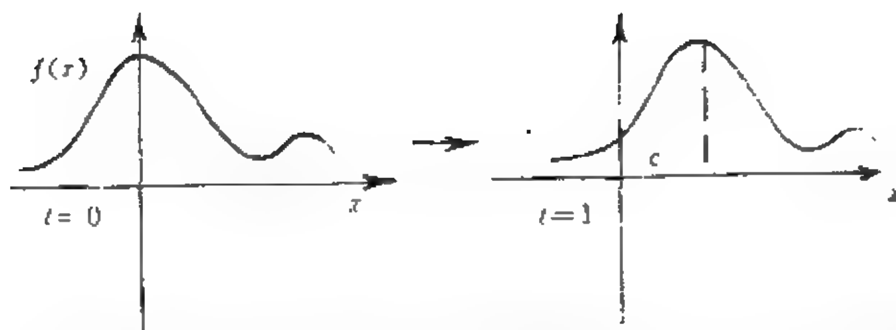
它又是一个双曲型方程，其特征子流形是

$$\xi=x-ct=\text{const},\quad \eta=x+ct=\text{const}.$$

按前面的讨论，它的通解是

$$E=f(x-ct)+g(x+ct).$$

看一下 $g=0$ 的情况，$f(x-ct)$ 显然是波形为 f 且以速度 c 向右行进的“波”. 因为 $t=0$ 不是特征，波形 f 可以是任意的. 这是一个真正的历史的记录，即在实验上真正观察到电磁波以前就这样在纸上找到了. 我们提这件事只是希望读者注意，在科学上对什么是理论的、抽象的，什么又是有用的、实在的，不要持独断的态度. 归根结蒂，不必争论什么是“纯粹的”，什么是“应用的”以



及哪一个更好．真正的问题在于思想和洞察力．有了这些就会有好的数学．

现在回到化标准形问题．现在设方程

$$Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}=0 \tag{8}$$

是椭圆的．我们想作坐标变换使得

$$\overline{B}=A\xi_x\eta_x+B(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+C\xi_y\eta_y=0. \tag{9}$$

这样作并不难．因为 $\Delta=B^2-AC<0$，必有 $A\neq 0$，$C\neq 0$．和前面一样可以找到函数 ξ，η 使

$$\xi_y-\widetilde{W}_1\xi_x=0,\quad \eta_y-\widetilde{W}_2\eta_x=0, \tag{10}$$

这里

$$\widetilde{W}_1=(-B+\sqrt{-\Delta})/C,\quad \widetilde{W}_2=(-B-\sqrt{-\Delta})/C.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\overline{B}&=\xi_x\eta_x[A+B(\widetilde{W}_1+\widetilde{W}_2)+C\,\widetilde{W}_1\,\widetilde{W}_2]\\&=\xi_x\eta_x[A-2B^2/C+(B^2+\Delta)/C]\\&=\xi_x\eta_x[(\Delta-\Delta)/C]=0.\end{aligned}$$

此外，还有

$$\begin{aligned}\overline{A}&=\xi_x^2[A+2B\,\widetilde{W}_1+C\,\widetilde{W}_1^2]\\&=\xi_x^2[AC+2B(-B+\sqrt{-\Delta})+B^2-2B-\sqrt{-\Delta}]/C\\&=(-2\Delta/C)\xi_x^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{C}&=\eta_x^2[A+2B\,\widetilde{W}_2+C\,\widetilde{W}_2]\\&=\eta_x^2[AC+2B(-B-\sqrt{-\Delta})+B^2-\Delta+2B\sqrt{-\Delta}]/C\end{aligned}$$

$$=(-2\Delta/C)\eta_x^2.$$

所以（8）可以化为

$$(\xi_x^2)v_{\xi\xi}+(\eta_y^2)v_{\eta\eta}=0.$$

因右方为 0，上式似乎还可改进为

$$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}=0,$$

即椭圆方程除相差一微分同胚外通有地实为 Laplace 方程. 这确实为真，但不太简单. 我们解释如下：我们想证的除 $\overline{B}=0$ 外还希望能有

$$\overline{A}=A\xi_x^2+2B\xi_x\xi_y+C\xi_y^2=A\eta_x^2+2B\eta_x\eta_y+C\eta_y^2=\overline{C}. \tag{11}$$

（9）式可写为

$$0=\overline{B}=\xi_x(A\eta_x+B\eta_y)+\xi_y(B\eta_x+C\eta_y)$$

亦即

$$\xi_x/(B\eta_x+C\eta_y)=-\xi_y/(A\eta_x+B\eta_y)=\lambda.$$

以此代入(10)可以算出 $\lambda=1/\sqrt{-\Delta}$. 所以有

$$\begin{aligned}\xi_x&=(B\eta_x+C\eta_y)/\sqrt{AC-B^2},\\ \xi_y&=-(A\eta_x+B\eta_y)/\sqrt{AC-B^2}.\end{aligned} \tag{12}$$

反之，若能找到方程组（12）的解，易证（9）与（11）均成立而证毕.

（12）称为 Beltrami 方程，它首先出现在微分几何中而与等温坐标（isothermal coordinates）问题有关. 它比（10）是强得多的要求，因为（10）是未耦合的，即 ξ, η 各满足各的方程，而（12）是耦合的. 要想（10）有解，必须满足可积性条件

$$[(B\eta_x+C\eta_y)/\sqrt{AC-B^2}]_y=-[(A\eta_x+B\eta_y)/\sqrt{AC-B^2}]_x. \tag{13}$$

就局部解的存在而言，其实（12）和（13）是等价的. 因为若（13）有解，则下面的 1-形式为闭

$$\omega=\left(\frac{B\eta_x+C\eta_y}{\sqrt{AC-B^2}}\right)dx+\left(-\frac{A\eta_x+B\eta_y}{\sqrt{AC-B^2}}\right)dy.$$

从而局部为恰当，亦即存在一函数 ξ 满足(12). 可以证明 Beltrami 方程，从而（13）都有解. 例如可以用 Cauchy-Ковалевская 定理证

明 (13) 的解存在，但需设系数是实解析的. 对 C^∞ 系数的 Beltrami 方程也可用广义 Cauchy 积分公式来作更复杂的直接计算. 但怎么说在这里也无法作了. 在双曲型方程化为标准型时，我们也马上得出了解. 在椭圆型情况就不行了. 我们只能证明在二自变量情况，Laplace 方程是随圆型方程普遍的形状.

椭圆型方程的概念当然可以推广到 n-变量情况. 要注意，$n=2$ 时，判别式 $\Delta=B^2-AC$ 就是

$$\Delta=-\det\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}$ 是对称矩阵从而可以分型. 椭圆性显然就是 (2, 0) 型 (或指标为 ± 2)，双曲性就是 (1, 1) 型 (指标为 0)，抛物性即矩阵为奇异的. 一般说来，n 元的线性二阶 PDE 均有一主部

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}u_{x_ix_j}.$$

因为 $u_{x_ix_j}=u_{x_jx_i}$，故可设 $A_{ij}=A_{ji}$. 这样又可考虑对称矩阵 $A=(A_{ij})$ (在一点 $P_0\in\mathbb{R}^n$) 之型. 这样可以看到有许多可能情况，其中椭圆性是非常特殊的 A 为定 (即指标为 $\pm n$) 的情况.

§2. 调和函数

我们现在讨论调和函数，即 Laplace 方程

$$\Delta f=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}=0$$

之解. 我们从 $n=2$ 的情况开始. 找到许多调和函数并无困难. 因为若 $\varphi(z)$ 是全纯函数，将它分解为实部虚部 $\varphi=\xi+i\eta$，则有 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial y},\qquad \frac{\partial\xi}{\partial y}=-\frac{\partial\eta}{\partial x}. \tag{1}$$

指出 ξ，η 都是调和的. 事实上这就刻画了调和函数. 因为若 ξ 是

调和的. 1-形式

$$\omega=-\frac{\partial\xi}{\partial y}dx+\frac{\partial\xi}{\partial x}dy$$

为闭从而为局部恰当，即局部地有函数 η 满足 (1). ξ 局部地是全纯函数 $\varphi=\xi+i\eta$ 的实部. 在域 D 上也可得到整体的结论，只要 de Rham 群 $H^1(D)=0$. 但一般情况下并不一定是全纯函数实部. 例如

$$\xi(x,y)=\ln r=\ln\sqrt{x^2+y^2}$$

在 $D=\mathbb{R}^2\backslash 0$ 中调和，但在 D 中不存在全纯函数以 ξ 为实部.

调和函数和全纯函数的关系有以下推论. 记住全纯函数的极大模原理的基础是 Cauchy 积分公式

$$\varphi(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\varphi(z)dz/(z-z_0).$$

∂D 是以 z_0 为心的小圆周. 作代换 $z-z_0=re^{2\pi it}$ 并分开实虚部，即知 φ 的实部 ξ 满足**中值公式**：

$$\xi(z_0)=\int_0^1\xi(z_0+re^{2\pi it})dt,$$

即 ξ 在圆心 z_0 之值是它在绕 z_0 的小圆周上之值的平均. 但这正是证明局部极大、极小不存在之所需. 由此可以断定，如在第一章之始证明 Liouville 定理一样，紧流形上的调和函数必为常数. 这里有一个问题，即在一般流形上还没有定义调和函数. 我们现在就要做这件事. 只要想从欧氏空间过渡到流形，当然要的就是坐标变换，而这时明显地看到，通常的定义

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}=0$$

并不是不变的. 其实在欧氏空间中就可看到这一点. Laplace 方程在极坐标 (r,φ) 下形状变成了

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0.$$

为了得出不变的定义，再回顾一下欧氏空间的情况. 记住 Laplace 算子 $\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 是分成两步得到的：

(1) 对标量值函数 f 先定义矢量值函数 $\mathrm{grad} f$：

$$\mathrm{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

(2) 对矢量值函数 $\vec{V}$ 再定义标量值函数 $\mathrm{div}\vec{V}$：

$$\mathrm{div}\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i}{\partial x_i}, \quad \vec{V} = (V_1, V_2, \cdots, V_n).$$

然后最重要的就是有 Green 公式：若 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是一紧区域而其边缘为 $S = \partial D$，则有

$$\int_D \mathrm{div}\vec{V}\, dv = \int_S V_n dS.$$

左方是 D 上的"体"积分，右方是 S 上的"面"积分，V_n 则是 $\vec{V}$ 在 S 的单位法方向上的分量.

大家知道，Green 公式对于中值公式是一关键. 事情是这样的. 令 f，g 是任意的光滑函数，则

$$f\Delta g = \sum_{i=1}^{n} f \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f\frac{\partial g}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right]$$
$$= \mathrm{div}(f\mathrm{grad} g) - \langle \mathrm{grad} f, \mathrm{grad} g\rangle.$$

由 Green 公式即有

$$\int_D f\Delta g dv = \int_{\partial D} (f\mathrm{grad} g)_n dS - \int_D \langle \mathrm{grad} f, \mathrm{grad} g\rangle dv.$$

交换 f，g 将所得公式与上式相减即得

$$\int_D (f\Delta g - g\Delta f) dv = \int_{\partial D} (f\mathrm{grad} g - g\mathrm{grad} f)_n dS.$$

它称为"第二 Green 公式". 用 $\frac{\partial}{\partial n}$ 表沿 $\vec{n}$ 方向求导，有

$$(\mathrm{grad} g)_n = \langle \mathrm{grad} g, \vec{n}\rangle = \frac{\partial g}{\partial n}.$$

于是我们有

$$\int_D (f\Delta g - g\Delta f) dv = \int_{\partial D} \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right) dS.$$

设 f 是调和的而 $n \geqslant 3$ ($n=2$ 时怎样作已经看到了)，$P_0 \in \mathbb{R}^n$ 是一定点，D 是以 P_0 为心 R 为半径的球体. 当然，我们可设 $P_0 = 0$. 对函数 g 我们则取

$$g(x) = r^{2-n}, \quad r = r(x) = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}.$$

容易验证，g 当 $r \neq 0$ 时是调和的．但在 $x=0$ 处 g 有一奇点．令 $D_1 = D-$（以 0 为心，ρ 为半径的小球体）．因为在 D_1 上 $\Delta f = \Delta g = 0$，左方的体积分为 0．∂D_1 可分为两部分，即一大球面 S_1 和一小球面 S_2．于是

$$\int_{S_1} (f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n}) dS = \int_{S_2} (f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n}) dS.$$

在各球面上，g 各取常值．于是

$$\int_{S_1} (g \frac{\partial f}{\partial n}) dS = g \int_{S_1} \frac{\partial f}{\partial n} dS.$$

但是

$$\int_{S_1} \frac{\partial f}{\partial n} dS = \int_{S_1} (\mathrm{grad} f)_n dS = \int_D (\mathrm{div}\ \mathrm{grad} f) dv = \int_D \Delta f dv = 0.$$

在 S_2 上也是一样．我们还有

$$\frac{\partial g}{\partial n} = \langle \mathrm{grad} g, \vec{n} \rangle = \sum_{i=1}^{n} (2-n) r^{1-n} \frac{x_i}{r} \cdot \frac{x_i}{r} = (2-n) r^{1-n}.$$

它在 S_1, S_2 上也各取常值．因为 $\mathbb{R}^n$ 中半径为 r 的球面面积是 $(\mathrm{const}) r^{n-1}$．显然有

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{S_2} f \frac{\partial g}{\partial n} dS = A f(0).$$

A 是某常数．所以我们有

$$f(0) = \frac{1}{\lambda} \int_{S_1} f dS.$$

λ 是 S_1 的面积．这就是我们所需的中值公式．

上述清楚地指明了在流形情况下需要作什么．必须先定义 grad，div 使 Green 公式成立．我们一件一件地来做．

$\mathbb{R}^n$ 上的矢量值函数 $\vec{V} = (V_1, \cdots, V_n)$ 自然表示一个矢量场 $\sum_{i=1}^{n} V_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$．故若 M 为一流形，$P_0 \in M$，(U, φ) 是 P_0 附近的局部坐标，则 M 上函数 f 的梯度 $\mathrm{grad} f$ 应定义为

$$\operatorname{grad} f=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i},$$

$\tilde f=\tilde f(x)$是f在局部坐标（U，φ）下的局部表示．但这样从一开始就不对．上述定义在坐标变换时不能正确地定义一矢量场．因为若（V，ψ）是另一局部坐标，f在其中的局部表示是$\hat f$，我们有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}=\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial\hat f}{\partial\xi_j}\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}\frac{\partial\xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial\xi_k}\neq\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\hat f}{\partial\xi_j}\frac{\partial}{\partial\xi_j}.$$

而它们是应该相等．另一方面我们有 1-形式

$$df=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde f}{\partial x_i}dx_i,$$

它的变换是正确的．我们当然知道这一点，不过仍然再给出公式以提醒大家．

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde f}{\partial x_i}dx_i=\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial\hat f}{\partial\xi_j}\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial\xi_k}d\xi_k=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\hat f}{\partial\xi_j}d\xi_j.$$

这是因为（$\frac{\partial\xi}{\partial x}$）与（$\frac{\partial x}{\partial\xi}$）互逆．矢量场与 1-形式的这一区别并非吹毛求疵．它们服从不同的变换规则，而在流形上把戏就在这里．

看来 $\operatorname{grad} f$ 就应该是 1-形式 df，但是话还没有说完．

div 把一矢量值函数变为标量值函数．一般说来我们还有一些这样做的东西．令 X 为流形 M 上的一矢量场，ω 为一 k-形式．用 X 去“缩”ω 即得一个（$k-1$）-形式 $i_X(\omega)$，其定义为

$$i_X(\omega)(X_1,\cdots,X_{k-1})=\omega(X,X_1,\cdots,X_{k-1}).$$

这是张量运算中很常用的．它有一些容易验证的性质，例如对 X 与 ω 的双线性(以函数为标量)，还有 Leibnitz 公式

$$i_X(\omega\wedge\mu)=i_X(\omega)\wedge\mu+(-1)^p\omega\wedge i_X(\mu).$$

更有意思的是 i_X 与外微分 d 的关系，即计算 di_X-i_Xd. 它与所谓 Lie 导数有些关系．但我们暂时不来讲它而回到 $\mathbf{R}^3$ 上的计算以便对此运算有些感性的东西．设在 $\mathbf{R}^3$ 上有一个 3- 形式

$$\omega=a(x,y,z)dx\wedge dy\wedge dz.$$

令 $X=X_1\frac{\partial}{\partial x}+X_2\frac{\partial}{\partial y}+X_3\frac{\partial}{\partial z}$. 由一般公式(第六章，§ 3)，

$$(\omega \wedge \mu)(X_1, \cdots, X_k, X_{k+1}, \cdots, X_{k+l})$$
$$= \frac{1}{k!\ l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \varepsilon(\sigma) \omega(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(k)}) \mu(X_{\sigma(k+1)}, \cdots, X_{\sigma(k+l)}).$$

而且$(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$与$(dx, dy, dz)$互相对偶，故若将2-形式$i_X(\omega)$展开为

$$i_X(\omega) = Y_1 dy \wedge dz + Y_2 dz \wedge dx + Y_3 dx \wedge dy,$$

则例如有

$$Y_1 = i_X(\omega)(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$$
$$= a dx \wedge dy \wedge dz (X_1 \frac{\partial}{\partial x} + X_2 \frac{\partial}{\partial y} + X_3 \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) = aX_1.$$

这公式显然可以推广到$\mathbb{R}^n$上而得

$$i_X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a X_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

设M是可定向的，即有一处处非0的n-形式$(n = \dim M)\omega$称为体积元素．若X为一矢量场，则$i_X(\omega)$是一$(n-1)$-形式．作外微分d又得一n-形式$di_X(\omega)$，所以必有唯一的函数φ使得

$$di_X(\omega) = \varphi \cdot \omega.$$

我们即以φ作为$\operatorname{div}X$之定义．于是

$$di_X(\omega) = \operatorname{div}X \cdot \omega. \qquad (**)$$

要看此定义是否正确，取$\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$即$\mathbb{R}^n$上的标准体积元素．为计算$di_X(\omega)$，只需对$(*)$(取$a = 1$)作外微分，因为

$$dV_i = \sum_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} dx_j \quad (\text{用}\vec{V}\text{代替}X),$$

而dx_j恰好与$dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$中的“^”相消，所以余下的只有$j = i$的一项，从而有

$$\operatorname{div}\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i}{\partial x_i}.$$

我们的定义不仅给出正确的公式，现设M是一有边流形，Stokes公式给出

$$\int_M (\mathrm{div}\vec{V})\omega = \int_{\partial M} i_{\vec{V}}^*(\omega).$$

它很象 Green 公式只看右方是什么. 对一点 $P_0 \in \partial M$ 可取一坐标系使在 P_0 附近 $\partial M = \{x | x_n = 0\}$. 于是 $\mu = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}$ 是 ∂M 上的体积元素. $\frac{\partial}{\partial x_n}$ 是法向导数, $dx_n | \partial M = 0$(因为 $T_{P_0}(\partial M)$ 由 $\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}$ 张成). 考虑到这一切, 即知在 ∂M 上, (*) 化为

$$i_X(\omega) | \partial M = (-1)^{n-1} X_n \mu.$$

即 X 在 ∂M 上的法向分量.

(**) 是 $\mathrm{div} X$ 的正确定义至此已无疑问. 但不巧的是, 要想用它, X 必须是一矢量场而非 1-形式. 在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上这不是什么问题, 只需把 $\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ 与 $\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$ 混用即可. 因为只需用一个坐标系, 混用并无关系. 把 1-形式与矢量场混同, 其实就是将切空间 $T_P(M)$ 与余切空间 $T_P^*(M)$ 混同. 本来它们是同维数的线性空间, 可以等同它们. 问题是在流形 M 上必须用一个系统的方法将二者对一切 $P \in M$ 等同, 即需将切丛 $T(M)$ 与余切丛 $T^*(M)$ 等同起来.

已知一线性空间 V, 有一个情况下能自然地作 $V \longrightarrow V^*$ 将二者等同起来, 即若 V 中有内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$, 则

$$V \longrightarrow V^*, \quad v \longmapsto \langle v, \cdot \rangle$$

即所需的等同. 类似地, 如果丛 $E \longrightarrow B$ 上有内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$, 即可将 E 与 E^* 等同. $T(M)$ 上的内积称为一 Riemann 度量, 这时 M 称为 Riemann 流形. 在具有度量 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 的 Riemann 流形上, f 之梯度定义为一矢量场 $\mathrm{grad} f$, 使得对一切矢量场 X, 有

$$\langle \mathrm{grad} f, X \rangle = df(X) = X(f).$$

总之, 并不是在一切流形上都可定义 Laplace 算子. 我们还需要一些其它的构造, 即 M 必须是可定向的 Riemann 流形. 这时我们定义

$$\Delta f = \mathrm{div}\ \mathrm{grad} f.$$

它称为 Laplace-Beltrami 算子. 这些条件中, 可定向性并不关紧要.

因为 M 局部地总是可定向的. 而若将(* *)中的 ω 改为 $-\omega$(即改变定向),什么都没有变. 所以,只要有体积元素,div 恒可局部定义. 另一方面,Riemann 度量可是至关紧要. 确实,每一个流形 M 都有 Riemann 度量. 问题在于调和函数的定义依赖于所选定的度量. 对于 $\mathbf{R}^n$,可认定 $T_p(\mathbf{R}^n)$ 即 $\mathbf{R}^n$ 并应用其上的标准度量. 换一个说法,即可取 $(\frac{\partial}{\partial x_i})_{i=1,2,\cdots,n}$ 为 $T_p(\mathbf{R}^n)$ 的就范正交基. 用这个说法可以验证按(* * *)df 确实与 $\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$ 等同.

§ 3. Laplace-Beltrami 算子 Δ

引导我们在流形上将 Laplace 算子定义为 $\Delta = \text{div grad}$ 的关键性的考虑是 Green 公式,它是 Stokes 定理的变体. 我们已经看到,由 Green 公式可得出中值定理和极值原理. 毫无疑问,在研究调和函数时中值定理有中心的重要性. 事实上,许多读者大概也知道,适合它的必为调和函数. 其它众所周知的应用还有 Dirichlet 问题(在一区域 D 内求一调和函数使在边缘 ∂D 上取指定值)解的唯一性等等. 目前我们集中讨论一个结果,即在整个(无边)流形 M 上调和的函数必为常值函数. 常值函数本身当然没有特别可注意的事. 在连通流形 M 上这就是使 $df=0$ 的函数 f,且它们构成 0 阶 de Rham 群 $H^0(M)$($H^*(M)$ 中最没有意思的一个). 调和函数和 $H^0(M)$ 凑巧也是一回事. 然而这个一致性却带来不少后果. 使 $df=0$ 的函数 f 在 M 的任一连通分支(不论是大还是小)上都是常数. 而另一方面,由 $\Delta f=0$ 却得不出在小区域上 $f=\text{const}$,只要想一下 $\mathbf{R}^2$ 上成千上万的全纯函数就明白了. 如果 $\Delta f=0$ 与 $df=0$ 是一回事,讨论它就没有意义了. 所以在整个 M 上调和的函数与 $H^0(M)$ 一致是一个非平凡的整体的结果,这类结果是我们最感兴趣的. 问题自然地出现了:有没有可以称为"调和形式"的东西来刻画 $H^*(M)$?答案就是著名的 Hodge 分解定理. 下面我们就来解释它,但还要一些预备

知识.

令 V 为一有限维矢量空间，$\Lambda^*(V)=\sum_{k=0}^{\infty}\Lambda^k(V)$ 是其外代数. 我们知道

$$\dim\Lambda^k(V)=\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}=\dim\Lambda^{n-k}(V),$$

所以可将 $\Lambda^k(V)$ 与 $\Lambda^{n-k}(V)$ 等同起来. 然后我们又想系统地对一切 k 做这件事. 为此又设 V 上有内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和定向. 我们知道，定向就是一个基元素 $\omega_0\in\Lambda^n(V)$，这样就有一个等同关系

$$K=\Lambda^0(V)\longrightarrow\Lambda^n(V),\quad 1\longmapsto\omega_0,$$

这反过来又定义了一个自然的双线性映射

$$B:\Lambda^k(V)\times\Lambda^{n-k}(V)\longrightarrow K,$$

$$(\tau,\mu)\longmapsto B(\tau,\mu),$$

B 的定义是：

$$\tau\wedge\mu=B(\tau,\mu)\omega_0.$$

另一方面，由 V 上的内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 又可在 $\Lambda^k(V)$ 上定义内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 如下：对 V 之元素 $x_1,\cdots,x_k;\ y_1,\cdots,y_k$，函数

$$((x_1,\cdots,x_k),(y_1,\cdots,y_k))\longmapsto\det[\langle x_i,y_j\rangle]$$

显然对其每一组中的变元是斜对称的. 由外积定义即得一个双线性映射 $\langle\cdot,\cdot\rangle:\Lambda^k(V)\times\Lambda^k(V)\longrightarrow K$ 如下：

$$\langle x_1\wedge\cdots\wedge x_k,y_1\wedge\cdots\wedge y_k\rangle=\det[\langle x_i,y_j\rangle].\tag{1}$$

它定义了 $\Lambda^k(V)$ 上的内积. 例如，为证明它是正定的，选 V 的一个有定向的就范正交基 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 我们知道 $\{x_{i_1}\wedge\cdots\wedge x_{i_k}\},i_1<\cdots<i_k$ 是 $\Lambda^k(V)$的一个基底. 但由(1)很清楚，它也是$\Lambda^k(V)$的就范正交基，证毕. 顺便说一下，我们约定取 $\omega_0=x_1\wedge\cdots\wedge x_n$ 作为 $\Lambda^n(V)$的特定的基底.

B 与 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 一起，按通常的方式定义等同关系

$$*:\quad\Lambda^k(V)\xrightarrow{\sim}(\Lambda^{n-k}(V))^*\xleftarrow{\sim}\Lambda^{n-k}(V),$$

通常称为“$*$算子”. 用公式来写，若 $u\in\Lambda^k(V)$，则 $v=*u\in$

$\Lambda^{n-k}(V)$. $*u$ 之定义是：对一切 $w\in \Lambda^{n-k}(V)$，

$$u \wedge w = (*u, w)\omega_0. \tag{2}$$

例如，设 $u=x_1\wedge\cdots\wedge x_k$，则 $x_1\wedge\cdots\wedge x_k\wedge w=0$ 对一切 $w\in \Lambda^{n-k}(V)$ 成立，除非 $w=\lambda x_{k+1}\wedge\cdots\wedge x_n$. 由此知

$$*(x_1 \wedge \cdots \wedge x_k) = x_{k+1} \wedge \cdots \wedge x_n,$$

即是符号适当调整以后的"相补"基. 若再对 $x_{k+1}\wedge\cdots\wedge x_n$ 取 $*$ 又有

$$*(x_{k+1} \wedge \cdots \wedge x_n) = \pm x_1 \wedge \cdots \wedge x_k.$$

符号由 $x_{k+1}\wedge\cdots\wedge x_n\wedge x_1\wedge\cdots\wedge x_k$ 之定向决定，即 $(-1)^{k(n-k)}$. 这是因为每个 x_i，$1\leqslant i\leqslant n$，要移动 $n-k$ 步，而共有 k 个 x_i. 若对 $x_{i_1}\wedge\cdots\wedge x_{i_k}$，$i_1<i_2<\cdots<i_k$ 取 $**$ 结果亦同. 故有

$$** = (-1)^{k(n-k)} \quad 在\ \Lambda^k(V)\ 上. \tag{3}$$

在应用中，我们取一定向 Riemann 流形 M 而令 $V=T_P^*(M)$ 为 M 在 P 点的余切空间. 这时 $T_P(M)$ 中有确定 Riemann 度量的内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 使有等同关系

$$T_P(M) \longrightarrow T_P^*(M),$$

而由它又可在 $T_P^*(M)$ 上定义内积. M 之定向 ω 按定义给出一个基底 $\omega_P\in \Lambda^n(T_P^*(M))$. 所以 $T_P^*(M)$ 具有了上面所讨论的一切. 我们可以在 $\Lambda^k(T_P^*(M))$ 上定义 $*$ 算子. 在一切 $P\in M$ 上都定义了 $*$ 以后，自然就有丛映射

$$* : \Lambda^k(T^*(M)) \longrightarrow \Lambda^{n-k}(T^*(M)).$$

即是说，$*$ 可以作用在 k-形式上. 对于 k-形式 ω，$(*\omega)$ 是一 $(n-k)$-形式，其中 P 点之值是

$$(*\omega)_P = *(\omega_P).$$

右方的 $*$ 是 $\Lambda^k(T_P^*(M))$ 上的 $*$ 算子. 我们当然也有

$$** = (-1)^{k(n-k)} \quad 在\ k\text{-}形式上.$$

最后，$*$ 算子在 k-形式空间 $\Lambda^k(M)$ 上定义内积(不要与每个纤维 $\Lambda^k(T_P^*(M))$ 上的内积混淆. $\Lambda^k(M)$ 是从 $\Lambda^k(T^*(M))\longrightarrow M$ 的截口之空间. 令 ω_0 为体积元素，则对 k-形式 τ 与 μ，我们定义

$$(\tau,\mu)=\int_M \tau\wedge *\mu. \tag{4}$$

我们用（·，·）表此内积以便与每个 $\Lambda^k(T_P^*(M))$上之"逐点"内积相区别．但它们当然有关系．在每点 P，由 $*$ 之定义有

$$\begin{aligned}(\tau\wedge *\mu)_P &= (-1)^{k(n-k)}\ (*\mu\wedge\tau)_P \\ &= (-1)^{k(n-k)}\ \langle **\mu,\ \tau\rangle_P\omega_{0P} = (\ \langle\mu,\ \tau\rangle\ \omega_0)_P.\end{aligned}$$

这就是说，如果考虑函数

$$P\longmapsto\langle\mu_P,\ \omega_P\rangle = \langle\mu,\ \omega\rangle_P$$

和 n-形式

$$P\longmapsto\langle\mu,\ \omega\rangle_P\omega_{0P} = (\ \langle\mu,\ \tau\rangle\ \omega_0)_P,$$

则有

$$(\tau,\mu)=\int_M \tau\wedge *\mu=\int_M\langle\tau,\mu\rangle\omega_0. \tag{5}$$

附带说一下，由此易证（·，·）为正定．因为 $(\tau,\ \tau)=0$ 意味着 $\int_M\langle\tau,\tau\rangle\omega_0=0$．因 $f=\langle\tau,\tau\rangle\geqslant 0$，故 $f=0$．

因为内积涉及积分，我们或者需在紧支集形式 $\Lambda_c^k(M)$之空间上讨论，或者更简单些设 M 为紧．

在矢量空间 V 上有内积后常做的一件事是定义线性映射之伴．回顾一下，若 $\varphi: V\longrightarrow V$ 为 V 上之线性映射而〈·，·〉为内积，则 φ 的伴映射 φ^* 是由下式定义的：

$$\langle\varphi u,v\rangle=\langle u,\varphi^* v\rangle \qquad \text{对一切 } u,v\in V \text{ 成立}.$$

我们已在线性空间 $\Lambda^*(M)$上有了内积．我们还有一个线性映射——外微分 $d: \Lambda^*(M)\longrightarrow\Lambda^*(M)$．现在来计算其伴 $d^*=\delta$．对于 k-形式 μ 和 $(k-1)$-形式 τ，有

$$(\tau,\delta\mu)=(d\tau,\mu)=\int_M d\tau\wedge *\mu.$$

现在

$$d\tau\wedge *\mu=d(\tau\wedge *\mu)-(-1)^{k-1}\tau\wedge d*\mu,$$

故若 M 没有边缘，我们有

$$\int_M d\tau \wedge *\mu = (-1)^k \int_M \tau \wedge d*\mu.$$

我们还有

$$\tau \wedge d*\mu = (-1)^{k(n-k)} \tau \wedge **d*\mu$$

所以

$$(\tau, \delta\mu) = (-1)^{(k+1)(n-k)} \int \tau \wedge *(*d*\mu)$$

$$= (\tau, (-1)^{(k+1)(n-k)} *d*\mu).$$

所以知道，在 k-形式 $\Lambda^k(M)$上有

$$\delta = (-1)^{(k+1)n} *d* \qquad (k(k+1)\ 为偶). \tag{6}$$

(6) 式的好处如下：由 (5) 知 $\Lambda^k(M)$上的内积$(\cdot, \cdot)$可直接由函数(τ, μ)和积分来定义. 但 $*$ 是一局部的逐点运算(定义在 $\Lambda(T_p^*(M))$上)，所以 δ 也可用 (6) 局部地定义. 经过计算即知整体地 $\delta = d^*$，即 d 的伴算子. 例如，取 $\mathbf{R}^n$ 上的 1-形式 $\mu = \sum \mu_i dx_i$，我们有

$$* \mu = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \mu_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

$$d*\mu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mu_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_i \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

$$\delta\mu = *d*\mu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mu_i}{\partial x_i}.$$

如果再次将 μ 与矢量场 $\sum_i \mu_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 混同 (在 $\mathbf{R}^n$ 中应用标准度量时即可这样作)，$\delta\mu$ 就是 $\mathrm{div}\mu$. 这意味着我们做的事是对的：δ 是 div 对各阶形式的推广.

为了启发下一步要做的事，我们再回到物理. 设有一电场 $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$由其势函数 f 导出：$\vec{E} = \mathrm{grad} f$. 则在区域 D 上的总电能是积分

$$\int_D (\mathrm{grad} f, \mathrm{grad} f) dv.$$

若再视 $\mu = \mathrm{grad} f$ 为一 1-形式，则上式正是由 (5) 所定义的内积之

"长度" $\|\mu\|^2=(\mu,\mu)$. 现设我们感兴趣的是一平衡定常系统，这表示函数空间中的点 μ 应给泛函 $\|\cdot\|^2$ 以一局部极小，所以我们愿了解一般地如何使流形 M 上的"能量泛函"：

$$(\mu,\mu)=\int_M \mu\wedge *\mu$$

极小化？为使这问题可以处理，要对 μ 加一些限制，例如设 μ 是闭形式并在 de Rham 类 $[\mu]\in H^k(M)$中极小化. 解决这类问题标准的程序是变分法，故作 μ 之变分 $t\longmapsto\mu+td\tau$. 选变分之形为 $d\tau$ 是为了保持在类 $[\mu]$ 之内. 我们有

$$\begin{aligned}f(t)&=(\mu+td\tau,\mu+td\tau)=\|\mu\|^2+2t(\mu,d\tau)+t^2\|d\tau\|^2\\&=\|\mu\|^2+2t(\delta\mu,\tau)+t^2\|d\tau\|^2.\end{aligned}$$

对于临界点应有 $f'(0)=(\delta\mu,\tau)=0$. 它应对一切 $\tau\in A^{k-1}(M)$成立，故得必要条件 $\delta\mu=0$. 反之若 $\delta\mu=0$，则

$$\begin{aligned}\|\mu+d\tau\|^2=f(1)&=\|\mu\|^2+\|d\tau\|^2+2(\delta\mu,\tau)\\&=\|\mu\|^2+\|d\tau\|^2\geqslant\|\mu\|^2.\end{aligned}$$

这样，算子 δ 有很重要的意义，即 $\delta\mu=0$ 同时 $d\mu=0$ 是 $\|\mu\|^2$ 在 $[\mu]$ 内达到极小的必要充分条件. 我们现在引进单独一个算子把这两个条件连接起来. 这就是 Riemann 流形 M 上的 Laplace-Beltrami 算子

$$\Delta=(d+\delta)^2=d\delta+\delta d. \tag{7}$$

要注意，d 把形式的阶增加 1，δ 则减少 1，所以 Δ 保持形式的阶数不变. (7) 式之成立是由于 $d^2=0$ 和

$$\delta^2=\pm(*d*)(*d*)=\pm *d^2*=0,$$

所以

$$(d+\delta)^2=d^2+d\delta+\delta d+\delta^2=d\delta+\delta d.$$

又由定义，$d+\delta$ 从而还有 Δ 均为自伴的，故有

$$(\Delta\mu,\mu)=((d+\delta)\mu,(d+\delta)\mu).$$

因此，若 $\Delta\mu=0$，必有$(d+\delta)\mu=d\mu+\delta\mu=0$. 但因 $d\mu$，$\delta\mu$ 阶数不同，故必分别有 $d\mu=0$，$\delta\mu=0$. 其逆为真自不足道. 所以 $d\mu=\delta\mu=0$ 实

际上等价于单个方程 $\Delta\mu=0$. 这样的形式 μ 自然地称为**调和形式**. 调和 k-形式之集记作 $\mathscr{H}^k(M)$,它显然是 $A^k(M)$的子空间:$\mathscr{H}^k(M)\subset A^k(M)$(作为实标量 R 上的子空间而不是函数环上的子模).

我们用 0-形式即函数 f 作一验算,我们有

$$df=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}dx_i.$$

我们刚才对 1-形式 μ 已计算过 $\delta\mu$. 因 $\delta f=0$(记住 δ 使形式的阶减少),我们确实得出 Laplace 算子:

$$\Delta f=\delta df=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

现在有真正困难的问题了. 我们知道,为使 $\|\mu\|^2$ 极小,μ 必须是调和的. 但给出上同调类 $\alpha\in H^k(M)$, 其中是否有调和代表元? Hodge 定理的内容就是讲它的存在和唯一性. 但在讲这定理之前, 先作一些一般的评论.

M 的 Riemann 构造在 $A^*(M)$上引入了自然的内积, 由此又得 Laplace 算子 Δ. 一个矢量空间 V 有了内积就有了距离或范数,可以问, V 对此范数是否完备, 即 Cauchy 序列是否必收敛. 如果是, V 就称为一 Hilbert 空间. 当 V 为有限维时, 这根本不是问题, 因为 V 等距同构于具有标准度量的 $\mathbb{R}^n$,后者当然是完备的. 这归根结蒂又只是实数系的完备性. 但在 $A^*(M)$的情况下却很少是有限维的(除非切丛 $T(M)$是平凡的),即令 M 为紧也如此. 毕竟,甚至连 $A^0(M)$(即 M 上的函数空间)也决非有限维的. 在(5)式定义的内积下,$A^*(M)$也几乎从非完备的. 因为, 又看 0-形式即函数的情况, 有

$$(f,g)=\int_M f\wedge *g=\int_M fg\omega_0,$$

即 L_2 范数. 不但对我们常用的光滑形式它不完备, 即使添上连续形式也还不行. 熟知分析的读者知道, 要使它完备, 必须添上 Lebesgue 的 L_2 可积形式. 这是我们面临的问题之一.

现在可以陈述 Hodge 分解定理了. 令 M 为一可定向紧 Rie-

mann 流形，Δ 是 Laplace 算子，$\mathscr{H}^* = \ker\Delta$ 是调和形式空间，$\mathrm{Im}\Delta$ 是象 $\Delta(A^*(M))$.

Hodge 分解定理 调和形式空间 $\mathscr{H}^*(M) \subset A^*(M)$ 是有限维的且可分裂为互相正交的子空间之直和

$$A^*(M) = \mathscr{H}^*(M) \oplus \mathrm{Im}\Delta.$$

因调和形式为闭，有一自然的映射

$$\mathscr{H}^*(M) \longrightarrow H^*(M), (\text{de Rham 群})$$

$$\mu \longmapsto [\mu].$$

定理 上述映射是同构.

证 设 $[\mu]=0$ 即 $\mu=d\tau$，因 μ 为调和，$\delta\mu=\delta d\tau=0$，故

$$\|\mu\|^2 = (d\tau, d\tau) = (\tau, \delta d\tau) = 0$$

所以 $\mu=d\mu=0$.

任给一类 $[\tau] \in H^*(M)$ 使 $d\tau=0$，可作分解

$$\tau = \mu + \Delta\eta,$$

μ 是调和的. 易证 Δ 与 d 可交换. 事实上，

$$d\Delta = d(d\delta + \delta d) = d\delta d = (d\delta + \delta d)d = \Delta d.$$

因 $d\tau=0$，而 μ 为调和的，所以

$$0 = d\tau = d\mu + d\Delta\eta = \Delta d\eta,$$

从而 $d\eta$ 是调和的，从而 $\delta d\eta=0$. 现在我们有

$$\tau=\mu+(d\delta+\delta d)\eta=\mu+d(\delta\eta)$$

从而 $[\tau] = [\mu]$.

另一个有趣的应用是不用 de Rham 定理的 Poincaré 对偶性之另证. 由以上定理，可将 H^k 与 $\mathscr{H}^k$ 等同，现在考虑上积配合

$$\mathscr{H}^k(M) \times \mathscr{H}^{n-k}(M) \longrightarrow \mathscr{H}^n(M),$$

$$(\mu, \tau) \longmapsto \mu \wedge \tau = (\mu, *\tau)\omega_0.$$

容易验证 $*$ 和 Δ 可交换，所以

$$* : \mathscr{H}^k \longrightarrow \mathscr{H}^{n-k}$$

是一同构. 若 u 正交于 $*\mathscr{H}^{n-k}=\mathscr{H}^k$，它必正交于整个 $A^k(M)$，从而 $u=0$.

§ 4. Hirzebruch 指标定理的另一表述

在指出如何证明 Hodge 分解定理之前，我们要再提它的一些应用，包括 Hirzebruch 定理的另一种解释，这一点我们提到过. 然而在这以前我们要看一个较简单的情况以说明这些东西的本性.

记住 Laplace 算子可定义为一复合 $\Delta=(d+\delta)(d+\delta)$. 分开来，$d+\delta$ 本身即一算子，因 d 将形式的阶数加 1，δ 则将它减 1，合在一起，它们把偶数阶形式变为奇数阶的，反过来也一样. 记 $\Lambda^{奇}(M)$和 $\Lambda^{偶}(M)$分别是 $\Lambda^{*}(M)$的奇、偶阶形式之子空间，我们有两个算子：

$$D_1=d+\delta: \Lambda^{奇}(M)\longrightarrow \Lambda^{偶}(M),$$
$$D_2=d+\delta: \Lambda^{偶}(M)\longrightarrow \Lambda^{奇}(M),$$

$D=D_1D_2=D_2D_1$. 考虑 $\ker D_2\subset \Lambda^{偶}(M)$. 若$(d+\delta)\mu=0$，由前述形式阶数的考虑，我们有 $d\mu=\delta\mu=0$，而这等价于 $\Delta\mu=0$. 换言之，有

$$\ker D_2=(\ker\Delta)\cap \Lambda^{偶}(M).$$

故知 $\ker D_2$ 是有限维的，且由 Hodge 表示理论，显然

$$\dim\ker D_2=\sum_i \dim H^{2i}(M).$$

类似地

$$\dim\ker D_1=\sum_i \dim H^{2i+1}(M).$$

这就给出

$$\dim\ker D_2-\dim\ker D_1=\sum_i \dim^{2i}(M)-\sum_i \dim^{2i+1}(M)$$
$$=\chi(M) \qquad (1)$$

即 M 的 Euler 示性数.

(1)之左方可用一个算子如 D_2 来表示. 我们有

$$\mathrm{Im}\Delta\subset \mathrm{Im}D_2.$$

反之，若 $\mu=(d+\delta)\tau,\tau\in \Lambda^{偶}(M)$. 由 Hodge 分解定理，可将 τ 写成

$$\tau = \Delta\omega + \omega_1, \quad \Delta\omega_1 = 0.$$

从而也有 $D_2\omega_1 = 0$ 从而

$$\mu = D_2\Delta\omega = \Delta D_2\omega \subset \operatorname{Im}\Delta.$$

记住同态 $\varphi: A \longrightarrow B$ 之余核 $\operatorname{coker}\varphi$ 定义为

$$\operatorname{coker}\varphi = B/\operatorname{Im}\varphi.$$

故有 $\operatorname{coker}D_2 = \Lambda^{\text{奇}}(M)/\operatorname{Im}\Delta = \mathscr{H} \cap \Lambda^{\text{奇}}(M) = \ker D_1$. 故式 (1) 可重写为

$$\dim \ker D_2 - \dim \operatorname{coker} D_2 = \chi(M). \tag{2}$$

(2) 式左方称为 D_2 的"指标". 计算虽然简单，却依赖于空间 $\ker D_2$ 与 $\operatorname{coker} D_2$ 之维数有限. 因 $\Lambda^{\text{偶}}$ (M) 和 D_2 作用于其上的 $\Lambda^{\text{奇}}(M)$决非有限维，所以有数值不变量确非小事. 但 (2) 仍说明此数值不变量即流形 M 的 Euler 示性数 $\chi(M)$. 要点当然在于 D_2 是解析对象，它的存在依赖于 M 的光滑甚至是 Riemann 构造. 但到头来，其指标只是一个拓扑不变量.

(2) 是所谓指标定理最简单的情况. 象 D_2 那样可以定义其指标的算子一般称为 Fredholm 算子. 目下 D_2 甚至是微分算子. 因为若用局部坐标表示，d 和 δ 都是偏导数的组合. 所以指标定理是在流形上整体地描述微分方程的拓扑的.

要得到更精巧的指标定理，需将矢量空间复化. 理由如下：记住我们在 $\Lambda^*(M)$上定义了 $*$. $**$ 本质上是恒等算子，但符号与 $\Lambda^k(M)$有关. 前已看到，在 $\Lambda^k(M)$上 $** = (-1)^{k(n-k)}$. 若用复系数，可以修改 $*$ 使在 $\Lambda^*(M)$上有 $\alpha = \mathrm{i}^{k(k-1)+m} *$，这里我们假设 $n = 2m$ 为偶. 这时就处处有

$$\begin{aligned}
\alpha^2 &= \mathrm{i}^{k(k-1)+m+(2m-k)(2m-k-1)+m} ** \\
&= \mathrm{i}^{2k^2+2m(2k+2)+4m^2} ** = (-1)^{k^2} (-1)^{k(2m-k)} \\
&= (-1)^{k^2+k^2} = 1.
\end{aligned}$$

所以可将 $\Lambda_C^*(M)$分解为 α 的固有值± 1 的固有向量空间. 故令 $\Lambda_C^*(M) = \Lambda^*(M, C)$为 M 上的复值形式空间. 要小心，这与 M 上任何的复构造都无关. $\Lambda^*(M, C)$只是指 $\mu + \mathrm{i}\tau$ 形状的形式，而 μ, τ 是

普通的实值形式. 我们把 d 拓展到 $\Lambda^*(M,C)$ 上. 也把 $\Lambda^*(M)$ 上的内积 $(\cdot,\cdot)$ 拓展为 $\Lambda^*(M,C)$ 上的 Hermite 内积：

$$(\mu,\tau)=\int_M \mu \wedge *\bar{\tau},$$

$\bar{\tau}$ 为 τ 的共轭，所以当 τ 为实时，它就化为以前讲的实内积. 我们可以和以前一样定义 δ 和 Δ 使 $\ker\Delta=\mathscr{H}_C=H^*(M,C)$，即 M 的复系数上同调. 特别是 C 上的 $\dim H^*(M,C)=$R 上的 $\dim H^*(M,\mathbf{R})$，因为 $H^*(M,C)=H_C^*(M,\mathbf{R})$.

现在定义 $\Lambda^{\pm}(M)=\{\omega\in\Lambda^*(M,C)\,|\,\alpha(\omega)=\pm\omega\}$ 为 $\Lambda^*(M,C)$ 中相应于固有值 ±1 的固有子空间. 所以我们有

$$\Lambda^*(M,C)=\Lambda^+(M)\oplus\Lambda^-(M).$$

以前已经说过，$*$，d 和 δ 之间有简单的交换关系. 用 α 来表述，容易核算

$$\alpha(d+\delta)=-(d+\delta)\alpha,$$

即是说可以把 $d+\delta$ 看成两个算子，即

$$D_+=d+\delta: \Lambda^+(M)\longrightarrow\Lambda^-(M),$$
$$D_-=d+\delta: \Lambda^-(M)\longrightarrow\Lambda^+(M).$$

和前面一样，我们仍有 $\mathrm{coker}D_+\cong\ker D_-$，所以

$$\mathrm{Ind}(D_+)=\dim\ker D_+-\dim\ker D_-.$$

因为 α 与 Δ 可交换，α 诱导出调和形式 $\mathscr{H}_C$ 上的同态，仍记为 α. 当然我们仍有：在 $\mathscr{H}_C$ 上 $\alpha^2=1$. 所以 $\mathscr{H}_C=\mathscr{H}_C^+\oplus\mathscr{H}_C^-$ 即分裂 α 的固有空间之直和. 我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_C^{\pm}&=\{\omega\in\Lambda^*(M,C)\,|\,\Delta\omega=0,\alpha\omega=\pm\omega\}\\&=\{\omega\in\Lambda^{\pm}(M,C)\,|\,D_{\pm}\omega=0\}=\ker D_{\pm}.\end{aligned}$$

所以 $\mathrm{Ind}D_+=\dim\mathscr{H}_C^+-\dim\mathscr{H}_C^-$.

现在考虑阶数. 记住 $*: \Lambda^k(M)\longrightarrow\Lambda^{n-k}(M)$，所以 α 也是一样，可以将 $\mathscr{H}_C$ 分解如下. 对每个 $k<m=n/2$，空间

$$\Lambda^k=\mathscr{H}_C^k\oplus\mathscr{H}_C^{n-k}$$

在 α 下不变. $k=m$ 时单个空间 $\mathscr{H}_C^m$ 在 α 下不变. 故对每个 $k<m$ 有

$$A^k = (A^k)^+ \oplus (A^k)^-.$$

我们指出 $\dim(A^k)^+ = \dim(A^k)^-$. A^k 中的元形如 $a = x + y$, $x \in \mathscr{H}^k_C$, $y \in \mathscr{H}^{n-k}_C$. 因为 $k \neq n-k$, 所以方程

$$x + y = a = \alpha(a) = \alpha x + \alpha y$$

只能当 $x = \alpha y$, $y = \alpha x$ 即 $a = x + \alpha x$ 时成立. 类似地, $(A^k)^-$ 中的元形如 $x - \alpha x$. $x \in \mathscr{H}^k_C$. 但这样 $x + \alpha x \longmapsto x - \alpha x$ 就成了 $(A^k)^+$ 和 $(A^k)^-$ 之间的同构, 所以在计算 $\mathrm{Ind}D_+$ 时, $\dim(A^k)^+$ 和 $\dim(A^k)^-$ 相消, 而剩下的只有 $k = m$, 故

$$\mathrm{Ind}D_+ = \dim(\mathscr{H}^m_C)^+ - \dim(\mathscr{H}^m_C)^-.$$

现在再假设 $n = \dim M \equiv 0 \mod 4$, 则 $m = n/2$ 为偶. 在 $A^m(M, C)$ 上 α 与 $*$ 相同. 事实上,

$$\alpha = \mathrm{i}^{m(m-1)+m} * = \mathrm{i}^{m^2} * = *,$$

所以在实的 $\mathscr{H}^m$ 上 $*^2 = 1$, 而有 $(\mathscr{H}^m_C)^{\pm} = (\mathscr{H}^m)^{\pm}_C$. 所以可以不管复化. 而作计算得在实域上

$$\mathrm{Ind}D_+ = \dim(\mathscr{H}^m)^+ - \dim(\mathscr{H}^m)^-.$$

但在 $\mathscr{H}^m(M) = \mathscr{H}^m(M, \mathrm{R})$ 上有上积双线性形式

$$\begin{aligned} \mu \wedge \tau &= \mu \wedge * * \tau \quad (\text{在 } \mathscr{H}^m(M) \text{ 上 } * * = 1) \\ &= (\mu, * \tau)\omega_0 \quad (\omega_0 \text{ 是体积元素}). \end{aligned}$$

故若 $(e_1, \cdots, e_p)$ 是 $(\mathscr{H}^m)^+$ 的就范正交基, 我们有

$$e_i \wedge e_i = (e_i, * e_i) = (e_i, e_i) = 1,$$

而对 $(\mathscr{H}^m)^-$ 的就范正交系 $(f_1, \cdots, f_q)$ 则有

$$f_i \wedge f_i = (f_i, * f_i) = -(f_i, f_i) = -1.$$

显然这表明

$$\mathrm{Ind}D_+ = \text{上积形式的指标} = \text{流形 } M \text{ 的指标 } I(M).$$

这就是 Hirzebruch 指标定理的另一解释. 我们又一次看到, 微分算子, 主要是 Laplace 算子 Δ 的指标, 是一拓扑不变量.

§ 5. Hodge 定理的证明, 总的思路

Hodge 分解定理完全是分析方面的结果. 我们本可以象前面

那样直接承认它并往下讲它的应用. 然而，其证明中的思想和方法不仅对此特例，而且对一般椭圆算子都是必要的. 因此对其中某些点有所了解是必要的. 在本节和下节我们先详细讨论 M 为环面的特例. 这不是说环面在此问题中有特殊的意义(例如象在 Lie 群理论中那样)，而是在这种情况下用的方法和格式也可推广应用于一切情况.

在讲证明前先要指出，在这个情况下，调和形式与 de Rham 群相同一事可直接验证. 所以这个练习的要点是学会其思想. 计算如下：讲到调和形式先要确定 Riemann 内积. n-环面 T^n 是 $\mathbf{R}^n$ 对下述等价关系的商空间：$x \sim y$ iff $x-y \in$ 一个整数格点，例如由 $(2\pi e_1, \cdots, 2\pi e_n)$ 生成的格点，$(e_1, \cdots, e_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的标准基底. $\bar{x} \in T^n$ 处的切空间可与投影到 $\bar{x}$ 的 $x \in \mathbf{R}^n$ 处的切空间等同，故可借 $T_x(\mathbf{R}^n) = \mathbf{R}^n$ 之内积为 $T_{\bar{x}}(T^n)$ 之用. 说得简单些，T^n 上的函数、矢量场和形式就是 $\mathbf{R}^n$ 上的周期 (对各变量均为 2π) 函数等等. T^n 上的 d, δ 和 Δ 则和 $\mathbf{R}^n$ 上的一样.

为简单计令 $n=2$. 我们知道 $H^1(T^2)$ 维数为 2. 用 x, y 表 $\mathbf{R}^2$ 上之变量，$dx \wedge dy$ 决定其定向 (即反时针方向) 对于 1-形式 $\mu = \alpha dx + \beta dy$ 我们有

$$* \mu = \alpha dy - \beta dx,$$

$$d * \mu = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

所以

$$\delta \mu = *(d * \mu) = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y}.$$

另一方面我们又有

$$d\mu = \left(-\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right) dx \wedge dy,$$

故若 μ 为调和，即 $d\mu = \delta\mu = 0$ 将得到

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}, 即 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} = 0.$$

类似地也有

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} = 0.$$

这样，$\Delta\mu=0$ 即指每个分量函数 α，β 均为调和. 因为它们是周期函数，故必有（局部）极大极小，从而必为常数. 读者对 $\mathbb{R}^n$ 作同样计算是计数符号的好练习.

现在解释证明的原理. 设在流形 M 上有形式 α 而我们想求微分方程 $\Delta\omega=\alpha$ 的解. 若 ω 是一解，则对一切 $\varphi\in A^*(M)$，有

$$(\alpha,\varphi) = (\Delta\omega,\varphi).$$

因 Δ 为形式自伴（以后再解释“形式”二字），$(\Delta\omega,\ \varphi) = (\omega,\ \Delta\varphi)$，这意味着线性泛函 $l(\cdot)=(\omega,\cdot)$ 有以下性质：

$$l(\Delta\varphi) = (\alpha,\varphi) \quad 对一切\ \varphi \in A^*(M)\ 成立.$$

泛函分析中处理微分方程一个标准方法是先求一线性泛函 l（或证明它存在）. 这泛函 l 称为方程 $\Delta\omega=\alpha$ 的弱解. 它通常不难求出，全视在哪里去找. 但弱解不一定是真解. 要把它确定为真解通常要花多得多的力气. 问题如下：

l 是 $A^*(M)$上的线性泛函. 若 $A^*(M)$是有限维的，则不会有问题. 因为在有内积的线性空间 V 中，内积$\langle\cdot,\cdot\rangle$诱导出一个同构：

$$\Phi : V \longrightarrow V^*, \quad x \longmapsto \langle x,\cdot\rangle.$$

其所以如此是因为 Φ 恒为一对一的(因为$\langle\cdot,\cdot\rangle$是正定的). 所以若 V 是有限维的，我们有 $\dim V=\dim V^*$，使 Φ 是满射. 这意味着任意弱解 l 必可写为 $l=\langle\omega,\cdot\rangle$，$\omega\in V$. 这个 ω 当然是真解. 若 V 不是有限维的，Φ 肯定不是满射. 这是因为形如$\langle x,\cdot\rangle$的线性泛函必为连续的，而当 $\dim V=\infty$时恒有不连续泛函存在. 连续线性变换也称有界线性变换. 令 V，W 为内积空间，即把它们看成由内积决定了度量的拓扑空间. 令 $\varphi : V \longrightarrow W$ 为一线性映射，用通常的 ε-δ 方法可知若 φ 在 $x=0$ 连续，则对 $\varepsilon=1$，$\exists\ \delta>0$ 使得

$$|x| < \delta \Rightarrow |\varphi(x)| \leqslant 1.$$

若 $x\in V$ 是任意的(但 $x\neq 0$),则 $\left|\frac{x}{|x|}\delta\right|\leqslant\delta$,所以 $\left|\varphi\left(\frac{x}{|x|}\delta\right)\right|\leqslant 1$. 由线性可知,这意味着对一切 $x\in V$,

$$|\varphi(x)|\leqslant\frac{1}{\delta}|x|.$$

这样定义了有限的范数 $|\varphi|=\inf\{M\mid|\varphi(x)|\leqslant M|x|$ 对一切 $x\in V$ 成立$\}$. 在这个意义下 φ 是有界的. 反之,任意有界线性映射都是连续的,例如 $\varphi=\langle x,\cdot\rangle$ 就是有界的.因为我们有 Schwartz 不等式

$$|\varphi(y)|=|\langle x,y\rangle|\leqslant|x||y|.$$

因此在一般情况下,记号 V^* 应用来表示有界线性泛函的空间. 但即令如此,ϕ 也不一定是满射,除非 V 关于度量 $|\cdot|$ 为完备. 这时 V 称为 Hilbert 空间,没有这一条件则称为前 Hilbert 空间. 原因在于我们有

Hilbert 空间的基本射影定理 令 V 为具有内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的矢量空间,$A\subset V$ 是关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为完备的子空间,$x\in V$ 为一点,则必有唯一点 $a\in A$ 使得

$$|x-a|=\operatorname{dist}(x,A)=d.$$

证 令 $(a_n)\subset A$ 是一序列使得

$$|x-a_n|\longrightarrow\operatorname{dist}(x,A)=d.$$

我们有

$$|(x-a_n)+(x-a_m)|^2+|(x-a_n)-(x-a_m)|^2$$
$$=2|x-a_n|^2+2|x-a_m|^2.$$

右方极限是 $4d^2$. 因为 $|(x-a_n)+(x-a_m)|=2\left|x-\frac{1}{2}(a_n+a_m)\right|$ 而 $(1/2)(a_n+a_m)\in A$, 故左方第一项 $\geqslant 4d^2$. 由此可知第二项即 $|a_n-a_m|^2\longrightarrow 0$, 即 (a_n) 为 Cauchy 序列. 因为 A 是完备的,必存在 $\lim a_n=a\in A$ 达到这一距离.

有限维的初等几何说明 $b=x-a$ 垂直于 A, 即 $b\in A^{\perp}$. 现在若 $y\in A$ 是任一点,λ 为任意标量,则有

$$|b|^2\leqslant|b+\lambda y|^2=|b^2|+2\lambda\langle b,y\rangle+\lambda^2|y|^2.$$

这表明 λ 的二次式 $|y|^2\lambda^2+2\langle b,y\rangle\lambda\geqslant 0$. 所以判别式 $\Delta\leqslant 0$. 但由前式，取 $\lambda>0$ 得 $|y|^2\lambda+2\langle b,y\rangle\geqslant 0$. 令 $\lambda\longrightarrow 0$ 得 $2\langle b,y\rangle\geqslant 0$，因 $\Delta=\langle b,y\rangle\geqslant 0$，故有 $\langle b,y\rangle=0$.

上面的论证给出了非常有用的分解定理：若 V 和 $A\subset V$ 定义如上，则 $V=A\oplus A^{\perp}$.

以上虽然只是 Hilbert 空间最初等的事实，它已说明 Hilbert 空间比一般 Banach 空间（即仅具范数的完备线性空间）容易处理得多的基本原因何在. 例如现在易得同构 $V\longrightarrow V^*$：若 $\varphi\in V^*$ 是一连续非 0 线性泛函，$A=\ker\varphi\subset V$ 为闭，从而为完备，故有 $V=A\oplus A^{\perp}$. 但显然 $\varphi: V/A\xrightarrow{\sim}\mathbf{R}$ 是同构，所以 $\dim A^{\perp}=1$. 取 $x\in A^{\perp}$ 使 $\varphi(x)=1$. 对任一 $y\in V$，记 $y=\lambda x+a$，$a\in A$，$\lambda\in\mathbf{R}$，于是

$$\varphi(y)=\lambda+\varphi(a)=\lambda=\langle x,y\rangle/|x|^2.$$

概括地说，如果只处理 Hilbert 空间、其闭子空间和其连续线性算子，情况多少和有限维情况一样. 例如，若 $A: V\longrightarrow V$ 是 Hilbert 空间上的连续线性映射，则对每个 $x\in V$，$y\longmapsto\langle Ax, y\rangle$ 是连续线性泛函. 所以必有唯一 x_1 使得

$$\langle Ax,y\rangle=\langle y,x_1\rangle.$$

这样定义了伴算子 A^*：$x_1=A^*x$. 但是这样做必须 V 是 Hilbert 空间. 我们过去用此法讨论了具有 L_2 内积的 $A^*(M)$上的外微分算子 d 的伴算子. 所以我们的作法不全合法. 有幸的是，$*$ 算子总是可定义的而我们可定义 $\delta=*d*$ 而不必提伴算子. 结果是

$$\langle d\mu,\nu\rangle=\langle\mu,\delta\nu\rangle$$

正是伴的关系，这样使 Δ “形式地” 等于 Δ^*，尽管后者没有在 $A^*(M)$上定义过. 形式自伴一语就是这样来的.

回到方程 $\Delta\omega=\alpha$，我们已看到，要把弱解变为真解就要在 Hilbert 空间中才行，$A^*(M)$则肯定不是 Hilbert 空间. 但这只是一个小困难. 正如从有理数可以构造出实数一样，也可使$A^*(M)$完备化以得一 Hilbert 空间并在其中求弱解. 限制回 $A^*(M)$后即在 $A^*(M)$中得到了弱解. 由完备化所得的空间称为 Sobolev 空间. 得

到 $A^*(M)$中的弱解后，要点就是以下的

正则性定理 在光滑形式空间 $A^*(M)$上，$\Delta\omega=\alpha$ 的任意弱解 l 均为真解，即必有某 $\omega\in A^*(M)$使 $l(\cdot)=\langle\omega,\cdot\rangle$.

要在 $A^*(M)$中得一矢量 ω，时常要如微分方程的 Picard 逐步逼近法那样要用极限. 现在我们则要用另一个原理. 若 (ω_n) 是一紧集中的序列，它必有收敛子序列. 但在紧性这个新问题中维数又造成很大区别，所以还要多讲几句话. 令 $A\subset V$ 为具有内积的线性空间 V 之紧子集，于是 A 为闭（因 V 为 Hausdorff 的）而且有界，即存在一常数 $M\geqslant 0$ 使对一切 $x\in A$ 均有 $|x|\leqslant M$（因为 $|\cdot|:A\longrightarrow\mathbf{R}$ 是连续的）. 在有限维情况下有基本的 Heine-Borel 定理指出其逆亦真. 这意味着，例如，若 $\varphi:V\longrightarrow W$ 为线性的而 $A\subset V$ 是有界的则 $\overline{\varphi(A)}\subset W$ 为紧. 一般情况下，因为 φ 为连续的，故 $\varphi(A)\subset W$ 仍有界，但 φ 之连续性不足以保证紧性. 若 $\varphi(A)$为紧，则 φ 应不止为连续线性映射. 所以，若 φ 映有界集 A 为相对紧集 $\varphi(A)$（即 $\overline{\varphi(A)}$为紧），就称 φ 为紧映射. 一个著名的结果是：若 $\dim V=\infty$，有界集不一定紧. 例如可以容易地用 Gram-Schmidt 方法作出一就范正交系$(x_n)\subset V$. 于是对一切 n 有 $|x_n|=1$ 而(x_n)是有界集，但对一切 n 与 m 有 $|x_n-x_m|=\sqrt{2}$，故它不可能是 Cauchy 序列. 事实上可以用紧性来刻画有限维性质. 由以上所说，显然有 V 为有限维 iff Heine-Borel 定理成立.

Hodge 定理的第二个要点是，与 Δ 相关有一紧算子称为 Green 算子. 现在我们只是这样说：

紧性定理 令(α_n)是 $A^*(M)$中的序列使得(α_n)与$(\Delta\alpha_n)$均有界. 这时(α_n)中有 Cauchy 子序列.

Hodge 分解定理就是上面两个定理的容易的推论了. 令 $\mathscr{H}\subset A^*(M)$为调和形式空间. 它必为有限维，否则将得其中一个就范正交系 (α_n). 因 $\Delta\alpha_n=0$，$(\Delta\alpha_n)$ 自然有界. 从而可应用紧性定理. 但 (α_n) 并没有收敛子序列. 因 $\dim\mathscr{H}<\infty$，它是完备的，而由投影定理有

$$\Lambda^*(M) = \mathscr{H} \oplus \mathscr{H}^{\perp}.$$

余下的只要证明 $\mathscr{H}^{\perp} = \mathrm{Im}\Delta$. 若 $\beta = \Delta\alpha \in \mathrm{Im}\Delta$ 而 $\gamma \in \mathscr{H}$, 则

$$\langle\beta, \gamma\rangle = \langle\Delta\alpha, \gamma\rangle = \langle\alpha, \Delta\gamma\rangle = 0,$$

这里用到 Δ 为自伴. 它说明 $\mathrm{Im}\Delta \subset \mathscr{H}^{\perp}$. 为证相反的包含关系, 要指出存在常数 $C \geqslant 0$ 使对一切 $\beta \in \mathscr{H}^{\perp}$ 有

$$|\beta| \leqslant C|\Delta\beta|. \tag{1}$$

若这样的 C 不存在可在 $\mathscr{H}^{\perp}$ 中找到序列 (β_n) 使 $|\beta_n| = 1$ 但 $|\Delta\beta_n| \longrightarrow 0$. 由紧性定理可设 (β_n) 是 Cauchy 序列. 于是对任意 $\psi \in \Lambda^*(M)$, $(\langle\beta_n, \psi\rangle)$ 也是 Cauchy 序列, 故可在 $\Lambda^*(M)$ 上定义一个泛函 l (显然是线性有界的) 如下:

$$l(\psi) = \lim\langle\beta_n, \psi\rangle.$$

我们有

$$l(\Delta\psi) = \lim\langle\beta_n, \Delta\psi\rangle = \lim\langle\Delta\beta_n, \psi\rangle = 0.$$

所以 l 是 $\Delta\omega = 0$ 的弱解. 由正则性定理, 有某个 $\omega \in \Lambda^*(M)$ 使 $l = \langle\omega, \cdot\rangle$. 我们有: 对于一切 $\psi \in \Lambda^*(M)$,

$$\langle\omega, \psi\rangle = l(\psi) = \lim\langle\beta_n, \psi\rangle.$$

所以 $\omega = \lim\beta_n$. 但这样一来我们同时有 $\omega \in \mathscr{H}$ 和 $\omega = \lim\beta_n \in \mathscr{H}^{\perp}$. 所以 $\omega = 0$. 但因 $|\beta_n| = 1$, 这是不可能的.

现在可证 $\mathscr{H}^{\perp} \subset \mathrm{Im}\Delta$ 了. 设 $\alpha \in \mathscr{H}^{\perp}$, 在 $\mathrm{Im}\Delta$ 上定义泛函

$$l(\Delta\varphi) = \langle\alpha, \varphi\rangle, \quad \varphi \in \Lambda^*(M) \tag{2}$$

易见定义是合理的, 故可设 $\varphi \in \mathscr{H}^{\perp}$. 这时由(1)有

$$|l(\Delta\varphi)| \leqslant |\alpha||\varphi| \leqslant C|\alpha||\Delta\varphi|,$$

即 l 在 $\mathrm{Im}\Delta$ 上有界.

证明的最后一步是, 令 $\Lambda^*(M) \subset V$ 是 Hilbert 空间 V 的稠子空间, 亦即 V 是 $\Lambda^*(M)$ 的完备化. 令 $A = \overline{\mathrm{Im}\Delta} \subset V$ 是 $\mathrm{Im}\Delta$ 在 V 中的闭包. l 于是可拓展为 A 上的有界线性泛函. 因 A 为完备的, $V = A \oplus A^{\perp}$. 所以只要再规定 $l(A^{\perp}) = 0$ 即可把 l 拓展到整个 V 上. 于是得到 $\Lambda^*(M)$ 上的线性泛函 l. 等式(2)指出 l 是 $\Delta\omega = \alpha$ 的弱解. 由正则性定理, 我们确实得到了解 ω, 从而 $\alpha = \Delta\omega \in \mathrm{Im}\Delta$.

分解式 $\Lambda^*(M)=\mathscr{H}\oplus\operatorname{Im}\Delta$ 与 $\operatorname{Im}\Delta=\mathscr{H}^\perp$ 使我们可以定义算子 H 和 G. $H(\alpha)$即 α 的调和分量,即 $H:\Lambda^*(M)\longrightarrow\mathscr{H}$ 为投影算子. 于是 $\alpha-H(\alpha)\in\operatorname{Im}\Delta=\mathscr{H}^\perp$,故

$$\alpha-H(\alpha)=\Delta\omega$$

对某 $\omega\in\Lambda^*(M)$成立. 用微分方程来说即 $\Delta\omega=\alpha$ 有解 iff $H(\alpha)=0$,亦即 $\alpha\in\mathscr{H}^\perp$垂直于 $\mathscr{H}$. ω 显然在 $\mathscr{H}^\perp$中是唯一的. 我们定义 $\omega=G(\alpha)$, 并称 G 为 Green 算子. 它是一个复合:

$$G:\Lambda^*(M)\xrightarrow{\text{投影}}\operatorname{Im}\Delta\xrightarrow{\Delta^{-1}}\Lambda^*(M)$$

或 $G=\Delta^{-1}(1-H)$.

今设$(\alpha_n)\in\Lambda^*(M)$为有界,我们有 $\alpha_n-H(\alpha_n)=\Delta\omega_n$, $\omega_n\in\mathscr{H}^\perp$. 因 $1-H$ 为有界的,$(\Delta\omega_n)$为有界. 由(1)有

$$|\omega_n|\leqslant C|\Delta\omega_n|\quad\text{对某个 } C \text{ 成立.}$$

故由紧性定理,(ω_n)有一 Cauchy 子序列. 但由定义 $\omega_n=G(\alpha_n)$,故紧性定理可以重述为:G 是紧算子.

Green 算子一词来自 § 2 中的 Green 公式. 注意求 $G(\alpha)$相当于求 $\Delta\omega=\alpha$ 的一个特解. 在函数(即 0-形式)情况下,有时确实可利用所谓 Green 函数写出一个特解. 最熟知的即圆上 Dirichlet 问题的 Poisson 积分公式. 回顾一下,在 § 2 中导出调和函数的中值定理时用了一个特定的函数 $g(x)=r^{2-n}=(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)^{1-n/2}$, $n\geqslant 3$. 这就是一个 "Green 函数". 在 § 2 中(采用那里的记号)我们设了 $\Delta f=0$. 若现设 $\Delta f=\alpha$ 并继续使用 § 2 中同样的计算, 最后将得到一个公式:

$$f(0)=-\int_{\partial D}\left(\frac{\partial g}{\partial n}\alpha\right)dS-\int_D(g\alpha)dv.$$

D 是含 0 的区域. 最后一个积分就是内积 (g,α), 所以若 $\alpha\in\mathscr{H}^\perp$ 就没有这一项. 所以, Green 函数 g 有助于显式地表出 $G(\alpha)$.

§ 6. Hodge 定理的证明，一个特例

现在来讲流形 M 为环面 T^n 这一特例中 Hodge 定理的证明. 我们已经提到，T^n 上的形式就是 $\mathbf{R}^n$ 上的周期形式. 此外，若 $\mu\in A^p(M)$是 T^n 上的形式，可以就把它看作一组函数，Δ 作用于 μ 就是作用在每个分量函数上（§ 5 中我们在 $n=2$ 时作了计算）. 所以可以限于讨论调和函数. 我们采用通用的重指标记号：$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 记一重指标而 $\xi_i\geqslant 0$ 是整数. $[\xi]=\sum_i\xi_i$，若 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中一点，x^ξ 记单项式 $x_1^{\xi_1}\cdots x_n^{\xi_n}$，$D_x^\xi$ 记微分算于 $(1/i)^{[\xi]}\partial^{[\xi]}/\partial x_1^{\xi_1}\cdots\partial x_n^{\xi_n}$，而 $\langle\xi,x\rangle=\sum_i\xi_i x_i$. 最后$|\cdot|$表欧氏范数：

$$|x|=(\sum_i x_i^2)^{1/2}.$$

令 φ 为周期 2π 的函数. 对 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，第 ξ 个 Fourier 系数 φ_ξ 即是（复）数

$$\varphi_\xi=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}\varphi(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}dx.$$

需要一些假设才能保证 φ_ξ 有定义. 因为我们至少会设 φ 为连续，所以没有问题. 级数 $\sum_\xi\varphi_\xi e^{i\langle x,\xi\rangle}$ 称为 φ 的形式 Fourier 级数，并记作

$$\varphi\sim\sum_\xi\varphi_\xi e^{i\langle\xi,x\rangle}.$$

众所周知，若 φ 光滑，其 Fourier 级数将一致收敛于 φ. 因当 $n\geqslant 2$ 时重指标集没有自然的次序，所以要说明一下收敛是什么意思.

令 V 为具有范数$|\cdot|$的矢量空间. $(v_i)_{i\in I}$是一族矢量而指标集 I 可以是任意集. 我们说矢量 $v\in V$ 是这一族矢量之和并记作 $v=\sum_{i\in I}v_i$. 若任给 $\varepsilon>0$ 皆可找到一有限子集 $F_0\subset I$，使当任意有限

集 $F\supset F_0$ 时

$$\left|\sum_{i\in F}v_i - v\right| < \varepsilon.$$

故按定义求和即与次序无关. 这概念相当于绝对收敛. 若 V 为 Banach 空间，也有通常的 Cauchy 条件. $(v_i)_{i\in I}$称为 Cauchy 的，若对 $\varepsilon>0$ 必有有限子集 $F_0\subset I$，使对任意有限子集 K，只要 $K\cap F_0=\varnothing$，均有 $\left|\sum_{i\in K}v_i\right| < \varepsilon$. 这时可证 $(v_i)_{i\in I}$可求和 iff $(v_i)_{i\in I}$是 Cauchy 的.

令 $C^0(T^n)$是 T^n 上的连续函数空间. 定义 $C^0(T^n)$上的 sup 范数为

$$|\varphi|_\infty = \sup\{|\varphi(x)|\,|\,x\in T^n\}.$$

大家知道 $C^0(T^n)$在此范数下是 Banach 空间，因为$|\cdot|_\infty$下的收敛即一致收敛. $C^0(T^n)$赋以此范数后即记作 $C^0_\infty(T^n)$. 任意$\varphi\in C^0(T^n)$均定义 $C^0(T^n)$的一个子集

$$(\varphi_\xi e^{i\langle\xi,x\rangle})_{\xi\in\text{重指标集}}.$$

一个著名的结果指出，若 φ 为光滑则在 $C^0_\infty(T^n)$中

$$\varphi = \sum_\xi \varphi_\xi e^{i\langle\xi,x\rangle}.$$

为证明它，只需考虑 $n=1$ 的情况. 这时有

$$\varphi_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x)e^{-inx}dx.$$

因为 φ 是光滑的，可以作分部积分而得

$$\varphi_n = \left(\frac{-1}{2\pi i n}\right)e^{-inx}\varphi(x)\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi i n}\int_0^{2\pi}\varphi'(x)e^{-inx}dx.$$

因 φ 为周期，故第一项没有了. φ_n 成为 $\varphi'(x)$的积分，而分母上出现一个 n. 再这样作即知 $\sum_n\varphi_n e^{inx}$ 以 $\sum\frac{C}{n^2}$ 为一致优级数. 所以收敛无问题而且只需设 $\varphi\in C^2$ 即可. 至于其实际的和是 φ：$\varphi=\sum_n\varphi_n e^{inx}$ 是 Stone-Weierstrass 定理的推论. 令 $\psi=\varphi-\sum_n\varphi_n e^{inx}$，显然 ψ 的一切 Fourier 系数均为 0. 由 Stone-Weierstrass 定理知 $S^1=T^1$ 上的任意连续函数均可用有限线性组合 $P=\sum_k\lambda_k e^{in_kx}$ 一致逼近，λ_k

是常数．于是由 Schwartz 不等式，L_2-范数

$$\left|\int\psi^2dx\right| = \left|\int\psi(\psi - p)dx\right| \leqslant \left(\int\psi^2dx\right)^{1/2}\left(\int|\psi - p|^2dx\right)^{1/2}$$

可以任意小，所以 $\psi=0$．

因为 L_2 范数是由我们用以定义 Δ 的内积而来，即（见§3）有

$$(\tau,\mu) = \int_M \tau\wedge *\mu = \int_M \langle\tau,\mu\rangle\omega_0,$$

我们形式地记此范数为 $|\cdot|$ 以与 $|\cdot|_\infty$ 相区别．当然我们要再重复一下，$C^0(T^n)$ 在 $|\cdot|$ 下不是 Banach 空间，而在 $|\cdot|_\infty$ 下才是．虽如此，

$$\varphi = \sum_\xi \varphi_\xi e^{i\langle\xi,x\rangle}$$

在 $|\cdot|_\infty$ 下仍成立，且可以逐项积分．记住 $(e^{i\langle\xi,x\rangle})_\xi$ 是 $|\cdot|$ 下的正交基，我们有 Parseval 等式

$$|\varphi|^2 = \int\varphi\cdot\overline{\varphi} = \sum_\xi|\varphi_\xi|^2.$$

它有以下的推论．

考虑形式和 $\sum\limits_\xi \lambda_\xi e^{i\langle\xi,x\rangle}$（$\lambda_\xi$ 是常数）之集，其实是所有函数族 $(\lambda_\xi e^{i\langle\xi,x\rangle})$ 之集．它在逐点运算下显然是矢量空间．于是可以考虑子空间

$$\mathscr{F} = \{\sum_\xi \lambda_\xi e^{i\langle\xi,x\rangle} \mid \sum|\lambda_\xi|^2 < \infty\}.$$

因为形式 Fourier 级数 $\sum\limits_\xi \lambda_\xi e^{i\langle\xi,x\rangle}$ 只是一族数 (λ_ξ)，大家知道 (λ_ξ) 是一 Hilbert 空间．作 Fourier 级数就是一个线性映射

$$C^0(T^n)\longrightarrow\mathscr{F},\quad \varphi\longmapsto\sum_\xi\varphi_\xi e^{i\langle\xi,x\rangle},$$

当 φ 为光滑时，它使在 $\mathscr{F}$ 上 L_2 范数与 $(\sum\limits_\xi|\lambda_\xi|^2)^{1/2}$ 一致．这意味着光滑函数空间 $A^0(T^n)$ 可以看作 $\mathscr{F}$ 的子空间．在 $\mathscr{F}$ 中取闭包，即得前 Hilbert 空间 A^0（T^n）的具体的完备化．事实上，$\mathscr{F}$ 就是 A^0（T^n）的完备化．

对光滑函数 φ，易求其导数之 Fourier 系数. 用分部积分可知

$$(\varphi')_n = in\varphi_n.$$

回到多变元情况并记住 D_k 定义中有因子 $1/i$，易见 $D^\alpha\varphi$ 的第 ξ 个 Fourier 系数就是

$$(D^\alpha\varphi)_\xi = \xi^\alpha\varphi_\xi.$$

对 Fourier 级数这是一件好事. 求偏导数相当于加权乘法而 φ_ξ 的权因子即 ξ^α. 这样在处理 C^s 函数时，自然要求量度其所有 k 阶 ($k\leqslant s$) 导数的封闭性. 故在 $A^s(T)$中我们定义 L_2^s-范数如下：

$$|\varphi|_s = (\sum_{|\alpha|\leqslant s}|D^\alpha\varphi|^2)^{1/2}.$$

这就启示我们在 $\mathscr{F}$ 中定义 Sobolev s-空间如下：

$$H_s = \{\lambda = \sum_\xi \lambda_\xi e^{i\langle\xi,x\rangle} \mid \sum_\xi (1+|\xi|^2)^s|\lambda_\xi|^2 < \infty\},$$

其上的 s-范数 $|\lambda|_s$ 则定义为

$$|\lambda|_s^2 = \sum_\xi (1+|\xi|^2)^s|\lambda_\xi|^2.$$

于是

$$|\varphi|_s^2 = \sum_{|\alpha|\leqslant s}\sum_\xi |\xi^\alpha|^2|\varphi_\xi|^2 = \sum_\xi (\sum_{|\alpha|\leqslant s}|\xi^\alpha|^2)|\varphi_\xi|^2.$$

因为有以下的不等式（其中常数 C_s 仅依赖于 s）：

$$\sum_{|\alpha|\leqslant s}|\xi^\alpha|^2 \leqslant (1+|\xi|^2)^s \leqslant C_s\sum_{|\alpha|\leqslant s}|\xi^\alpha|^2,$$

可见，若将 C^s (T^n) 嵌入 $\mathscr{F}$，其象在 H_s 中而其 L_2^s-范数与 Sobolev s-范数一致. 再用一次 H_s 显然是 $\mathscr{F}$ 的闭子空间，它就给出了 C^s (T^n)在 L_2^s-范数下的完备化. 我们显然有以下的包含关系：

$$H_s \subset H_t, \qquad \text{若 } s\geqslant t.$$

所以 s 之大小量度可微分性的程度. 下述引理就是这个事实的确切表述：

Sobolev 引理 若 $[n/2]$ 是 $n/2$ 的整数部分，则

$$H_{s+[n/2]+1} \subset C^s\ (T^n),$$

即每个 $\lambda\in H_{s+[n/2]+1}$都是一个 C^s 函数 φ 的 Fourier 级数，且此级数

一致收敛于 φ.

我们只考查 $n=1$（从而 $[n/2]=0$）的情况以说明这个引理的思想，因此我们要证明 $H_{s+1}\subset C^s(T^n)$. 现在对 s 归纳进行证明.

$s=0$ 时没有多少可证. 若 $x=\sum_\xi \lambda_\xi e^{i(\xi,x)}$ 在 H_1 中，它当然在 H_0 中，即 $\sum_\xi |\lambda_\xi|^2<\infty$. 因 $|\lambda_\xi e^{i(\xi,x)}|=|\lambda_\xi|$ 所以收敛数项级数 $\sum_\xi |\lambda_\xi|^2$ 一致优于函数项级数 $\sum_\xi \lambda_\xi e^{i(\xi,x)}$. 所以后者一致收敛于某函数 φ. 当然 $\varphi\in C^0(T^n)$，因为收敛是一致的.

现设 $H_{s+1}\subset C^s(T^n)$ 而 $\lambda=\sum_\xi \lambda_\xi e^{i(\xi,x)}$ 在 H_{s+2} 中，即

$$\sum_\xi |\xi|^{2s+4}|\lambda_\xi|^2<\infty.$$

令 $\mu=\sum_\xi i\xi\lambda_\xi e^{i(\xi,x)}$，则 $\mu\in H_{s+1}$. 由归纳假设，此级数一致收敛而且 $\mu\in C^s(T)$. 可以逐项积分而得

$$\varphi(x)=\int_0^x \mu(t)dt=\sum_{\xi\neq 0}\lambda_\xi e^{i(\xi,x)}+C$$

即 φ 为 μ 的原函数. 从而 $\varphi\in C^{s+1}$ 而 $\sum_{\xi\neq 0}\lambda_\xi e^{i(\xi,x)}+C$ 一致收敛于 φ.

我们已知 $\Lambda(T^n)=$（光滑函数空间）$\subset\bigcap H_s$，现在作为 Sobolev 引理的一个显然的推论有 $\Lambda(T^n)=\bigcap H_s$.

现在 Sobolev 空间 H_s 中考查 Laplace 方程. 我们已经看到，在 H_s 取偏导数 D^a 相当于乘以 ξ^a. 更准确些说，若 $\varphi\in C^s(T^n)$ 而且有 Fourier 级数

$$\varphi=\sum_\xi \varphi_\xi e^{i(\xi,x)},$$

则

$$D^a\varphi=\sum_\xi \xi^a\varphi_\xi e^{i(\xi,x)}.$$

所以作用以 Laplace 算子就成为

$$\Delta\varphi=-\sum_\xi |\xi|^2\varphi_\xi e^{i(\xi,x)}.$$

（负号来自 D 的定义中有因子 $1/i$）．这样在 H_s 中求解

$$\Delta\varphi = \lambda$$

就很容易了：只须用 $|\xi|^2$ 去除 λ．即是说，若 $\lambda = \sum_\xi \lambda_\xi e^{i(\xi,x)} \in H_s$ 是形式 Fourier 级数，我们定义 Green 算子 G 为

$$G(\lambda) = -\sum_\xi \frac{1}{|\xi|^2}\lambda_\xi e^{i(\xi,x)}.$$

有一点小问题，对常数项 $\xi=0$ 不能用 $|\xi|^2$ 去除．但若 $\Delta\varphi=\lambda$ 要有解，λ 不会有常数项，因而上述定义无问题．一般情况下则略去常数项 λ_0 并修改 Green 算子的定义为

$$G(\lambda) = -\sum_{\xi\neq 0} \frac{1}{|\xi|^2}\lambda_\xi e^{i(\xi,x)}.$$

这样，$G(\lambda)$ 恒为下面方程的解：

$$\Delta(G(\lambda)) = \lambda - \lambda_0.$$

Δ 映 H_s 到 H_{s-2} 中，故 G 映 H_s 到 H_{s+2} 中，而我们可以用包含关系 $H_{s+2}\subset H_s$ 从而又回到 H_s．这是一件好事，因为增加 s 意味着提高光滑程度．但还不止此．若 $s>t$ 我们有 $H_s\subset H_t$，故可考虑嵌入映射 $i: H_s \longrightarrow H_t$．若 H_s，H_t 中各赋以 s-与 t-范数，i 显然是有界算子．我们还有以下的

Rellich 引理　当 $s>t$ 时，嵌入算子 $H_s \longrightarrow H_t$ 为紧．

证　令 (λ_k) 是 H_s 中的有界序列，现要在其中找出一个 H_t 中的 Cauchy 子序列．我们有

$$\sum_\xi (1+|\xi|^2)^t|\lambda_{k\xi}|^2 \leqslant \sum_\xi (1+|\xi|^2)^s|\lambda_{k\xi}|^2 < C.$$

因此，固定指标 ξ 后，集 $\{(1+|\xi|^2)^t|\lambda_{k\xi}|^2\}_k$ 有界，从而有一 Cauchy 子序列．用通常的对角化手续我们可以找到一个子序列 $\{(1+|\xi|^2)^t|\lambda_{k_i\xi}|^2\}_{k_i}$ 使对一切 ξ 都是 Cauchy 序列．为简单计，就设 λ_{k_i} 为 λ_k．现在使用常用的分开小的 ξ 与大的 ξ 的方法而知：任给 $\varepsilon>0$，必可找到 R 使得

$$4C/(1+|\xi|^2)^{s-t} < \frac{\varepsilon}{2}, |\xi| \geqslant R (\text{因 } s-t>0, \text{这是可能的});$$

还可找到 m，使 k，$l\geqslant m$ 时

$$\sum_{|\xi|\leqslant R}(1+|\xi|^2)^t|\lambda_{k\xi}-\lambda_{l\xi}|^2<\frac{\varepsilon}{2}.$$

这也是可能的，因为 $|\xi|\leqslant R$ 的只有有限项. 这样，在 H_t 中我们有

$$|\lambda_k-\lambda_l|^2\leqslant\sum_{|\xi|\leqslant R}(1+|\xi|^2)^t|\lambda_{k\xi}-\lambda_{l\xi}|^2$$
$$+\sum_{|\xi|>R}(1+|\xi|^2)^s|\lambda_{k\xi}-\lambda_{l\xi}|^2/(1+|\xi|^2)^{s-t}<\varepsilon.$$

作为一个直接的推论，因为 G 可分解如下：

$$H_s\xrightarrow{G}H_{s+2}\xrightarrow{i}H_s,$$

G 显然是有界的，所以下面的算子为紧：

$$G: H_s\longrightarrow H_s.$$

现在容易对 T^n 得出上节讲的正则性与紧性定理.

设 $\alpha\in A(T^n)$ 而 l 是 $\Delta\omega=\alpha$ 的弱解：即 $l\in(A(T^n))'$ 是一线性连续泛函，而且对一切 $\varphi\in A(T^n)$ 有

$$l(\Delta\varphi)=\langle\alpha,\varphi\rangle.$$

因 $A(T^n)\subset H_0$ 是稠的，l 可以拓展为 H_0 上的连续线性泛函而且仍使上式对一切 $\varphi\in A(T^n)$ 成立（$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 H_0 上的内积）. 因 H_0 是 Hilbert 空间，故有某个 $\omega\in H_0$ 使 $l=\langle\omega,\cdot\rangle$. 由于对一切 $\varphi\in A(T^n)$ 有

$$\langle\omega,\Delta\varphi\rangle=\langle\alpha,\varphi\rangle,$$

我们有

$$\langle\omega,\Delta G\varphi\rangle=\langle\alpha,G\varphi\rangle,$$

亦即对于一切没有常数项的 $\varphi\in A(T^n)$ 有

$$\langle\omega,\varphi\rangle=\langle\alpha,G\varphi\rangle=\langle G\alpha,\varphi\rangle.$$

故知 $\omega=G\alpha$. 因对一切 s 有 $\alpha\in H_s$，ω 也一样，即 $\omega\in A(T^n)$.

设 (α_s) 是 $A(T^n)$ 中的序列使 $(|\alpha_s|)$ 与 $(|\Delta\alpha_s|)$ 均有界. 对任意 s，$\beta_s=\Delta\alpha_s$ 是 H_s 中的有界序列而且 $\alpha_s=G\beta_s$. 因此 (α_s) 在 H_s 中有 Cauchy 子序列. 再用标准的对角化手续，可在 (α_s) 中找到一个子序列使在一切 H_s 中，从而在 $A(T^n)=\bigcap H_s$ 中成为 Cauchy 序列.

§ 7. Hodge 定理的证明，一般情况

我们要指出环面上 Hodge 定理证明的思想是怎样推广到一般流形上的.

我们觉察到的第一件明显的事是不能再作 Fourier 级数了，因而 Sobolev 空间定义成了问题. 但是这并不那么严重. 回忆一下，Sobolev 空间 H_s 与 $A^0(M)$ 即光滑函数的 L_2^s-范数 $\|\varphi\|_s=(\sum_{|\alpha|\leq s}|D^\alpha\varphi|^2)^{1/2}$有关. 具体地说，$C^\infty(M)$ 函数空间按此范数并不完备. Sobolev 空间则是它的一个具体的完备化. 现在尽管我们不能再显式地作出 H_s，我们仍可依据一般原理以确定完备化空间是存在的. 这样在一般情况下仍会有 Sobolev 空间. 重要问题并不在于其存在性，而在于在抽象的框架下 Sobolev 引理和 Rellich 引理是否仍成立. 事实上利用与环面情况相同的论证就可证明它们. 大体如下：用有限多个坐标邻域 (U_i) 覆盖流形 M 并取从属于它的一的分割 (ρ_i)，于是整体的函数 φ 可以分解为局部地紧支于 U_i 内的函数 $\rho_i\varphi=\varphi_i$ 之和. 但具有紧支集于 U_i 上的函数显然可以看作是在适当的格子上的周期函数的限制. 例如，可以设 U_i 为紧且含于 $\mathbb{R}^n$ 的一个长方体中. 这样可以把证明归结为前一种情况. 由此，环面上的 Hodge 定理也称为局部定理.

但 Fourier 级数真正的好处是描写 Δ 时特别简单. 大家记得由此得出在 H_s 上"逆转"Δ 的 Green 算子 G 的定义. G 的显式描述使得容易看出 G 为一紧算子. 这正是 Hodge 定理证明的核心. 有幸的是，这一点也可以在一般情况下得一抽象的讲法. G 或多或少地为 Δ 之逆一事的要点是：由定义，Δ 映 H_s 入 H_{s-2}，从而 G 映 H_s 入 H_{s+2}. 然后由 Rellich 引理知，算子的复合

$$H_s \xrightarrow{G} H_{s+2} \xrightarrow{i} H_s$$

是一紧算子，只需能证第一个 $G: H_s \longrightarrow H_{s+2}$为有界即可. 由于技

术上的原因，处理 $1-\Delta$ 更容易．记住在环面情况、可定义 H_s 上的形式 Laplace 算子为

$$\Delta\lambda = \Delta\sum_\xi \lambda_\xi e^{i(\xi,x)} = -\sum_\xi |\xi|^2\lambda_\xi e^{i(\xi,x)}.$$

所以对于 λ，$\mu\in H_s$，我们有

$$\begin{aligned}\langle\mu,(1-\Delta)\lambda\rangle_{s-1} &= \sum_\xi (1+|\xi|^2)^{s-1}\mu_\xi(1+|\xi|^2)\overline{\lambda}_\xi \\ &= \sum_\xi (1+|\xi|^2)^s\mu_\xi\overline{\lambda}_\xi = \langle\mu,\lambda\rangle_s.\end{aligned}$$

这就建议在一般流形 M 上对 C^∞ 考虑双线性形式

$$\{\mu,\lambda\} = \langle\mu,(1-\Delta)\lambda\rangle_{s-1}.$$

记住 $\Delta=-(d\delta+\delta d)$，我们有

$$\begin{aligned}\{\mu,\mu\} &= |\mu|_{s-1}^2 + \langle\mu,d\delta\mu\rangle_{s-1} + \langle\mu,\delta d\mu\rangle_{s-1} \\ &= |\mu|_{s-1}^2 + \langle\delta\mu,\delta\mu\rangle_{s-1} + \langle d\mu,d\mu\rangle_{s-1} \\ &= |\mu|_{s-1}^2 + |\delta\mu|_{s-1}^2 + |d\mu|_{s-1}^2.\end{aligned}$$

所以，$\{\cdot,\cdot\}$ 尽管看起来不对称，其实是一对称正定形式，即为一内积，称为 Dirichlet 内积．在环面上，它就是 s-内积，而在一般情况下则有

引理 在 $C^\infty(M)$上，Dirichlet 内积等价于 Sobolev s-内积．

证 由定义，必有常数 $A\geqslant 0$ 使得

$$\{\mu,\mu\} = \langle\mu,(1-\Delta)\mu\rangle_{s-1} \leqslant A|\mu|_s^2.$$

所以问题在于证明有某个 $B\geqslant 0$ 使得

$$\{\mu,\mu\} \geqslant B|\mu|_s^2.$$

先承认这一点，对面定的 $\varphi\in H_{s-1}$定义 $C^\infty(M)$ 上的一个线性泛函如下：

$$\Phi: \eta\longmapsto \langle\varphi,\ \eta\rangle_{s-1}.$$

它显然是 s-范数下的连续线性泛函．所以它可拓展为完备化空间 H_s 上的连续线性泛函．因 H_s 也是 $C^\infty(M)$在 Dirichlet 范数下的完备化，故必存在唯一的 $\psi\in H_s$，使 $\Phi=\{\psi,\cdot\}$，亦即

$$\langle\varphi,\eta\rangle_{s-1} = \{\psi,\eta\} = \langle\psi,(1-\Delta)\eta\rangle_{s-1}.$$

今定义 $\psi=T\varphi$，即得一线性映射

$$T: H_{s-1} \longrightarrow H_s$$

使对一切 $\eta\in C^\infty(M)$ 有

$$\langle\varphi,\eta\rangle_{s-1}=\langle T\varphi,(1-\Delta)\eta\rangle_{s-1}=\langle(1-\Delta)T\varphi,\eta\rangle_{s-1}.$$

所以在 H_{s-1} 上 $(1-\Delta)T=1$. 由 $\{\mu,\mu\}\geqslant B|\mu|_s^2$ 可得

$$|1-\Delta|\geqslant B$$

所以 $|T|\leqslant 1/B$. 这样 $T: H_{s-1}\longrightarrow H_s$ 是有界的. 而由 Rellich 引理

$$T: H_{s-1}\longrightarrow H_s\longrightarrow H_{s-1}$$

是紧算子. 它本质上就是 Green 算子.

§8. 澄清，微分几何概述

上节中我们简要指出了一般流形上 Hodge 定理证明的技术方面. 由于明显的原因不可能详细讲. 但是有些重要概念需要澄清. 这与微分几何有关.

记住，在空间 $C^\infty(M)$ 上，L_s^2-范数定义为

$$|\varphi|_s^2=\sum_{[\alpha]\leqslant s}|D^\alpha\varphi|^2.$$

因为对 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，算子 $D^\alpha=\left(\frac{1}{i}\right)^{[\alpha]}\partial^{[\alpha]}/(\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n})$，这个定义在一般流形 M 上是不能用的，因为它使用了特定的坐标. 但是这可以按一般方法修改如下. 用有限多个坐标邻域 (U_i) 覆盖 M. 记 U_i 上的 D^α 为 D_i^α. 选取从属于 (U_i) 的一的分割 (λ_i) 使 λ_i 具有含于 U_i 中的紧支集. 然后积分

$$|D_i^\alpha\varphi|^2=\int_M\{D_i^\alpha(\lambda_i\varphi)\}^2$$

有意义，而我们定义

$$|\varphi|_s^2=\sum_{[\alpha]\leqslant s,i}|D_i^\alpha\varphi|^2.$$

在此定义中有许多东西待选定. 显然，不同的选法几乎一定导致不同的结果. 然而，它们必互相等价因而没有关系. 现在我

们要精确一点了. 记住，矢量空间 V 上两个范数 $|\cdot|$ 和 $|\cdot|_1$ 为等价，如果存在常数 A 和 B 使对一切 $x\in V$ 有

$$|x|\leqslant A|x|_1,\quad |x|_1\leqslant B|x|.$$

若此式成立，显然一个序列 (x_n) 在范数 $|\cdot|$ 下为收敛或 Cauchy 序列 iff 它在 $|\cdot|_1$ 下也是收敛的或 Cauchy 的. 前说用哪一个范数"没有"关系就是这个意思. 喜欢一般理论的人可以这样说：$|\cdot|\sim|\cdot|_1$ 即指它们定义相同的一致结构.

我们可以用一种内蕴的、与坐标无关的形式如下：注意到 M 是一 Riemann 流形，所以矢量场 X 有以下的范数

$$|X|^2=\int_M\langle X,X\rangle\omega_0\quad(\omega_0=M\text{ 的体积元素}).$$

例如，在 $\mathbf{R}^n$ 的标准度量下，对 $X=\sum_i X_i\frac{\partial}{\partial x_i}$，我们有

$$|X|^2=\int_M(\sum_i X_i^2)dx$$

(当然要设分量函数 X_i 有紧支集). 例如由此可知在单位球体 $D^n\subset\mathbf{R}^n$ 上，矢量场 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ($i=1,\cdots,n$) 的范数是常数. 对于任意矢量场 X 则有

$$|X\varphi|^2=\int|\sum_i X_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}|^2dx\leqslant(\int|\sum_i X_i^2|dx)(\int\sum_i(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i})^2dx)$$
$$\leqslant|X|^2|\varphi|_1^2.$$

因此，若定义一新范数 $\|\cdot\|$ 为

$$\|\varphi\|=\sup_{|X|=1}|X\varphi|,$$

则有

$$\|\varphi\|\leqslant|\varphi|_1.$$

另一方面又有

$$|\varphi|_1^2=\int\sum_i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2dx\leqslant n\|\varphi\|.$$

故在任一紧集 $K\subset\mathbf{R}^n$ 上，$|\cdot|_1$ 与 $\|\cdot\|$ 等价. 后一定义只用了矢量场及其范数，所以可在任一 Riemann 流形 M 上使用. 这样 M 上

的 L^2_s-范数可定义为

$$|\varphi|_s^2 = \sup_{|X_i|=1, a\leq s} |X_1\cdots X_a\varphi|^2.$$

可能大家愿讨论一下当 M 为紧（或 φ 有紧支集）时此定义的合理性及其与以前使用局部坐标的定义的一致性. 但这只不过是使用一下 Schwartz 不等式.

迄今只讨论了函数即 0-形式. 对一般的 Hodge 定理，还需讨论高阶形式. 在环面情况下不需要这样作，因为高阶形式只不过是一组分量函数，而对一般流形当然不是这样. 初看起来这只是一个小问题：只需把函数 φ 易为形式即可. 这正是我们想做的事，但在目前这种说法还没有意义. 让我们复习一些非常基本的东西.

回顾一下，光滑流形及矢量场概念就是为了使定义在 M 上的函数 φ 的方向导数 $X\varphi$ 有意义. 但是再稍微回想一下就发现我们其实什么也没有微分. 从物理学的观点看这是很不够的. 例如设矢量场 Y 表示流体的速度场. 我们肯定想知道 Y 如何沿另一方向场 X 变化. 为什么没有矢量场 Y 相对于 X 的方向导数 $D_X(Y)$ 的定义，实际上除函数外什么东西都没有方向导数，其原因是双重的. 首先，迄今为止我们并不需要，而更重要的是，没有其它的构造我们也做不了这件事. 其原因当然还在不变性. 设 X 和 Y 在某坐标系下的局部表示是：$X=\sum_i X_i\frac{\partial}{\partial x_i}$，$Y=\sum_i Y_i\frac{\partial}{\partial x_i}$，直接模仿欧氏空间情况定义

$$D_X(Y)=\sum_{i,j}\left(X_i\frac{\partial Y_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

是不合理的. 因为“分量” $\sum_i X_i\frac{\partial Y_j}{\partial x_i}$ 变换规则不对，因而它不是矢量场. 与此对比，请读者回想一下对于函数 φ，矢量场 X 的定义恰好使 $\sum_i X_i\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_i}$ 不变.

但是我们确需在欧氏空间以外来作微分 $D_X(Y)$. 例如在曲面论中很自然地出现它. 设 $M\subset\mathbb{R}^3$ 为一曲面，$P_0\in M$ 为一点. M 局部

地可表示为一轨迹$\{x\in\mathbf{R}^3\mid f(x)=0\}$，$f:U\longrightarrow\mathbf{R}$ 是定义在 P_0 的某邻域 U 中的函数．$P\in M$ 处的切空间 $T_P(M)$ 可看作 $T_P(\mathbf{R}^3)=\mathbf{R}^3$ 的子空间，而由适合$\langle v,\mathrm{grad}f\rangle=0$ 的 $v\in\mathbf{R}^3$ 构成，即 grad$f$ 是 M 的法矢量场．今设 X,Y 是 M 的切矢量场，即

$$\langle X,\mathrm{grad}f\rangle=\langle Y,\mathrm{grad}f\rangle=0.$$

没有理由相信按通常 $\mathbf{R}^3$ 意义作的方向导数 $D_X(Y)=\sum_{i,j}X_i(Y_j)\frac{\partial}{\partial x_j}$ 会正交于 grad$f$．但我们仍可定义一个新的运算使其分量正交于 grad$f$．这就是

$$\widetilde{D}_X(Y)=D_X(Y)-\langle D_X(Y),\mathrm{grad}f\rangle\frac{\mathrm{grad}f}{|\mathrm{grad}f|^2}.$$

由定义$\langle\widetilde{D}_X(Y),\mathrm{grad}f\rangle=0$，所以我们又得一与 M 相关联的对象，$\widetilde{D}_X$ 称为**协变导数**．

一般说来，在流形 M 上没有一个定义协变导数的标准方式．如果想要，就需要一个表示 M 的其它构造的东西．用现代名词来说就是要由单纯的拓扑范畴转入更丰富的几何范畴．上面说的"需要一个"就是指要一个抽象定义使之适合由欧氏空间微分学移来的自然的要求．形式地说，有

定义 令 M 为一光滑流形．所谓一个协变导数或称**联络**，即一算子 D，使对每一对光滑的切矢量场 X,Y 都有另一光滑切矢量场 $D_X(Y)$，满足以下条件：

(1) 对 X 的以函数为系数的线性，即对矢量场 X_1，X_2 和函数 f_1，f_2 有

$$D_{f_1X_1+f_2X_2}(Y)=f_1D_{X_1}(Y)+f_2D_{X_2}(Y).$$

(2) 对 Y 的以常数为系数的线性，即对矢量场 Y_1，Y_2 和常数 λ_1，λ_2 有

$$D_X(\lambda_1Y_1+\lambda_2Y_2)=\lambda_1D_X(Y_1)+\lambda_2D_X(Y_2).$$

(3) Leibnitz 法则．若 Y 为矢量场，f 为函数，则

$$D_X(fY)=X(f)Y+fD_X(Y).$$

以上三个条件中（3）是关键性的，其他的只是例行公事．注意若在（3）中令 f 为常数即得（2）的一部分．又若在点 $P\in M$ 处 $X_P=0$ 或 $Y_P=0$ 及 $f(P)=0$，则 $D_X(fY)_P=0$．这使得当 X,Y 只是局部定义时也可定义 $D_Y(Y)$．例如，若在某一局部邻域 U 中有表示

$$X=\sum_i X_i\frac{\partial}{\partial x_i},\quad Y=\sum_i Y_i\frac{\partial}{\partial x_i},$$

则由（1）、（2）、（3）

$$D_X(Y)=\sum_i X(Y_i)\frac{\partial}{\partial x_i}+\sum_{i,j}Y_iX_jD_{\partial/\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right).$$

我们应该能在 U 中找到适当的函数（Γ^k_{ji}）使得

$$D_{\partial/\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=\sum_k \Gamma^k_{ji}\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

这些函数完全刻画了 D．它们称为 Christoffel-Levi-Civita 符号，在坐标变换 $(x)\leftrightarrow(\xi)$ 下，它们按下述规则变换

$$\Gamma^k_{ji}(x)=\sum_{p,q,r}\left\{\Gamma^r_{pq}(\xi)\frac{\partial\xi_p}{\partial x_j}\frac{\partial\xi_q}{\partial x_i}\frac{\partial x_k}{\partial\xi_r}+\frac{\partial^2\xi_r}{\partial x_j\partial x_i}\frac{\partial x_k}{\partial\xi_r}\right\}.$$

反过来，若用局部坐标邻域系（U_a）覆盖 M．任意在 U_a 上指定的一族函数（Γ^k_{ij}），若服从以上规则，则定义一个协变导数．

令 D_1，D_2 为协变微分而 φ_1，φ_2 为函数．若令 $D=\varphi_1D_1+\varphi_2D_2$，容易计算出

$$D_X(fY)=X(f)(\varphi_1+\varphi_2)Y+fD_X(Y).$$

因此，若 $D=\varphi_1D_1+\varphi_2D_2$ 是一仿射组合，即 $\varphi_1+\varphi_2=1$，D 本身也是一个协变微分．由此易得结论：任意流形 M 上均有协变微分．因为可作 M 的一个开覆盖（U_a）以及从属于它的一的分割（φ_a）．令 D_a 是定义在 U_a 上的协变微分，例如对欧氏空间就可用 $\Gamma^k_{ij}=0$ 来定义它，于是

$$D=\sum_a\varphi_aD_a$$

就是 M 上的协变微分，因为它局部地正是一个仿射组合．

所以，协变微分是相当松散而容易构成的．在某些情况下，可

以更具体一些．例如 M 上有 Riemann 度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 就是一例．设 D 为一协变微分．对矢量场 X，Y 和 Z 我们希望 $X\langle Y,Z\rangle$ 服从通常的平方定律，即有

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle D_X Y,Z\rangle + \langle Y,D_X Z\rangle.$$

如果确是如此，称 D 为"不变"的．我们还希望它服从另一个不太容易说明来处的一般规律．我们称以下张量是协变微分 D 的**挠**：

$$(X,Y)\longmapsto \mathrm{Tor}(X,Y)=D_X Y-D_Y X-[X,Y].$$

若 $\mathrm{Tor}=0$，D 就称为**无挠的**．我们于是有

Riemann 联络的基本引理 在 Riemann 流形 M 上恒存在唯一不变的无挠联络 D，称为与 Riemann 度量相关的 Riemann 联络．

证明很容易而众所周知．设 D 是这样一个联络．令 U 为一坐标邻域而在 U 上 $X_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$，度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 可用 (g_{ij}) 表示，而 $g_{ij}=\langle X_i,X_j\rangle$．令 Γ_{ij}^k 为 Christoffel 符号，其定义为

$$D_{X_i}(X_j)=\sum_k \Gamma_{ij}^k X_k.$$

因 $[X_i,X_j]=0$，无挠条件就变成了 Γ_{ij}^k 对 i，j 对称．将不变条件写出来就是：

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i}=\sum_l(\Gamma_{ij}^l g_{lk}+\Gamma_{ik}^l g_{jl}).$$

将指标轮换即可得出类似的条件：

$$\frac{\partial g_{ji}}{\partial x_k}=\sum_l(\Gamma_{kj}^l g_{li}+\Gamma_{ki}^l g_{jl}),$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}=\sum_l(\Gamma_{ji}^l g_{lk}+\Gamma_{jk}^l g_{il}).$$

记住 (g_{ij}) 也是对称的，即有

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i}+\frac{\partial g_{ji}}{\partial x_k}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}=2\sum_l \Gamma_{ki}^l g_{jl}.$$

再有 (g_{ij}) 是非奇异的，若记其逆为 $(h_{ij})=(g_{ij})^{-1}$，有

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\sum_{l} h_{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\right).$$

所以，若 D 存在，它必唯一地由度量决定如上．再后再由上式定义 D 即可验证它满足变换的规律，由此得知 D 的存在．

只要能微分矢量场，就有自然地方法微分其它对象．例如，若 ω 为 1-形式而 Y 为矢量场，可作函数 $\langle\omega, Y\rangle$ 再求导 $X\langle\omega,Y\rangle$．在欧氏空间中，$\langle\omega,Y\rangle$ 只是二次表达式 $\sum_i \omega_i Y_i$，它服从微分的 Leibnitz 公式．这就提示我们在一般情况下应有

$$X\langle\omega,Y\rangle = \langle D_X\omega,Y\rangle + \langle\omega,D_XY\rangle.$$

所以 1-形式 ω 的协变导数应按下式定义：

$$\langle D_X\omega,Y\rangle = X\langle\omega,Y\rangle - \langle\omega,D_XY\rangle.$$

只需验证其合理性，即 $D_X\omega$ 确是一个 1-形式．为此首先需对任意函数 f 证明恒等式

$$\langle D_X\omega,fY\rangle = f\langle D_X\omega,Y\rangle.$$

初看起来不甚容易，但是我们有

$$\begin{aligned}\langle D_X\omega,fY\rangle &= X\langle\omega,fY\rangle - \langle\omega,D_X(fY)\rangle\\ &= X(f\langle\omega,Y\rangle) - \langle\omega,X(f)Y\rangle - \langle\omega,fD_XY\rangle\\ &= X(f)\langle\omega,Y\rangle - X(f)\langle\omega,Y\rangle + fX\langle\omega,Y\rangle - f\langle\omega,D_XY\rangle\\ &= f\langle D_X\omega,Y\rangle.\end{aligned}$$

出麻烦的项都已消去．

对 D_X 另一个自然的要求仍是 Leibnitz 法则

$$D_X(\omega_1\wedge\omega_2) = D_X\omega_1\wedge\omega_2 + (-1)^p\omega_1\wedge D_X\omega_2,$$

$p=\deg\omega_1$．因任意形式局部地均为 1-形式之外积之和，因此上式可用来对任意形式 ω 定义 $D_X\omega$．很容易写出一般公式．若 ω 是一 p-形式，$D_X\omega$ 应是由下式定义的 p-形式：

$$\langle D_X\omega;Y_1,\cdots,Y_p\rangle = X\langle\omega;Y_1,\cdots,Y_p\rangle + \sum_{i=1}^{p}\langle\omega;Y_1,\cdots,D_XY_i,\cdots,Y_p\rangle.$$

万事俱备，我们即可最后定义紧定向 Riemann 流形上的光滑形式空间 $A^*(M)$上的 Sobolev s-范数为

$$|\omega|_s^2 = \sup_{|X_i| \leq 1, i=1,\cdots,a, a \leq s} |D_{X_1} D_{X_2} \cdots D_{X_a} \omega|^2.$$

$|X_i|$是矢量场的 Riemann 度量，D_{X_i}是 Riemann 联络而$|\omega|^2$是 ω 的 L_2 范数，这在前面已定义过了.

在结束前最后还有几句话. 由方程

$$X\langle \omega, Y \rangle = \langle D_X\omega, Y \rangle + \langle \omega, D_X Y \rangle$$

可见 $D_X\omega$ 和 $D_X Y$ 可互相决定，即定义矢量场的或 1-形式的协变导数完全是对偶的概念. 如果用 $D_X\omega$ 为基本的概念，我们显然有以下的性质：

(1) D 对变量 X 以及作为系数的函数 f 是双线性的；

(2) D 对变量 ω 是可加的且适合 Leibnitz 法则

$$D_X(f\omega) = X(f)\omega + fD_X\omega,$$

f 是函数系数.

也可用局部坐标描述 $D_X\omega$. 它比 Christoffel 记号 Γ^k_{ij}在代数上更方便. 若 $(x_1, \cdots, x_n)$ 是一个局部坐标，D_X 可完全由下式决定：

$$D_X(dx_i) = \sum_j \omega_{ij}(X) dx_j.$$

$\omega_{ij}(X)$当然依赖于矢量场 X. 由(1)显然有：

$$\omega_{ij}: X \longmapsto \omega_{ij}(X)$$

定义了 $D_X\omega$. 矩阵$(\omega_{ij}) = \omega$ 称为联络形式. 使用矩阵可以"节省"一些指标. 当然，将 $\omega_{ij}(X)$用 X 的系数表示，又可得到 Christoffel 记号 Γ^k_{ij}.

联络形式 ω 只是局部定义. 容易写出其变换规则. 令$(\xi) \leftrightarrow (x)$为坐标变换. 设

$$D_X(d\xi_l) = \sum_k \tilde{\omega}_{lk}(X) d\xi_k = \sum_{k,q} \tilde{\omega}_{lk}(X) \frac{\partial \xi_k}{\partial x_q} dx_q.$$

因为

$$D_X(d\xi_l) = D_X\Big(\sum_p \frac{\partial \xi_l}{\partial x_p} dx_p\Big) = \sum_p X\left(\frac{\partial \xi_l}{\partial x_p}\right) dx_p + \sum_{p,q} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_p} \omega_{pq}(X) dx_q,$$

这就给出

$$\sum_l \tilde{\omega}_{pl}(X)\frac{\partial \xi_l}{\partial x_q} = X\left(\frac{\partial \xi_l}{\partial x_q}\right) + \sum_p \frac{\partial \xi_l}{\partial x_p}\omega_{pq}(X). \qquad (*)$$

这和 Γ^k_{ij} 的变换公式一样复杂. 但是可以用矩阵和 1-形式的记号把它重写得更紧凑. 用 A 表 Jacobi 矩阵 $\left(\frac{\partial \xi_l}{\partial x_q}\right)$, 上式左方即 $(\tilde{\omega})A$. 矩阵 $X\left(\frac{\partial \xi_l}{\partial x_q}\right) = \left(X\left(\frac{\partial \xi_l}{\partial x_q}\right)\right)$ 可重写如下. 记住对于函数 φ 有 $X(\varphi) = \langle X, d\varphi\rangle$, 故若用 dA 表 1-形式的矩阵 (dA_{ij}), 有

$$\left(X\left(\frac{\partial \xi_l}{\partial x_q}\right)\right) = dA(X).$$

所以可省去变元 X 而将 $(*)$ 改写为

$$\tilde{\omega}A = dA + A\omega,$$

亦即

$$\tilde{\omega} = dA \cdot A^{-1} + A\omega A^{-1}. \qquad (**)$$

这个变换公式很有趣. 第二项 $A\omega A^{-1}$ 很象基底变化时线性映射矩阵表示的变换式. 若没有第一项 $(dA)A^{-1}$, 由一覆盖 (U_a) 得出的 (ω_a) 之集可以拼合成一个整体的 1-形式, 不过其值是线性变换而不是数. 按目前这样, 我们还做不到这一点. 但是可以把这些局部的东西拼起另一个流形 $P(M)$ 上的 1-形式. 具体地说 $P(M) \longrightarrow M$ 是与 M 的切丛 $T(M)$ 相关的主丛(Jacobi 矩阵即其中的元)这个概念导致了主丛上的联络这一最一般的定义. 许多读者无疑熟悉这一最抽象的讲法作为微分几何的起点.

§9. 复 情 况

Hodge 定理最惊人之处自然在于它证明了肯定为无限维的光滑形式空间 $A^*(M)$ 的调和形式空间 $\mathscr{H}$ 居然是有限维的. 从技术观点来看, 这只是 Δ 的椭圆性的结论, 椭圆性又使得可作出紧算子 G (Green 算子). 但若从迄今的技术方面 (已相当可观了) 退后一步看, 决不可忘记, Hodge 定理是一个整体定理, 因为在 $\mathbb{R}^n$ 的开

集上调和函数空间决非有限维的．我们已看到，Hodge 定理蕴涵了：紧流形的 de Rham 群是有限维的．这当然是已知的事，但来之不易：要有 de Rham 定理把 de Rham 群和奇异群等同起来，然后又要有一般的代数拓扑工具把后者与单纯形群等同起来，顺便还要用光滑流形三角剖分的 Whitney 定理．Hodge 定理的好处不但在于它给出了一个直接的证明，而且还可用于没有 de Rham 定理的地方．读者可能还记得，在讨论 de Rham 定理时，提到过类似作法的 Dolbeault 上同调，并且讨论过有限维问题．因此希望在稍作修改后 Hodge 定理仍可应用于此，这是合理的．其实我们是把事情颠倒了：Hodge 定理事实上是先对复流形证明的，后来人们才看到，在实的情况它还更简单些．所以在本章之尾讲一下复情况是合适的．

记住，对复流形 M 我们首先把它看作实光滑流形并取其切丛 $T(M)$ 和余切丛 $T^*(M)$．然后通过将它们复化为$T_C(M)=T(M)\otimes \mathbf{C}$，$T_C^*(M)=T^*(M)\otimes\mathbf{C}$ 以得 M 的复构造．这样作其本身并没有什么．使用复坐标$(z_1,\cdots,z_n)$，$z_j=x_j+iy_j$，可以将 $T_C(M)$分解为子空间

$$T^+=\langle\frac{\partial}{\partial z_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y_j}\right)\rangle,$$

$$T^-=\langle\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y_j}\right)\rangle,$$

$T_C^*(M)$则分解为它们的对偶空间：

$$T^{*+}=\langle dz_j=dx_j+\mathrm{i}dy_j\rangle,$$

$$T^{*-}=\langle d\bar{z}_j=dx_j-\mathrm{i}dy_j\rangle.$$

M 的复构造保证了这些分解与复坐标的取法无关．这样，全纯的东西可用$\frac{\partial}{\partial z_j}$来表示，例如复值函数 f 为全纯，只要

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}=0,\qquad j=1,\cdots,n.$$

分解 $T_C^*(M)=T^{*+}\oplus T^{*-}$诱导出 $\Lambda T_C^*(M)$之分解为子空间 $\Lambda^pT^{*+}\otimes\Lambda^qT^{*-}$之和，复值形式 $\Lambda_C^*(M)$也就分解为(p,q)型形式的子空间

$A^{p,q}(M)$之和. 外微分 d 只使 $A^{p,q}$变成两个：

$$d: A^{p,q}(M) = A^{p+1,q}(M) \oplus A^{p,q+1}(M).$$

所以对每一个分量我们可以写出 $d=\partial+\bar{\partial}$. $\bar{\partial}$正是刻画全纯对象的算子. 例如对于函数 $f\in A^{0,0}(M)$，

$$\bar{\partial} f = \sum_j \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j,$$

所以 $\bar{\partial} f=0$ 就意味着 f 为全纯. Dolbeault 上同调 $H^{p,q}(M)$是按通常的方式用 $\bar{\partial}$来定义的. 为了得出调和的对象，只需仿实情况的程序使用 $\bar{\partial}$即可.

首先，M 有典则的定向. 在局部坐标中，体积形式取为 $dx_1\wedge dy_1\wedge\cdots\wedge dx_n\wedge dy_n$. $T(M)$上也可如通常那样给出 Riemann 度量. 然后它可自然地拓展为 $T_c(M)$和 $T_c^*(M)$上的 Hermite 度量. 我们仍有 $*$ 算子. 记住 $A^{p,q}(M)$是 $dz_{i_1}\wedge\cdots\wedge dz_{i_p}\wedge d\bar{z}_{j_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_{j_q}$，即 p 个 dz_i，q 个 $d\bar{z}_j$. $*$ 则将它变为"相补"的基底：

$$*: A^{p,q}(M) \longrightarrow A^{n-p,n-q}(M).$$

因此，形式伴算子

$$\bar{\delta} = *\bar{\partial}*$$

变 $A^{p,q}(M)$为 $A^{p,q-1}(M)$. 定义 Laplace 算子

$$\Delta = \bar{\partial}\,\bar{\delta} + \bar{\delta}\,\bar{\partial}$$

如前，所得是 $A^{p,q}(M)$上的二阶算子. $\mathscr{H}^{p,q}(M)=\ker\Delta$ 即(p,q)型调和形式空间. 我们有

Hodge 分解定理 对紧的复 Riemann 流形 M，(p,q)型调和形式空间 $\mathscr{H}^{p,q}(M)$是有限维的. 光滑复值形式空间 $A_c^*(M)$可分解为直和

$$A_c^*(M) = \mathscr{H}(M) \oplus \mathrm{Im}\bar{\partial} \oplus \mathrm{Im}\bar{\delta}.$$

和前面一样，这给出了调和形式群 $\mathscr{H}^{p,q}(M)$和 Dolbeault 群 $H^{p,q}(M)$的同构，表明当 M 为紧时，后者是有限维的. 得到这个基

本事实后可以对微分算子 $\bar{\partial}+\bar{\delta}$定义其数值不变量. 例如,和前面一样可将 $A_c^*(M)$分裂为偶数阶与奇数阶形式,$\bar{\partial}+\bar{\delta}$的指标当然就是 Dolbeault 群 $H_{\bar{\partial}}^*(M)$的 Euler 示性数. 但和实的情况不同,我们不知道它是否拓扑不变量,那么,指标意味着什么呢? 说不定将来会讲到它.

第十八章 Riemann-Roch 定理

§1. 亚纯函数

虽然我们已讨论了复流形概念，构造了 Dolbeault 上同调，那只是为了与实光滑流形对比，而没有打算系统展开．为了解由复 Laplace 算子导出的指标定理，要更认真地讨论复流形．最简单(也是最经典)的情况是一维复流形．它们也称为 Riemann 曲面，因为其实维数为 2．例如大家记得本书一开始就看到了在环面 T^2 上有不可数多个不同的 Riemann 曲面构造．Riemann 曲面表示我们将讨论单复变函数．所以我们先复习一些基本事实．虽然读者无疑已熟知这些主题，我们仍将从光滑流形的观点与语言来复习它．

令 $f: U \longrightarrow \mathbf{C}$ 是定义在开集 $U \subset \mathbf{C}$ 上的复值函数 $P \in U$ 为一个点．f 在 P 处的复意义导数定义为极限

$$f'(P) = \lim_{z \to P}(f(z) - f(P))/(z - P).$$

这虽然从表面上看与实变量的导数定义一样，我们知道其含义却不同．例如可令 $z-P=h$ 或 ih 而 h 为实，这样我们会得到

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{z \to P} \frac{f(z) - f(P)}{z - P} = \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{1}$$

将 f 写为 $u+\mathrm{i}v$ 就会得出 Cauchy-Riemann 方程组

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2}$$

反过来，若 $f \in C^r$ 且 Cauchy-Riemann 方程组成立，则 $f'(z)$ 存在．这就是全纯函数概念．大家记得，表述这件事的一个方便的方式是引入(复)切矢量

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right),\qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

(2) 式就可表为

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0. \tag{3}$$

若 f 是一函数，我们可考虑 1-形式 $\omega=f(z)dz$，而

$$d\omega=df\wedge dz=\left(\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right)\wedge dz=\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\wedge dz.$$

于是 $f(z)$ 是全纯有另一个说法即形式 $f(z)dz$ 为闭．若 $D\subset U$ 是一个"好"的区域，例如是 R^2 的（实）开区域而边缘为 ∂D，则由 Stokes 定理有

$$\int_{\partial D} f(z)dz=0. \tag{4}$$

它有一个简单但极有用的推广．设 $P\in D\subset U$ 而我们只知道 f 在 $U-P$ 中全纯，则必须作一小圆 C 包围 P．以除去这个小圆的区域为 D'，则对 D' 由 (4) 有

$$\int_{\partial D} f(z)dz=\int_{C} f(z)dz$$

(∂D 与 C 上选适当定向)．但可估计右方．若在 C 上 $|f(z)|\leqslant M(r)$，r 是 C 的半径，则有

$$\left|\int_{C} f(z)dz\right|\leqslant 2\pi rM(r).$$

例如设 f 在 P 点的某邻域（挖去该点）中有界，则当 $r\longrightarrow 0$ 时，$rM(r)\longrightarrow 0$，故 (4) 仍成立，由此可得三个结论．第一个是 Cauchy 积分公式．设 $f(z)$ 在 U 中全纯，则 $g(z)=\dfrac{f(z)-f(P)}{z-P}$ 在 $U-P$ 中全纯，且因 $\lim\limits_{z\longrightarrow P}g(z)=f'(P)$ 存在，故 $g(z)$ 也有界．这样，我们有

$$\int_{C}\frac{f(z)-f(P)}{z-P}dz=0,$$

C 是含于 U 内且包围 P 的曲线，但显然有

$$\int_C \frac{f(P)}{z-P}dz = f(P)\int_{C'} \frac{dz}{z-P} = 2\pi i f(P),$$

C'是含于 C 内的以 P 为心的圆周，所以得

$$f(P) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{z-P}. \tag{5}$$

第二个是 Riemann 可去奇点定理．设 $f(g)$ 在 P 的某个挖去该点的邻域 $U-P$ 中全纯．我们要问 f 可否拓展为整个 U 上的全纯函数，即补充定义 $f(P)$ 之值使它全纯．若可则 $f(z)$ 必在 $U-P$ 上有界．反之若 $f(z)$ 在 $U-P$ 上有界，则可以 (5) 作为 $f(P)$ 之定义．只要 $f(z)$ 在 $U-P$ 中全纯，不论其是否有界这总是可以的．问题在于拓展后的 $f(z)$ 在 P 是否全纯．为此考虑函数 $g(z) = \frac{f(z)-f(Q)}{z-Q}, Q \in U-P$. $g(z)$ 有两个例外点即 P 与 Q．但在每点附近 $g(z)$ 均有界：在 P 附近是由于假设，在 Q 附近是由于 $f'(Q)$ 存在．故由推广的 Cauchy 定理，$\int_C g(z)dz = 0$．这就给出推广的 Cauchy 公式

$$f(Q) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-Q}dz \tag{6}$$

(C 是以 P 为心且包围 Q 的圆周)．但由此有

$$\begin{aligned}\frac{f(Q)-f(P)}{Q-P} &= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{Q-P}\int_C f(z)\left(\frac{1}{z-Q}-\frac{1}{z-P}\right)dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-Q)(z-P)},\end{aligned}$$

它表明

$$f'(P) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-P)^2}dz. \tag{7}$$

若重复这一论证，可证所有导数 $f^{(k)}(P)$ 均存在，而且有显示式

$$f^{(k)}(P) = \frac{k!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-P)^{k+1}}dz.$$

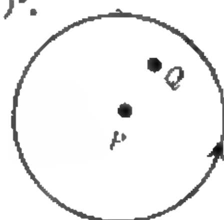
但还可多说几句．利用"移心"公式 (6) 以及

$$\frac{1}{z-Q}=\frac{1}{(z-P)-(P-Q)}$$

$$=\frac{1}{z-P}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{z-Q}{z-P}\right)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-Q)^k}{(z-P)^{k+1}}$$

(这是成立的，因为当 $z\in C$ 时 $\left|\frac{Q-P}{z-P}\right|<1$，而以上级数一致收敛)．于是可以逐项积分而得

$$f(Q)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)dz}{(z-Q)^{k+1}}\right](Q-P)^k.$$



这正是 $f(z)$ 在 P 点的 Taylor 展开式

$$f(Q)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(P)}{k!}(Q-P)^k.$$

这样可见 Cauchy 和 Weierstrass 全纯性的定义一致．

我们提到过几次，由 Cauchy 积分公式可得最大模原理而知局部极大、极小不存在．由此又得 Liouville 定理，即在紧复流形上唯一的整体全纯函数是常数．所以它们没有什么用．要想得到关于流形更多的知识，需要更为多变的东西．这就是亚纯函数的概念．仍设 $P\in\mathbf{C}$ 为一定点，$f(z)$ 在挖了一点的邻域 $U-P$ 中全纯．我们已看到，要想在 P 有真的奇性，$f(z)$ 不可能在 $U-P$ 中有界．但"坏"的性态程度也不同．可能会找到一整数 $k\geqslant 0$ 使 $(z-P)^kf(z)$ 有界．这时 P 称为 $f(z)$ 的极点，而最小的这种 k 称为其阶．例如，零阶极点即可去奇点，如果任何非负整数 k 都不能使 $(z-P)^k f(z)$ 有界，P 就真正是一个"坏"点称为本性奇点．换言之，k 阶极点还是一个"温和"的奇点，乘以因子 $(z-P)^k$ 后 P 就变成了可去奇点．但对本性奇点就办不到．事实上，大家记得极点可以根本不看作奇点．只要用 Riemann 球 S^2 代替复平面 $\mathbf{C}$ 就可做到这件事．记住，复射影平面 $\mathbf{CP}^1$ 是一维复流形而在拓扑上与 S^2 相同．$\mathbf{CP}^1$ 的复构造可用两个坐标邻域描述

$$U_0=\{[z_0,z_1]\,|\,z_0\neq 0\},U_1=\{[z_0,z_1]\,|\,z_1\neq 0\},$$

而

$$\varphi_0 : U_0 \longrightarrow \mathbf{C}, \quad [z_0, z_1] \longmapsto z_1/z_0;$$
$$\varphi_1 : U_1 \longrightarrow \mathbf{C}, \quad [z_0, z_1] \longmapsto z_0/z_1.$$
其迁移函数是
$$\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1} : \varphi_0(U_0 \cap U_1) \simeq \mathbf{C} - 0 \longrightarrow \varphi_1(U_0 \cap U_1) \simeq \mathbf{C} - 0,$$
$$z \longmapsto 1/z.$$

$\mathbf{CP}^1 - U_0$ 只有一点 $[0, 1]$. 因为 $U_0 = \mathbf{C}$，可将 $\mathbf{CP}^1$ 看成 $\mathbf{C}$ 的一点紧化，$[0, 1]$ 就看成无穷远点∞. 在 $\mathbf{C}$ 上可用通常的坐标. 例如 $\infty \cup \{z \in \mathbf{C}, z \neq 0\}$ 就是∞的一个邻域，而在其中则可用下面的坐标
$$\infty \cup \{z \in \mathbf{C} | z \neq 0\} \longrightarrow \mathbf{C},$$
$$\infty \longmapsto 0, \quad z \longmapsto 1/z.$$
在这个特定的拓扑构造下，$\mathbf{CP}^1 \simeq S^2 \simeq \mathbf{C} \cup \infty$称为 Riemann 球.

现令 P 为 $f(z)$ 的 $k(k \geqslant 0)$ 阶极点，所以 $g(z) = (z-P)^k f(z)$ 在整个 U 上全纯，所以可在 P 点将它展为 Taylor 级数：
$$g(z) = \sum_i a_i (z-P)^i.$$
很清楚 $g(P) = a_0 \neq 0$，否则从 $g(z)$ 中又可取出因子 $z-P$ 而使得 $(z-P)^{k-1} f(z)$ 也有界. 这与 k（作为使 $(z-P)^k f(z)$ 有界的最小整数）之定义矛盾. 考虑 $C \subset S^2$，有映射
$$f : U - P \longrightarrow C \longrightarrow S^2.$$
令 $f(P) = \infty$ 即可将 f 拓展为 $f : U \longrightarrow S^2$. 因值域不再是 $\mathbf{C}$，我们宁称 f 为一映射而不称为一函数. 所以，将 f 拓展为一函数不一定能行，但一定可拓展为到 S^2 内的"映射"，而不问 P 点的奇性是何性质. 重要的是，若 P 是一极点则拓展后的映射 $f : U \longrightarrow S^2$，作为复流形间的映射，总是全纯映射. 这可由 S^2 的构造直接得出. 因为若记 α 为以下局部坐标
$$\alpha : \infty \cup \{z \in \mathbf{C}, z \neq 0\} \longrightarrow \mathbf{C},$$
$$z \longmapsto 1/z, \quad \infty \longmapsto 0,$$
则 f 的局部表示 $\tilde{f} = \alpha \circ f : U \longrightarrow \mathbf{C}$ 就是

$$\tilde{f}(z) = 1/f(z) = (z-P)^k/g(z), \quad z \neq P,$$
$$\tilde{f}(P) = 0.$$

因 $g(P) \neq 0$，我们不需要第二个方程，第一个方程自然是 U 上的全纯函数.

上面的计算读者当然都已熟知，它指出 k 阶极点和 k 阶零点毫无区别. 确实地说，在 S^2 上不仅 0 与 ∞ 没有区别，任意两点都没有区别. 因此全纯函数的任意值 $f(P)$ 都应有其阶数. $f(P)$ 的阶数就是其下 Taylor 展开式的第一个非 0 系数 a_k：

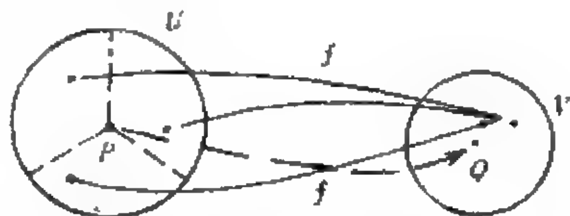
$$f(z) - f(P) = \sum_{i \geq 1} a_i (z-P)^i = (z-P)^k g(z), g(P) \neq 0.$$

从映射的观点来看，因子 $g(z)$ 可以丢掉. 事实上，考虑两个复流形间的映射 $f: M \longrightarrow N$，$P \in M$，$f(P) = Q \in N$，而且

$$\tilde{f}(z) = z^k g(z), \quad k > 0,$$

是 f 在 P 的邻域 (U, φ) 和 Q 的邻域 $(V, \psi)(\varphi(P) = 0, \psi(Q) = 0)$ 中的局部表示. 因 $g(0) \neq 0$，可以考虑 $g(z)^{1/k}$ 的一个全纯分枝，即一全纯函数 $h(z)$ 存在于 $z=0$ 的邻域中使 $h(z)^k = g(z)$. 定义 $\alpha(z) = zh(z)$，我们有 $\alpha'(0) = h(0) \neq 0$，所以 $\alpha \circ \varphi = \widetilde{\varphi}$ 是一新坐标. 在此坐标中，f 变成了

$$\hat{f}(w) = \tilde{f}(\alpha^{-1}(w)) = \tilde{f}(z) = z^k g(z)$$
$$= (zh(z))^k = \alpha(z)^k = w^k.$$



这是非常直观而又简单的. 在光滑范畴中肯定办不到. 理由当然在于幂级数展开式. 当然需设 f 不是常值映射即 $k \neq 0$, $k > 0$. 现在 f 只不过是把 $Q = f(P)$ 的一个邻域盖了 k 次. 在 Q 的邻域 V 中，除 Q 以外的一切点都恰好被 U 中 k 个不同点盖住. 象上而这样的图象称为"分枝"覆盖. 整数 k 称为分枝数. $k=1$ 时 f 是 U 到 V 上的微分同胚. 一般情况下 f 也将 U 映满 V. 特别是 f 总是开映射（这是最大模原理的另一种说法）. 若 f 之定义域 X 为

紧而 Y 为连通，则 $f: X \longrightarrow Y$ 是满的. 记住，$Q \in Y$ 为正则值，当每一个 $P \in f^{-1}(Q)$ 均未分枝，于是 f 作为映射在 Q 点之阶数之定义是

$$\deg(f) = \sum_{P \in f^{-1}(Q)} \varepsilon(P),$$

$\varepsilon(P) = \pm 1$ 视 f 保持定向与否而定. 但记住若用复坐标则 X, Y 有典则定向，且 $\tilde{f}(z) = z^n$ 显然保持定向. 因此现在有 $\deg f = \#\{f^{-1}(Q)\} = n$ 就是 $f^{-1}(Q)$ 中的点数. 再者，即令 Q 非正则值，在其任意邻域中也都有正则值. 若再看局部图象，就可看见，若计及重数（即分枝数）则 $\#\{f^{-1}(Q)\}$ 在 Y 中处处一样. 这样，$f: X \longrightarrow Y$ 的整体图象就很容易想象了：Y 中除了有限多个点以外，每个点均被 X 中 n 个不同点所盖住，故 X 是一覆盖空间. 在例外点上则有分枝覆盖，即覆盖的各"叶"（或称"枝"）在这些点上给捏在一起了. 这就是多值函数的 Riemann 曲面的模型. 例如 $f(z) = \sqrt{z}$ 就是 S^2 的二重覆盖而以 0 和∞为枝点. 我们中的绝大多数在第一次学复变函数课时都觉得自己没有真正懂得它，说不定以后还得回过来讲.

这样，在用了 Riemann 球以后就没有必要再把极点看作例外或奇点了. 全纯映射 $f: X \longrightarrow S^2$ 就称为 X 上的**亚纯函数**. 尽管这种看法很有用，特别是对 f 的几何性态如我们所讨论的. 但老观点即认为 f 在 $\mathbf{C}$ 中取值，仍是不可少的. 因为 $\mathbf{C}$ 在代数上是一域而可以计算. 所以我们必得容忍说法的混用，因为在极点 $f^{-1}(\infty)$ 上 f 并无定义. 但是就说 $f: X \longrightarrow \mathbf{C}$ 是 X 上的亚纯函数也不会造成混乱. 例如，若把两个亚纯函数 f, g 相加，所得 $f+g$ 可能因相消而失去极点.

亚纯函数的最基本的事实，我们人人都知道的，是 Mittag-Leffler 定理. 它大体上是说，在复平面 $\mathbf{C}$ 上可如你所需的定制亚纯函数，只需服从一些自然的限制，例如这样一些限制：因为极点是孤立的，其集处为离散集；因为 $\mathbf{C}$ 非紧，此集不一定有限但必为

可数. 这样，指定一串点 (P_i) 使 $|P_1|\leqslant|P_2|\leqslant\cdots$, $\lim|P_i|=\infty$，并要求定制一个亚纯函数 f 以 P_i 为极点. 我们知道，局部地必有

$$f(z)=g(z)/(z-P_i)^{k_i},(k_i>0)$$

$g(z)$ 在 P_i 附近全纯且 $g(P_i)\neq 0$. 将它展为 Taylor 级数：$g(z)=\sum_{n\geqslant 0}b_n(z-P_i)^n$，即得 $f(z)$ 在 P_i 处的 Laurent 级数展开式

$$f(z)=\frac{a_{-k_i}}{(z-P_i)^{k_i}}+\cdots+\frac{a_{-1}}{(z-P_i)}+a_0+a_1(z-P_i)+\cdots.$$

$z-P_i$ 之负幂多项式

$$\mathscr{P}_i\left(\frac{1}{z-P_i}\right)=\frac{a_{-k_i}}{(z-P_i)^{k_i}}+\cdots+\frac{a_{-1}}{(z-P_i)}$$

称为 $f(z)$ 在 P_i 的主部. 我们有以下的

Mittag-Leffler 定理 已给任意离散的点列 (P_i) 以及多项式列 $(\mathscr{P}_i(t))$，必存在一定义在整个复平面 $\mathbf{C}$ 上的亚纯函数，以 (P_i) 为极点，$\mathscr{P}_i\left(\frac{1}{z-P_i}\right)$ 为 P_i 处之主部.

证 函数 $g_i(z)=\mathscr{P}_i\left(\frac{1}{z-P_i}\right)$ 本身就是 $\mathbf{C}$ 上的亚纯函数，而只有一极点 P_i 及主部 $\mathscr{P}_i\left(\frac{1}{z-P_i}\right)$. 最简单的事就是令 $f(z)=\sum_i g_i(z)$. 但是它可能不收敛，所以要稍加修改以保证收敛性. 不失一般性，可设对一切 i，$|P_i|>0$. 于是可在 $z=0$ 处将 $g_i(z)$ 展为幂级数. 其收敛半径至少是 $|P_i|$，所以可取部分和 $\tilde{g}_i(z)$ 使在闭圆域 $|z|\leqslant|P_i|/2$ 上一致地有

$$|g_i(z)-\tilde{g}_i(z)|\leqslant 2^{-i}.$$

现在考虑级数 $\sum_i(g_i(z)-\tilde{g}_i(z))$. 对任意的以 0 为心的圆域 D，必可找到整数 k 使 $D\subset\{z\mid|z|\leqslant|P_k|/2\}$. 级数的前几项 $\sum_{i\leqslant k}(g_i(z)-\tilde{g}_i(z))$ 因为是 $\mathbf{C}$ 上的亚纯函数，当然在 D 上也是. 级数余项 $\sum_{i>k}(g_i(z)-\tilde{g}_i(z))$ 在 D 上一致地以收敛级数 $\sum_{i>k}2^{-i}$ 为优级数. 因

为其每一项 $g_i(z)-\tilde{g}_i(z)$ 在 D 中全纯（$g_i(z)$ 的奇点 P_i 因 $i>k$ 而在 D 外．$\tilde{g}_i(z)$ 是多项式而没有奇点），故其和是 D 中的全纯函数．这样

$$\tilde{f}(z)=\sum_i (g_i(z)-\tilde{g}_i(z))$$

即所求的亚纯函数．

§ 2. Čech 构造和层

Mittag-Leffler 定理对 C 的其它区域也成立．例如稍微修改我们的证明即可用于开圆域 $D^{\circ}=\{z\,|\,|z|<1\}$．我们顺便借此机会指出在讨论复流形时的很重要的事实．和光滑范畴不同，对整个 C 成立的事对开圆域 D° 不一定自动成立，原因在于 C 和 D° 作为复流形并不同构．这时若有同构 $\varphi: \mathrm{C}\longrightarrow D^{\circ}$ 则 φ 必为整个 C 上的有界全纯函数，故由 Liouville 定理，φ 必为常数．所以 C 和 D° 的情况要分别证明．Mittag-Leffler 定理确实对任意开集 $U\subset\mathrm{C}$ 成立，但它一般地肯定不对．例如在任意环面 $\mathrm{C}/\Gamma=T^2$ 上决不会有只有一个单极点（一阶极点）的亚纯函数．因为我们已看到，如果有的话，它将是一个阶为 1 的全纯映射 $f: T^2\longrightarrow S^2$，即 f 应为一对一．但因 f 也是满射，它必是同构，而这是不可能的．这也说明我们为什么关心这个问题．因为我们已说过，亚纯函数 $f: X\longrightarrow S^2$ 是对 X 作为 S^2 的分枝覆盖空间的特定的描述，这种覆盖空间对理解 X 的构造是很有用的．

要在一般的 Riemann 面上提出 Mittag-Leffler 问题，需要细心一点．可以给出一离散点集 (P_i) 为极点，这没有问题，但主部概念依赖于局部坐标．然而可将这一点改述如下：设 f，g 是某开集 $U\subset\mathrm{C}$ 上的二亚纯函数，f 与 g 有相同的极点和主部 iff $f-g$ 在 U 上全纯，或者更准确一些说，$f-g$ 的奇点均为可去奇点．所以我们可以一开始就给出 X 的一个开覆盖 $\mathscr{U}=(U_\alpha)$，每个 U_α 上给定一

亚纯函数，而且要求在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上 $f_\alpha - f_\beta$ 为全纯．Mittag-Leffler 问题就是找一个整体亚纯函数 f，使在 U_α 上，$f - f_\alpha$ 为全纯．若这样的 f 存在并记 $g_\alpha = f_\alpha - f$，则在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上

$$g_\alpha - g_\beta = f_\alpha - f_\beta. \tag{1}$$

反之，若能找到一族全纯函数 (g_α) 使适合 (1) 式，则 $(f_\alpha - g_\alpha)$ 在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上相容并定义一整体亚纯函数 f 使 $g_\alpha = f_\alpha - f$ 在 U_α 上全纯．这个程序中关键在于弄清在哪里谁是全纯或半纯，所以我们搞一点形式的东西和记号．对任一开集 $U \subset X$，令 $O(U)$ 为 U 上之全纯函数空间，$M(U)$ 为半纯函数空间．设有：X 的开覆盖 (U_α) 及一族 (f_α)，$f_\alpha \in M(U_\alpha)$，且适合条件

$$f_\alpha - f_\beta \in O(U_\alpha \cap U_\beta) \quad \text{在 } U_\alpha \cap U_\beta \text{ 中}. \tag{*}$$

我们要找的是一族 (g_α)，$g_\alpha \in O(U_\alpha)$ 使之适合以下条件：

$$g_\alpha - g_\beta = f_\alpha - f_\beta, \qquad \text{在 } U_\alpha \cap U_\beta \text{ 中}. \tag{**}$$

这样做事显然是劳而少功．另一方面它则是击中要害：我们有一些局部的东西而想把它们拼成一个整体的东西．整个流形理论讲的就是这件事．能否成功取决于问题的性质．有些什么困难也没有．例如我们看见过局部内积是怎样拼成 Riemann 度量、局部联络怎样拼成整体联络，所用到的只是一的分割．但是也有些东西不能简单地用一的分割来拼合．例如，把局部定向拼成整体定向有时行有时不行．问题的解决有“障碍”，而现在就遇到了障碍，即 (g_α) 的存在．这种描述障碍的方式在拓扑学中很常见．举一个例子：考虑主 G-丛 $E \longrightarrow B$ 是否平凡的问题（第三章、第十二章）．丛可用一开覆盖 (U_α) 与局部坐标 (φ_α) 来描述．于是起始的东西是一族迁移函数 $\varphi_{\alpha\beta} \in C(U_\alpha \cap U_\beta, G)$，它们适合 $\varphi_\beta(b,g) = \varphi_\alpha(b, \varphi_{\alpha\beta}(b)g)$．若丛是平凡的，则有一整体函数 $\rho: B \longrightarrow G$ 存在，使得由 $\rho_\alpha(b) = \varphi_\alpha(b, \rho(b)) \in C(U_\alpha, G)$ 给出的族 (ρ_α) 适合关系式

$$\rho_\beta = \rho_\alpha \circ \varphi_{\alpha\beta}.$$

若记

$$\varphi_{\alpha\beta}(b) = \varphi_{\alpha b}^{-1} \circ \varphi_{\beta b}, \quad \rho_\alpha^{-1} \circ \rho_\beta = \varphi_{\alpha\beta},$$

易见它们正是（＊）和（＊ ＊）的乘法形式.

再提一个我们知道其解的问题．令 M 为一光滑流形，ω 为一闭形式．能否找到一函数 f 使 $\omega=df$？此即 de Rham 群 $H^1(M)$ 的定义，我们知道，障碍就是上同调类 $[\omega]\in H^1(M)$．但我们要重按（＊）和（＊ ＊）来表述它．按 Poincaré 引理，ω 是局部恰当的．所以有 M 的开覆盖 (U_α) 和 U_α 上的函数 f_α 使在 U_α 上 $\omega=df_\alpha$．于是 $d(f_\alpha-f_\beta)=0$，即 $f_\alpha-f_\beta\in U_\alpha\cap U_\beta$ 上的常值函数集．这一点象（＊）．若 $\omega=df$，我们将得到一族 (g_α)

$$g_\alpha=f_\alpha-f|U_\alpha.$$

于是 $dg_\alpha=0$ 而 (g_α) 是一族常值函数使得在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 上

$$g_\alpha-g_\beta=f_\alpha-f_\beta.$$

这式子就是（＊ ＊）.

把问题陈述如下称为 Čech 构造．真正的问题不在于其提法多么复杂烦冗，而在于是否能找到一个合理的有效的理论来理解障碍．上例表明障碍是 $H^1(M)$ 中的一个上同调类．我们也知道，定向问题的障碍也是一个上同调类：第一 Stiefel-Whitney 类 $w_1\in H^1(B;Z_2)$．说真的，前几章中我们还看到过一些其它类型的（如同伦的、提升的等等）障碍其实也可归结为上同调类．这样，上同调似乎是处理障碍合用的语言．但是我们现在讨论的例子就没有好的上同调解释，如果上同调即我们所需，就需要来建立这个上同调理论．这样做已有一些线索．例如一个对 (α,β) 就可看成 1-单形，对应关系

$$(\alpha,\beta)\longmapsto\varphi(\alpha,\beta)=f_\alpha-f_\beta$$

就看成 1-上链．这个上链的上边缘就应该是

$$\begin{aligned}\delta\varphi(\alpha,\beta,\gamma)&=\varphi(\beta,\gamma)-\varphi(\alpha,\gamma)+\varphi(\alpha,\beta)\\&=(f_\beta-f_\gamma)-(f_\alpha-f_\gamma)+(f_\alpha-f_\beta)=0.\end{aligned}$$

我们可以把（＊）看成一个 1-上循环．对应关系

$$\alpha\longmapsto\psi(\alpha)=-g_\alpha$$

看成一个 0-上链且有

$$\delta\psi(\alpha,\beta) = \psi(\beta) - \psi(\alpha) = g_\alpha - g_\beta.$$

这样（* *）正是 $\delta\psi=\varphi$ 而上同调类 $[\varphi]=0$. 正是因此，第三章中我们把上循环、上边缘这些名词都用于矢量丛了. 现在就用得上它们了.

这样作出的上同调理论称为层的上同调. 在给出其形式定义以前最好先把它的某些特点牢记在心. 首先，在"老"理论（如奇异的、单纯的、CW 的等等），上链之值恒在一固定系数整环（整数、Z_2、实数等等）中. 新理论的上链在随单形 (α, β) 而不同的域中，例如 $\varphi(\alpha,\beta) = f_\alpha - f_\beta \in O(U_\alpha \cap U_\beta)$. 尽管它在代数上把事情复杂化了，必须懂得这正是局部数据的核心. 这不是技术上的小麻烦而正是理论的基本精神. 第二点都是颇为技术性的了. 负载了初始数据的开覆盖并无特定的优先之处. 可以换成其它开覆盖，也可以在一个开覆盖中给数据而在另一个中求解. 所以我们想建立的理论在这一点上应相当灵活. 现在可以给出形式定义了. 局部数据的思想表现为对不同开集指定相应系数整环，例如 $U\longmapsto O(U)$ 即 U 上之全纯函数空间. 这些局部系数整环自然应彼此有关. 例如若 $V\subset U$, 我们有自然的限制映射 $O(U)\longrightarrow O(V)$. 在抽象定义中 $O(U)$ 不一定要是函数空间，但应有类似于限制的形式关系. 说明确切些设有固定的基环 R 及 R 上的模.

定义 令 X 为一拓扑空间. 所谓 R-模的预层 S 即

(1) 对每一开集 $U\subset X$ 指定一个 R-模 $S(U)$;

(2) 对每一对开集 $V\subset U$ 有一映射

$$r_{VU}:\quad S(U)\longrightarrow S(V),$$

称为"限制"映射（虽然它甚至不必是一对一的）.

限制映射需要满足一些很简单的条件：

(S,1)：$r_{UU} = \mathrm{id}$ 对一切 U.

(S,2)：$r_{VU}\circ r_{UW} = r_{VW}$ 对 $V\subset U\subset W$.

限制映射一词当然是取自 $S(U)$ 为函数空间而 r_{VU} 是真正的限

制映射这一特例．我们在一般情况下还要这样做．例如对 $f\in S(U)$．我们就写 $r_{VU}(f)=f|V$，在不会发生混淆时甚至就写成 f．这样简便多了．

熟悉一般理论的读者会知道，开集连同包含关系构成一个**范畴**(category)．预层 S 即由此范畴到 R-模范畴的**函子**(functor)．也可让 S 在别的范畴(如集、环等等)中取值，得到的就是别种预层．

为把预层变成层，需要一个技术性的条件．

(S，3)：已给 $U=\bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$，$f_\alpha\in S(U_\alpha)$ 而且对一切 α，β 有 $f_\alpha|(U_\alpha\cap U_\beta)=f_\beta|(U_\alpha\cap U_\beta)$ 则必存在唯一 $f\in S(U)$ 使 $f|U_\alpha=f_\alpha$．

这个条件显然又是受 $S(U)$ 为函数空间的启发而得．但是在抽象的形式上它可能不成立．

$S(U)$ 为函数空间而 r_{VU} 是真正的限制映射是最重要的情况，因为除了最不可少的相容性条件外、对层没有加什么要求，你所写下的函数空间几乎无一不是层．举一些例子：

$F(U)=$ 一切函数 $f:U\longrightarrow\mathbf{R}$ 的空间；

$F_C(U)=$ 一切连续函数 $f:U\longrightarrow\mathbf{R}$ 的空间；

$F_S(U)=$ 一切光滑函数 $f:U\longrightarrow\mathbf{R}$ 的空间；

$A^k(U)=U$ 上一切 k- 形式的空间；

$A^{p,q}(U)=U$ 上一切(p,q) 型形式的空间；

$O(U)=U$ 上一切全纯函数的空间；

$M(U)=U$ 上一切亚纯函数的空间；

它们全是层．一般称为"……的芽之层"．"芽"之一词理由如下：

注意到层是对开集 U 指令 $S(U)$，它并未对一点 $P\in X$ 指定什么 S_P．相反地，我们是把 $S(U)$ 当 $U\longrightarrow P$ 时的极限作为 S_P 的．对于点 $P\in X$，$N(P)=\{U|U\ni P$ 且为开集$\}$ 成一有序集，即定义 $U\subset V$ 为 $U>V$．记住（见第十一章）这时可以取顺向极限

$$S_P=\varinjlim\{S(U)|U\in N(P)\}.$$

它的意思是：元 $x\in S_P$ 将由某个邻域 $U\ni P$ 上的 $f\in S(U)$ 来表示，

而 $f \in S(U)$ 和 $g \in S(V)$ 认为是代表同一 x，如果有一邻域 $W \subset U \cap V$ 使

$$f|W = g|W.$$

但这就是定义芽时用的等价关系 $f \sim g$. 称 S_P 称为 S 在 P 的茎. 注意为此定义只需预层即可.

当然也有其它类型的层. 例如，令 M 为一 R-模，我们可以定义

$$M(U) = M \text{ 对一切 } U; \quad r_{VU} = \mathrm{id} \text{ 对一切 } V \subset U.$$

它显然定义一个层，称为常值层.

因为层不过是一族模，大部分模运算如直和、张量积、对偶等都可自然地移入. 没有必要讲如何作法. 以后的应用中最重要的概念是正合序列. 其作法又并不最为明显. 令 S 和 Γ 为预层. 所谓同态 $\varphi: S \longrightarrow \Gamma$ 当然是指一族同态，即对每个开集有同态 $\varphi(U): S(U) \longrightarrow \Gamma(U)$，而且对 $V \subset U$ 有关于可交换性的相容条件：

$$\begin{array}{ccc} S(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \Gamma(U) \\ \downarrow r_{VU} & & \downarrow r_{VU} \\ S(V) & \xrightarrow[\varphi(V)]{} & \Gamma(V). \end{array}$$

这种同态诱导出在每个茎 S_P 上的同态 $\varphi_P: S_P \longrightarrow \Gamma_P$. 请注意，所谓

$$S \xrightarrow{\varphi} \Gamma \xrightarrow{\psi} A$$

为正合，并不是说对每个开集 U

$$S(U) \xrightarrow{\varphi(U)} \Gamma(U) \xrightarrow{\psi(U)} A(U) \qquad (1)$$

为正合，而是指以下序列对每点 $P \in X$ 在 Γ_P 为正合

$$S_P \xrightarrow{\varphi_P} \Gamma_P \xrightarrow{\psi_P} A_P.$$

这定义看来有点怪，其原因如下：记住顺向极限就好在它能保持正合关系. 故若 (1) 成立，(2) 亦成立. 但反过来不一定行. 换

言之．(2) 比 (1) 更弱．也就是说 (1) 这个要求太强．令 $x \in \Gamma_P$．$\psi_P(x) = 0$ 是指可用某 $x(U) \in \Gamma(U)$ 表示 x 而 $\psi(U)x(U) = 0$．$x = \varphi_P(y)$，$y \in S_P$．则指存在 $V \subset U$ 和 $y(V) \in S(V)$ 使 $x(U)|V = \varphi(V)(Y(V))$．这当然比 (1) 弱．

举一个例．令 M 为一光滑流形，A^k 是光滑 k-形式的芽层．对 $U \subset M$，有 $d: A^k(U) \longrightarrow A^{k+1}(U)$，它定义了序列

$$0 \longrightarrow \mathbf{C} \longrightarrow A^0 \xrightarrow{d} A^1 \longrightarrow A^2 \longrightarrow \cdots$$
$$\longrightarrow A^k \xrightarrow{d} A^{k+1} \longrightarrow \cdots \qquad (*)$$

k-形式芽 $[\omega]_P$ 适合 $d[\omega_P]_P = 0$ 表示对某开集 $U \ni P$ 有 $d\omega = 0$．由 Poincaré 引理，对一更小的邻域 $V \subset U$ 有 $\omega = d\mu$．但这就意味着 $d[\mu]_P = [\omega]_P$．所以 Poincaré 引理指出 (*) 为正合．但若我们要求对一切开集 $U \subset M$ 序列

$$0 \longrightarrow \mathbf{C} \longrightarrow A^0(U) \xrightarrow{d} A^1(U) \longrightarrow A^2(U) \longrightarrow \cdots$$
$$\longrightarrow A^k(U) \xrightarrow{d} A^{k+1}(U) \longrightarrow \cdots \qquad (**)$$

都正合，即指对一切 $U \subset$ M，de Rham 群 $H^k(U) = 0$，而这当然是荒唐的．所以较弱的正合性定义更为合理．读者应该区别层的正合以及层在开集上的值之正合．所以我们称 (*) 为层的 de Rham 复形，它是正合的，而 (**) 为开集 U 的 de Rham 复形，它给出 de Rham 群 $H^*(U)$，这些群正表示 (**) 非正合性的程度．

这里的讨论对以下当然极为重要，所以再多说几句．正合性对预层和层都可以讲．但是对于层下面的陈述更准确．

层的基本引理 若 $0 \longrightarrow S \xrightarrow{f} \Gamma \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0$ 是层的正合序列，则对任一开集 $U \subset X$，模序列

$$0 \longrightarrow S(U) \xrightarrow{f(U)} \Gamma(U) \xrightarrow{g(U)} A(U)$$

也是正合的．换言之，取值运算是左正合函子．

证明很容易．例如求证 $f(U) = f$ 为一对一．令 $a \in S(U)$ 使 $f(a) = 0$，则对任意 $P \in U$，$f_P(a_P) = 0$，故芽 $a_P = 0$，因为由假设 f_P 为 1-1 的．这意味着有一开集 U_P，$P \in U_P \subset U$ 使 $a|U_P = 0$．但 $U =$

$\bigcup_P U_P$ 而族 $(\alpha|U_P)$ 又是相容的，即 $(\alpha|U_P)_{U_P\cap U_Q} = (\alpha|U_Q)_{U_P\cap U_Q}$，而且都是 0. 由 (S, 3) 的唯一性部分知 $\alpha=0$ (因为对一切 U_p，$0|U_p=\alpha|U_p=0$). 在 $\Gamma(U)$ 处的正合性证明差不多. 例如设 $\beta\in\Gamma(U)$ 使 $g(\beta)=0$，则对每个 $P\in U$，$g_P(\beta_P)=0$ 从而有某 $\alpha_P\in S_P$ 使 $\beta_P = f(\alpha_P)$. 这表示有一开集 $U_P(\ni P)$ 和 $\tilde{\alpha}_P\in S(U_P)$ 表示 α_P 而且 $f(\tilde{\alpha}_P) = \beta|U_P$. 在 $U_P\cap U_Q$ 上有 $f(\tilde{\alpha}_P) = f(\tilde{\alpha}_Q) = \beta|(U_P\cap U_Q)$，或 $f(\tilde{\alpha}_P - \tilde{\alpha}_Q)|(U_P\cap U_Q) = 0$. 因为刚才证明了 f 是一对一的，故 $\tilde{\alpha}_P|(U_P\cap U_Q) = \tilde{\alpha}_Q|(U_P\cap U_Q)$. 再由 (S,3) 知存在 $\alpha\in S(U)$ 使 $\alpha|U_P=\tilde{\alpha}_P$. 最后 $f(\alpha)$ 和 β 均在 $\Gamma(U)$ 中且 $f(\alpha)|U_P = f(\tilde{\alpha}_P) = \beta|U_P$，再由唯一性有 $f(\alpha)=\beta$.

但要注意，用这样的证法得不出 $g(U)$ 为满射. 给定 $\gamma\in\Lambda(U)$，对任意 $P\in U$ 有 $\beta_P\in\Gamma_P$ 使 $g_P(\beta_P)=\gamma_P$. 这意味着有 P 的邻域 $U_P\subset U$ 与 $\tilde{\beta}_P\in\Gamma(U_P)$ 使 $g(\tilde{\beta}_P)=\gamma|U_P$. 但与 f 不同，g 不是一对一的，不能重复对 f 的证法来证明族 $\{\tilde{\beta}_P\in\Gamma(U_P)\}$ 可以拼成一个元 $\beta\in\Gamma(U)$. 还要注意. 我们其实不需要 Λ 为一层. 有趣的是要看到取值函子 $U\longrightarrow\Gamma(U)$ 和函子 Hom 性态相同. 函子 Hom 是原来产生上同调（奇异的、单纯的等等）的上链算子. 熟知同调代数一般原理的人会知道，层的上同调并没有什么惊人之处. 它只不过是 $U\longrightarrow\Gamma(U)$ 的导出函子. 但是我们不想使用这种奇巧的说法.

§3. 层的上同调

层的概念只不过是原有的局部数据的一种形式表述而使障碍问题可以陈述出来. 层的上同调就是这些障碍本身的形式描述. 从 Mittag-Leffler 问题我们多少已知道应怎样定义 1-上链和上边缘，把它推广到高维上链并无困难.

令 X 为一拓扑空间，Γ 为其上的预层. $\mathscr{U}=(U_\alpha)$ 是一开覆盖. $\mathscr{U}$ 的值在 Γ 中的 k-上链就是一个函数 φ，使对指标的每个

$(k+1)$-元组 $(\alpha_0,\cdots,\alpha_k)$ 均有一元 $\varphi(\alpha_0,\cdots,\alpha_k)\in\Gamma(U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_k})$. 对这个 k-上链定义 $\delta\varphi$ 为 $(k+1)$-上链:

$$\delta\varphi(\alpha_0,\cdots,\alpha_{k+1})=\sum_i(-1)^i\varphi(\alpha_0,\cdots,\hat{\alpha}_i,\cdots,\alpha_{k+1}).$$

这个样子的公式本身没有意义. 因为式右各项分属不同的模 $\Gamma(U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap\hat{U}_{\alpha_i}\cap\cdots\cap U_{\alpha_{k-1}})$ 而左方则在 $\Gamma(U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_{k-1}})$ 中. 但因对一切 i 都有

$$U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_{k-1}}\subset U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap\hat{U}_{\alpha_i}\cap\cdots\cap U_{\alpha_{k-1}},$$

故有限制映射

$$\Gamma(U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap\hat{U}_{\alpha_i}\cap\cdots\cap U_{\alpha_{k-1}})\longrightarrow\Gamma(U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_{k-1}}),$$

我们理解式右方各项都已施加了这个映射从而此式有意义, 不用限制映射记号是为了简便. 以后只要做得到都会这样做.

因为上边缘公式与以前用过的组合公式形状相同, 无疑有 $\delta\delta=0$. 因此若用 $C^k(\mathscr{U},\Gamma)$ 记 k-链生成的形式自由 R-模, 可得一个上链复形:

$$0\to C^0(\mathscr{U},\Gamma)\xrightarrow{\delta}C^1(\mathscr{U},\Gamma)\xrightarrow{\delta}\cdots\xrightarrow{\delta}C^k(\mathscr{U},\Gamma)\xrightarrow{\delta}\cdots$$

我们定义此复形的上同调为 Cech 上同调 $H^*(\mathscr{U},\Gamma)$. 例如设 X 为一复流形, O 为 X 上的全纯函数芽层, 在 (U_α) 上具有指定主部的亚纯函数 (f_α) 即 Mittag-Leffler 数据, 我们从下面的 1-上链构成 $C^1(\mathscr{U},O)$:

$$(\alpha,\beta)\longmapsto\varphi(\alpha,\beta)=f_\alpha-f_\beta\in O(U_\alpha\cap U_\beta).$$

因为在 $U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma$ 中, $\delta\varphi(\alpha,\beta,\gamma)=(f_\beta-f_\gamma)-(f_\alpha-f_\gamma)+(f_\alpha-f_\beta)=0$, 故得一上同调类 $[\varphi]\in H^1(\mathscr{U},\Gamma)$. 我们已看见, $[\varphi]$ 就是解决 Mittag-Leffler 问题的障碍.

我们说过, 不能给定的覆盖 $\mathscr{U}$ 以优先权. 记住 $\mathscr{U}=(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ 的加细是这样一个覆盖 $\mathscr{V}=(V_i)_{i\in I}$, 使每个 i 都有一个 $\sigma(i)=\alpha$ 而 $V_i\subset U_\alpha$. 这里给出了一个函数 $\sigma:I\longrightarrow A$, 而且定义了一个同态

$$C^k(\mathscr{U},\Gamma)\longrightarrow C^k(\mathscr{V},\Gamma),\quad\varphi\longmapsto\sigma(\varphi)$$

$$\sigma(\varphi)(V_{i_0},\cdots,V_{i_k}) = \varphi(U_{\sigma(i_0)},\cdots,U_{\sigma(i_k)}).$$

这里包含了一个限制映射没有写出来

$$\Gamma(U_{\sigma(i_0)}\cap\cdots\cap U_{\sigma(i_k)})\longrightarrow\Gamma(V_{i_0}\cap\cdots\cap V_{i_k}),$$

因为 $V_{i_0}\cap\cdots\cap V_{i_k}\subset U_{\sigma(i_0)}\cap\cdots\cap U_{\sigma(i_k)}$，这个限制是有意义的.

σ 易见是一链同态，从而诱导出以下同态

$$H^k(\mathscr{U},\Gamma)\xrightarrow{\sigma}H^k(\mathscr{V},\Gamma).$$

X 的一切开覆盖及加细关系 $\mathscr{V}>\mathscr{U}$ 构成有向集. 对每个 $\mathscr{V}>\mathscr{U}$ 都有 σ，于是得一有向系统 $H^k(\mathscr{U},\Gamma)$. 我们定义其顺向极限即 X 的系数在 Γ 中的 Čech 上同调：

$$H^*(X,\Gamma)=\varinjlim H^*(\mathscr{U},\Gamma).$$

所以 $H^k(X,\Gamma)$ 的一个类是由某个开覆盖 $\mathscr{U}$ 的上循环 $\varphi\in C^k(\mathscr{U},\Gamma)$ 来表示的，若 φ 在某个细于 $\mathscr{U}$ 的覆盖 $\mathscr{V}>\mathscr{U}$ 中是上边缘就说此类为 0.

要作一些评论. 链同态 σ 依赖于指标集映射 $\sigma: I\longrightarrow A$ 的选取. 我们所要的只是 $V_i\subset U_{\sigma(i)}$，所以谈不上选取的唯一性. 我们只理解为对每个 $\mathscr{V}>\mathscr{U}$，σ 已选定. 如果我们自始至终只讲一个空间 X，就不会有问题. 否则将对诱导出的连续映射 $f: X\longrightarrow Y$ 产生函子问题. 确有关于层的上同调的更为函子化的理论. 但因我们几乎不分心于空间的连续映射 $f: X\longrightarrow Y$，我们也就使用眼下的讲法，因其来源更清楚. 注意，系数层的同态 $f:\Gamma\longrightarrow A$ 没有问题. 对任意开覆盖 $\mathscr{U}$，f 诱导出一同态

$$C^k(\mathscr{U},\Gamma)\xrightarrow{f_*}C^k(\mathscr{U},A),\quad \varphi\longmapsto f_*\varphi,$$

$$(f_*\varphi)(U_{\alpha_0},\cdots,U_{\alpha_k})=f(\varphi(U_{\alpha_0},\cdots,U_{\alpha_k})).$$

若 $\mathscr{V}>\mathscr{U}$ 而 $\sigma: I\longrightarrow A$ 是任意“加细”映射，下式显然可换：

$$\begin{array}{ccc} C^k(\mathscr{U},\Gamma) & \xrightarrow{f_*} & C^k(\mathscr{U},A) \\ \downarrow\sigma & & \downarrow\sigma \\ C^k(\mathscr{V},\Gamma) & \xrightarrow{f_*} & C^k(\mathscr{V},A). \end{array}$$

由此得一诱导同态且具通常的函子性质：

$$f_*: H^*(X,\Gamma) \longrightarrow H^*(X,A).$$

举一个例．我们说过，纤维丛也可用这种语言来讲．现在说清楚些．令 G 为一拓扑群，$\mathscr{F}_c(G)$ 是值在 G 中的连续函数芽层，即

$$\mathscr{F}_c(G)(U) = C(U,G).$$

设有 X 上的主 G-丛 $E \longrightarrow X$，$\mathscr{U} = (U_\alpha)$ 是平凡化覆盖，φ_α 是局部坐标，$\varphi: U_\alpha \times G \longrightarrow E$，于是有迁移函数 $\varphi_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$ 如下：

$$\varphi_\beta(b,g) = \varphi_\alpha(b,\varphi_{\alpha\beta}(b)g).$$

它们适合所谓上循环条件

$$\varphi_{\alpha\gamma} = \varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\beta\gamma}. \qquad (*)$$

反之任一族适合此条件的函数必生成一主丛．现在

$$(\alpha,\beta) \longrightarrow \varphi(\alpha,\beta) = \varphi_{\alpha\beta}$$

定义一个 1-上链 $\varphi \in C^1(\mathscr{U},\mathscr{F}_c(G))$．若用乘法记号，则上循环条件 $\delta\varphi = 0$ 应写为

$$1 = \delta\varphi(\alpha,\beta,\gamma) = \varphi_{\beta\gamma} \circ \varphi_{\alpha\gamma}^{-1} \circ \varphi_{\alpha\beta},$$

若能交换次序，即若 G 为 Abel 群，此式就变成了（*）．若有丛 E 与 E_1 间的丛映射 $f: E \longrightarrow E_1$，$(\psi_{\alpha\beta})$ 是定义 E_1 的 1-上链．由丛映射之定义应有一映射 $f_\alpha: U_\alpha \longrightarrow G$：

$$f\varphi_\alpha(b,g) = \psi_\alpha(b,f_\alpha(b)g).$$

于是我们有

$$f_\alpha\varphi_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta}f_\beta. \qquad (**)$$

视 $\alpha \xmapsto{f} f_\alpha$ 为 $C^0(\mathscr{U},\mathscr{F}_c(G))$ 之元，即一 0-上链．仍用乘法记号，$\delta f = f_\beta - f_\alpha$ 又变成

$$f_\beta \circ f_\alpha^{-1} = \varphi_{\alpha\beta}\psi_{\alpha\beta}^{-1}.$$

当 G 为 Abel 群时它又是（**）．

G 为 Abel 群有两个重要例子，即 $G = GL(1,\mathbf{R}) = \mathbf{R}^* = \mathbf{R} - 0$ 以及 $G = GL(1,\mathbf{C}) = \mathbf{C}^* = \mathbf{C} - 0$（实、复域的乘法群）．我们知道，相应的丛即实、复线丛．我们感兴趣的是复情况．以下 $\mathscr{F}_c(\mathbf{C}^*)$

即记为$\mathbf{C}_{\mathcal{C}}^*$. 复线丛$L_C(X)$的同构类故与Čech群$H^1(X,\mathbf{C}_{\mathcal{C}}^*)$一一对应. 容易见到，$L_C(X)$作为一个群，取其运算为张量积应有$L_C(X)\cong H^1(X,\mathbf{C}_{\mathcal{C}}^*)$. 若$X$为一复流形，有以下问题. 不考虑$\mathbf{C}_{\mathcal{C}}^*$而取$\mathbf{C}_{\mathcal{S}}^*$=值在$\mathbf{C}^*$中的光滑函数芽层或$\mathbf{C}_{\mathcal{O}}^*$=值在$\mathbf{C}^*$中的全纯函数芽层. 这时$H^1(X,\mathbf{C}_{\mathcal{S}}^*)$与$H^1(X,\mathbf{C}_{\mathcal{O}}^*)$即光滑与全纯线丛. 有明显的层同态（实是包含）

$$\mathbf{C}_{\mathcal{O}}^*\subset\mathbf{C}_{\mathcal{S}}^*\subset\mathbf{C}_{\mathcal{C}}^*,$$

从而有诱导的同态

$$H^*(X,\mathbf{C}_{\mathcal{O}}^*)\longrightarrow H^*(X,\mathbf{C}_{\mathcal{S}}^*)\longrightarrow H^*(X,\mathbf{C}_{\mathcal{C}}^*).$$

映射的含义很清楚. 我们不期望它们是满的，因为连续丛可能不是全纯的. 也可能不是一对一的，因为两个全纯不等价的丛可能拓扑等价. 事实上，第二个映射是同构，即除相差一同构外，光滑和连续线丛并无区别. 但第一个映射既非一对一又非满射. 因此对全纯与光滑范畴的丛必须细心区别. 事实上，全纯线丛今后对我们很重要.

迄今我们所作不过是给出层的上同调的定义，使障碍作为一个上同调类有一个形式的地位. 为使这一格式能作一点事，必须发展某种计算的理论. 非常明白，定义本身给不出直接计算的机会. 我们既然希望它是一个上同调理论，自然想要对它建立起对通常的上同调论适用的结果，如同伦、正合性、Meyer-Vietoris序列等等. 但为此现在能作的事不多，因为我们说过，现在我们甚至没有满意地确定$H^*(X,\Gamma)$为X的函子. 所以暂时只能集中于它对层变元的函子性态. 我们首先想到的就是

层的上同调的基本引理 令$0\longrightarrow S\xrightarrow{f}\Gamma\xrightarrow{g}\Lambda\longrightarrow 0$是层的正合序列，则它诱导出上同调模的长正合序列：

$$\cdots\longrightarrow H^k(X,S)\xrightarrow{f_*}H^k(X,\Gamma)\xrightarrow{g_*}H^k(X,\Lambda)\xrightarrow{\delta}H^{k+1}(X,S)\longrightarrow\cdots,$$

δ是适当的连接同态.

f_*和g_*的定义已经讨论过．检验f_*与g_*相遇处的$H^s(X,\Gamma)$的正合性只是例行事务．δ的定义也与第九章§1讲的相似，但在我们的特殊情况下要稍作修改．

令$u\in H^s(X,A)$由上循环$\varphi\in C^s(\mathscr{U},A)$表示，$\mathscr{U}=(U_\alpha)$是某个覆盖．若我们能证明序列

$$0\longrightarrow C^s(\mathscr{U},S)\xrightarrow{f_*}C^s(\mathscr{U},\Gamma)\xrightarrow{g_*}C^s(\mathscr{U},A)\longrightarrow 0$$

为正合，则可以象第九章那样作．那就是追踪

$$\begin{array}{ccccccccc}
0\longrightarrow & C^s(\mathscr{U},S) & \xrightarrow{f_*} & C^s(\mathscr{U},\Gamma) & \xrightarrow{g_*} & C^s(\mathscr{U},A) & \longrightarrow 0\\
 & & & \psi & \longmapsto & \varphi & \\
 & \downarrow\delta & & \downarrow\delta & & \downarrow\delta & \\
0\longrightarrow & C^{s+1}(\mathscr{U},S) & \xrightarrow{f_*} & C^{s+1}(\mathscr{U},\Gamma) & \xrightarrow{g_*} & C^{s+1}(\mathscr{U},\overline{A}) & \longrightarrow 0.\\
 & \xi & \longmapsto & \delta\psi & \longmapsto & 0 &
\end{array}$$

(1)　沿g_*回溯，即找出一个$\psi\in C^s(\mathscr{U},\Gamma)$使$\varphi=g_*\psi$.

(2)　考虑$\delta\psi\in C^{s+1}(\mathscr{U},\Gamma)$．由可换性，有$g_*\delta\psi=\delta g_*\psi=\delta\varphi=0$，因为$\varphi$是上循环.

(3)　因序列在中项处为正合，沿f_*回溯可找到$\xi\in C^{s+1}(\mathscr{U},S)$使$f_*(\xi)=\delta\psi$.

(4)　由可换性，$f_*(\delta\xi)=\delta f_*(\xi)=\delta\delta\psi=0$．因$f_*$是一对一的，$\delta\xi=0$，所以有$[\xi]\in H^{s+1}(\mathscr{U},S)$．取顺向极限即得由$\delta u$所定义的类$v\in H^{s+1}(X,S)$.

不巧的是，上链函子和函子$U\longrightarrow\Gamma(U)$一样只是左正合的（证明很简单）：

$$0\longrightarrow C^s(\mathscr{U},S)\xrightarrow{f_*}C^s(\mathscr{U},\Gamma)\xrightarrow{g_*}C^s(\mathscr{U},A).$$

沿g_*回溯$\varphi\in C^s(\mathscr{U},A)$不一定行．这正是我们的"特殊情况"．但幸好不必定死某一个开覆盖．这也是我们的"特殊情况"．

引理　已给$\varphi\in C^s(\mathscr{U},A)$，可将$\mathscr{U}$加细为$\mathscr{V}$使$\sigma(\varphi)\in C^s(\mathscr{V},A)$可以回溯到$C^s(\mathscr{V},\Gamma)$.

证明很容易. 对任一 $(k+1)$-元组 $\alpha_0,\cdots,\alpha_k,\varphi(\alpha_0,\cdots,\alpha_k)\in A(U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_k})$. 我们已知任意 $P\in U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_k}$ 均有邻域 $V_P\subset U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_k}$ 使 $\varphi(\alpha_0,\cdots,\alpha_k)|V_P$ 可沿 g_* 回溯, 即有元 $A(\alpha_0,\cdots,\alpha_k,P)\in\Gamma(V_P)$ 使 $g_*A(\alpha_0,\cdots,\alpha_k,P)=\varphi(\alpha_0,\cdots,\alpha_k)|V_P$. 对一切可能的 $(k+1)$-元组 $\alpha_0,\cdots,\alpha_k$ 和 $P\in U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_k}$ 取 V_P 和 $A(\alpha_0,\cdots,\alpha_k,P)$, 即得 X 的开覆盖 $\mathscr{V}=(V_P)$. 例如可取 $\alpha_0=\cdots=\alpha_k=\alpha$, 则 $\mathscr{V}$ 亦可覆盖 U_α (对一切 α). $\mathscr{V}$ 显然是 $\mathscr{U}$ 的加细. 令 $\beta\overset{\sigma}{\longmapsto}\sigma(\beta)$ 为指标集上的加细映射. 可定义上链 $\psi\in C^k(\mathscr{V},\Gamma)$ 如下. 令 $\beta_0,\cdots,\beta_k$ 为一 $(k+1)$-元组若 $V_{\beta_0}\cap\cdots\cap V_{\beta_k}=\varnothing$, 我们只能定义 $\psi(\beta_0,\cdots,\beta_k)=0$. 否则取 $Q\in V_{\beta_0}\cap\cdots\cap V_{\beta_k}$ 而定义

$$\psi(\beta_0,\cdots,\beta_k)=A(\sigma(\beta_0),\cdots,\sigma(\beta_k),Q).$$

因为 $Q\in V_{\beta_0}\cap\cdots\cap V_{\beta_k}\subset U_{\sigma(\beta_0)}\cap\cdots\cap U_{\sigma(\beta_k)}$, 我们有

$$\begin{aligned}(g_*\psi)(\beta_0,\cdots,\beta_k)&=gA(\sigma(\beta_0),\cdots,\sigma(\beta_k))|(V_{\beta_0}\cap\cdots\cap V_{\beta_k})\\&=\varphi(\sigma(\beta_0),\cdots,\sigma(\beta_k))|(V_{\beta_0}\cap\cdots\cap V_{\beta_k})\\&=(\sigma\varphi)(\beta_0,\cdots,\beta_k).\end{aligned}$$

用 $\mathscr{V}$ 代替 $\mathscr{U}$, 我们可以和前面一样定义 δ. 余下的和前面也一样.

这种论证在层理论中是典型的情况. 在朴素的老时光里, 我们有以下形状的图式:

$$\begin{array}{ccccccccc}0&\longrightarrow&S^k&\xrightarrow{f_*}&\Gamma^k&\xrightarrow{g_*}&A^k&\longrightarrow&0\\&&\downarrow\delta&&\downarrow\delta&&\downarrow\delta&&\\0&\longrightarrow&S^{k+1}&\xrightarrow{f_*}&\Gamma^{k+1}&\xrightarrow{g_*}&A^{k+1}&\longrightarrow&0\end{array}$$

用它可以追踪任一个 $\varphi\in A^k$. 但现在求 φ 的序列

$$0\longrightarrow C^k(\mathscr{U},S)\xrightarrow{f_*}C^k(\mathscr{U},\Gamma)\xrightarrow{g_*}C^k(\mathscr{U},A)$$

右端并非满射, 所以追踪 φ 时要作加细 $\mathscr{V}$. 虽然对每一个 $\varphi\in C^k(\mathscr{U},A)$都可以这样作, 却找不出一单个加细 $\mathscr{V}$ 同时用于一切 $\varphi\in C^k(\mathscr{U},A)$. 这情况有点象收敛但不一致收敛的函数序列.

我们只需处理单个的元 $\varphi \in C^{n}(\mathscr{U}, A)$. 情况尽管令人不快, 却反映了一个事实:现在的上同调是随处相异的初始数据的上同调,所以不能期望有一致的处理. 在这方面, 只用开覆盖这一有向集而非任意偏序集也是重要的. 例如, 若 $u, u_1 \in H^{n}(X, A)$ 而我们想证 $\delta(u + u_1) = \delta u + \delta u_1$, 我们将用 $\varphi \in C^{n}(\mathscr{U}, A)$ 表示 u, $\varphi_1 \in C^{n}(\mathscr{U}_1, A)$ 表示 u_1. 我们当然想找 $\mathscr{V}$ 同时加细 $\mathscr{U}$ 与 $\mathscr{U}_1$ 而且可在 $\mathscr{V}$ 中同时追踪 φ, φ_1. 有向集就是这个意思 (已给 $\mathscr{U}$, $\mathscr{U}_1$ 必存在 $\mathscr{V}$ 使同时有 $\mathscr{V} > \mathscr{U}, \mathscr{V} > \mathscr{U}_1$!).

为了进一步说明这种按元素的论证法, 考虑以下问题: 使 $H^{*}(X, \Gamma) = 0$的层无疑是最简单的情况. 例如, 设若它对 $\Gamma = \mathscr{O} =$ 全纯函数芽层成立, 则任意 Mittag-Leffler 问题有解 (因此, 由前述的拓扑学事实, 对环面 T^2, $H^1(T^2, \mathscr{O}) \neq 0$). 但先要作一点小修改. 和通常的上同调理论一样, $H^0(X, \Gamma)$ 容易理解. 元 $u \in H^0(X, \Gamma)$ 将由一个 0-上循环 $\varphi \in C^0(\mathscr{U}, \Gamma)$ 表示, $\mathscr{U}$ 是某个开覆盖 (U_α), 故对于每个 α 均有元 $\varphi(\alpha) \in \Gamma(U_\alpha)$. 上循环条件成为

$$0 = \delta\varphi(\alpha, \beta) = (\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)) | (U_\alpha \cap U_\beta),$$

即 $(\varphi(\alpha))$ 是相容的. 故若有层 Γ, 必有唯一 $\varphi \in \Gamma(X)$ 使对一切 α 有 $\varphi | U_\alpha = \varphi(\alpha)$. 这样我们看到

$$H^0(X, \Gamma) = \Gamma(X)$$

就是在整个空间上取值. 因此我们能期望的, 最多也就是 "约化群" $\widetilde{H}^{*}(X, \Gamma) = \sum_{i>0} H^{i}(X, \Gamma) = 0$. 我们不来给出其必要与充分条件, 相反, 我们只限于举一类重要的例子.

定理 令 X 为一光滑流形, A 为 X 上的光滑形式芽层, 这时, $\widetilde{H}^{*}(X, A) = 0$.

证 令 $u \in H^{n}(X, A)$ 由上循环 $\varphi \in C^{n}(\mathscr{U}, A)$ 表示, $\mathscr{U}$ 是开覆盖 (U_α). 我们通过构造 1 与 0 间的同伦来证明 $u = 0$. 但我们不能在整个 $C^{n}(\mathscr{U}, A)$ 上来作同样的同伦. 反之, 对每个 φ 将定制一个同伦. 为此, 在必要时作加细而令 $\mathscr{U}$ 为局部有限, (h_α) 是从属

于 $\mathscr{U}$ 的一的分割．定义 $(k-1)$-上链 $H\varphi$ 如下．给定 $(\alpha_0,\cdots,\alpha_{k-1})$，对每个 α，在 $U_\alpha\cap U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_{k-1}}$ 上作形式 $\varphi(\alpha,\alpha_0,\cdots,\alpha_{k-1})$．然后把 $h_\alpha\varphi(\alpha,\alpha_0,\cdots,\alpha_{k-1})$ 看成 $U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_{k-1}}$ 上的光滑形式（因其支集在 $U_\alpha\cap U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_{k-1}}$ 内）．今定义

$$H\varphi(\alpha_0,\cdots,\alpha_{k-1})=\sum_\alpha h_\alpha\varphi(\alpha,\alpha_0,\cdots,\alpha_{k-1}).$$

通过通常的计算，因 $\sum_\alpha h_\alpha=1$，我们有

$$\begin{aligned}\delta H\varphi(\alpha_0,\cdots,\alpha_{k-1})&=\sum_i(-1)^i H\varphi(\alpha_0,\cdots,\hat{\alpha}_i,\cdots,\alpha_{k-1})\\&=\sum_{i,\alpha}(-1)^i h_\alpha\varphi(\alpha,\alpha_0,\cdots,\hat{\alpha}_i,\cdots,\alpha_{k-1}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H\delta\varphi(\alpha_0,\cdots,\alpha_{k-1})&=\sum_\alpha h_\alpha\delta\varphi(\alpha,\alpha_0,\cdots,\alpha_{k-1})\\&=\sum_\alpha h_\alpha\varphi(\alpha_0,\cdots,\alpha_{k-1})-\sum_{i,\alpha}(-1)^i\\&\quad h_\alpha\varphi(\alpha,\alpha_0,\cdots,\hat{\alpha}_i,\cdots,\alpha_{k-1}),\end{aligned}$$

第一项就是 $\varphi(\alpha_0,\cdots,\alpha_{k-1})$．所以我们有

$$\delta H\varphi+H\delta\varphi=\varphi.$$

因 $\delta\varphi=0$，$\varphi=\delta H\varphi$ 是一上边缘．证毕．

除了使用按元素的论证外，上证中构造同伦 H 的要点在一的分割．这表明光滑与全纯范畴的区别．复流形上没有全纯的一的分割．这是肯定没有的，因为在一非空开集上为 0 的全纯函数必恒为 0．所以一般说来，光滑或连续形式之芽的层以至一般可以乘以一的分割的对象之层均服从以上定理．这种层称"强"(fine)层．如 A，A^k，$A^{p,q}$等等．另一方面全纯层要另行处理．

作为以上原理的应用，考虑 X 上之复值连续函数芽之层 $\mathbf{C}_C$．它是一个强层．令 $\mathbf{C}_C^*$ 为在 $\mathbf{C}^*=\mathbf{C}-0$ 中取值即处处不为 0 的连续函数之芽的层．它就不是一个强层，因为我们虽有一的分割 (h_α)，均不能保证得到 h_α 处处非 0 的 (h_α)．事实上我们知道，$H^*(X,\mathbf{C}_C^*)$ 是 X 上的线丛而非一定平凡．现在有一个自然的同态 $\mathbf{C}_C\longrightarrow\mathbf{C}_C^*$ 在开集 U 上由下式给出

$$\mathbf{C}_c(U) \longrightarrow \mathbf{C}_c^*(U), \quad f \overset{\exp}{\longmapsto} e^{2\pi i f}.$$

注意在 $\mathbf{C}_c^*(U)$ 上我们恒用乘法记号，故 $f \in \ker \exp$ 表示 $f(x)$ 当 $x \in U$ 时取整数值. 若 U 为连通，此必为整个 U 上的整常数，所以 $U \longrightarrow \ker \exp(U)$ 即整常数层 $\mathbf{Z}$. 在

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{C}_c(U) \xrightarrow{\exp} \mathbf{C}_c^*(U)$$

中 exp 不一定是满的. 但在小的 U 上每个非 0 函数局部地必有对数. 所以在层的水平上，下式是正合的

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{C}_c \longrightarrow \mathbf{C}_c^* \longrightarrow 0.$$

因 $\mathbf{C}_c$ 为强层，可得一同构：

$$0 = H^1(X, \mathbf{C}_c) \longrightarrow H^1(X, \mathbf{C}_c^*) \underset{\sim}{\overset{\delta}{\longrightarrow}} H^2(X, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^2(X, \mathbf{C}_c) = 0.$$

这个同构的含义很容易认明，H^1（X，$\mathbf{C}_c^*$）是一线丛，陈类则在 $H^2(X, \mathbf{Z})$ 中. 所以我们实际上是说，连续复线丛由其陈类决定. 说准确些，我们还不知道 δ 是否就是这个意义. 因为 $H^2(X, \mathbf{Z})$ 是系数在整常数层 $\mathbf{Z}$ 中的层的上同调，而不是系数在模 $\mathbf{Z}$ 中的通常的奇异或单纯上同调. 但以后我们会来处理这个问题. 即令这一点不清楚，还有有用的应用. 令 A^0 为光滑函数芽层，$A^0 \subset \mathbf{C}_c$ 为一子层且 $\mathbf{C}_s^* \subset \mathbf{C}_c^*$. 图式

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{C}_s & \xrightarrow{\exp} & \mathbf{C}_s^* & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{C}_c & \xrightarrow{\exp} & \mathbf{C}_c^* & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

给出了另一图式

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, \mathbf{C}_s^*) & \underset{\sim}{\overset{\delta}{\longrightarrow}} & H^2(X, \mathbf{Z}) \\ \downarrow & & \| \\ H^1(X, \mathbf{C}_c^*) & \underset{\sim}{\overset{\delta}{\longrightarrow}} & H^2(X, \mathbf{Z}), \end{array}$$

因为 $\mathbf{C}_s$ 仍为强层. 左方竖映射因此也为同构. 这就证实了前之断

言：光滑线丛与连续线丛相同.

下一个应用表明层之上同调这个复杂的工具是值得的. 令 M 为光滑流形. 我们有 de Rham 层复形：

$$0 \to \mathbf{R} \to A^0 \xrightarrow{d} A^1 \to \cdots \xrightarrow{d} A^k \xrightarrow{d} A^{k+1} \to \cdots, \quad (*)$$

$\mathbf{R}$ 是常值层而 A^k 是光滑 k-形式层. 我们知道 A^k 均为强层，故 $\tilde{H}*(M,A^k) = 0$. 但常值层不一定是强层，故有 Čech 群 $H^*(M, \mathbf{R})$. 另一方面可以取值而得模的复形

$$0 \to A^0(M) \xrightarrow{d} A^1(M) \to \cdots \to A^k(M) \xrightarrow{d} A^{k+1}(M),$$

其同调即 de Rham 群，记作 $H_{\mathbf{R}}^k(M)$. 我们要证明它们是相同的. 证明很容易.

首先，我们知道 $H_{\mathbf{R}}^0(M) = \ker(A^0(M) \xrightarrow{d} A^1(M))$. 因为

$$0 \longrightarrow \mathbf{R}(M) \longrightarrow A^0(M) \longrightarrow A^1(M)$$

是正合的，故有

$$H_{\mathbf{R}}^0(M) = \mathbf{R}(M) = H^0(M,\mathbf{R}).$$

一般地令 $\mathbf{Z}^k$ 为闭 k-形式芽层，定义如下：

$$\mathbf{Z}^k(U) = \ker(A^k(U) \xrightarrow{d} A^{k+1}(U)),$$

它表明：de Rham 层复形（*）为正合即指有层的短正合序列：

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}^k \longrightarrow A^k \longrightarrow \mathbf{Z}^{k+1} = 0.$$

它给出

$$H^0(M,\mathbf{Z}^k) \xrightarrow{\delta} H^1(M,\mathbf{Z}^{k-1}) \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} H^k(M,\mathbf{Z}^0) = H^k(M,\mathbf{R}).$$

因 A^k 均为强层，所有 δ 除第一个外均为同构. 故有

$$\begin{array}{ccccccc}
H^0(M,A^{k-1}) & \longrightarrow & H^0(M,\mathbf{Z}^k) & \xrightarrow{\delta} & H^1(M,\mathbf{Z}^{k-1}) & \longrightarrow & 0 \\
\| & & \| & & \wr| & & \\
A^{k-1} & \xrightarrow{d} & \mathbf{Z}^k(M) & \longrightarrow & H^k(M,\mathbf{R}). & &
\end{array}$$

所以

$$H^k(M,\mathbf{R}) = \mathbf{Z}^k(M)/\mathrm{Im}d = H_{\mathbf{R}}^k(M).$$

这结果的意义是：层的上同调 $H^k(M,\mathbf{R})$ 按定义是复杂的对象，de

Rham 群 $H_R^k(M)$ 则比较简单. 因为它可以从一个复形"直接"计算. 尽管真正去算 $H_R^k(M)$ 仍是不切实际的，然而用模的一个复形去代替开覆盖、顺向极限等等仍是非常有用的. 例如我们有 $H^k(M,\mathbf{R})=0$ 于 $k>\dim M$ 时，这个事实从定义是无法得到的.

但以上论证真正的好处是其一般性. 只要有了形式的性质，用不用 de Rham 复形显然无关. 这样我们事实上证明了一个一般定理.

层的上同调的基本定理 令 A 是 X 上的层，

$$0\to A\to F_1\xrightarrow{\alpha_1}F_2\xrightarrow{\alpha_2}\cdots\to F_k\xrightarrow{\alpha_k}F_{k+1}\to\cdots$$

是层的正合序列，F_i 均为强层（或更一般地设 $\tilde{H}^*(X,F_i)=0$. 此序列称为 A 的强层分解). 于是层的上同调 $H^*(M,A)$ 可由下述模的复形（称为截口复形）算出：

$$0\to F_1(X)\xrightarrow{\alpha_1}F_2(X)\xrightarrow{\alpha_2}\cdots\to F_k(X)\xrightarrow{\alpha_k}F_{k+1}(X)\to\cdots.$$

这个一般定理的用处在于，A 通常不只有一个分解. 于是此定理说明不同复形的上同调相同. 例如，令 S^k 为值在 $\mathbf{R}$ 中的奇异上链的芽层，即

$$S^k(U)=S^k(U,\mathbf{R})$$

是 U 上的实值奇异上链. 通常的上边缘 $\delta: S^k(U)\longrightarrow S^{k+1}(U)$ 定义了层同态 $\delta: S^k\longrightarrow S^{k+1}$. 记住 $S^0(U)$ 即 U 上之函数空间（不带连续性等条件!）对这种函数 f,

$$\delta f(x_0,x_1)=f(x_1)-f(x_0),$$

故 $\mathbf{Z}^0(U)=\mathbf{R}$ 是常值函数空间，即 $\mathbf{Z}^0=\mathbf{R}$ 为常值层. 所以我们有层的序列

$$0\to\mathbf{R}\to S^0\xrightarrow{\delta}S^1\to S^2\to\cdots\to S^k\xrightarrow{\delta}S^{k+1}\to\cdots. \tag{**}$$

因为我们用的是实数而非整数，易见 S^k 为强层. 其实，对 A^k 的证明可逐字移用于此. 唯一缺少的是一个 Poincaré 引理类型的正合性结果. 就是说，已给一点 $P\in X$，P 的一个邻域 U 及一上循环 φ

$\in S^q(U)$．是否存在 P 之另一邻域 $V\subset U$ 使 φ 在 V 上为上边缘？在最一般情况下确有空间 X 使它不成立．但对有用的空间它是成立的．例如若 X 是一流形则取 V 为一圆盘，可得此“Poincaré 引理”成立．所以（＊＊）是常值层的强层分解．应用基本定理，我们有

$$H^*(X,\mathbb{R}) = H^*(X,\mathbb{R}) = H^*_{\mathbb{R}}(X)$$

（层的上同调）（奇异上同调）（de Rham 上同调）

它又给出 de Rham 定理的另证以及关于陈类必须的说明．下一个问题几乎自然出现了．既然 de Rham 上同调 $H^*_{\mathbb{R}}(X)$ 有层的解释，Dolbeault 群 $H^*_{\bar{\partial}}(M)$ 又当如何？再回顾一下它的定义（第八章）因为已经久违了．在复流形 M 上有 (p,q) 型复值光滑形式空间 $A^{p,q}(U)$．局部地在一坐标系 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 中，它们可用 p 个 dz_i 和 q 个 $d\bar{z}_j$ 来表示．外微分 d 映 $A^{p,q}(U)$ 到 $A^{p+1,q}(U)$ 和 $A^{p,q+1}(U)$ 中，所以我们可以把它分成两部分

$$\partial: A^{p,q}(U) \longrightarrow A^{p+1,q}(U), \quad \bar{\partial}: A^{p,q}(U) \longrightarrow A^{p,q+1}(U).$$

在 $A^{p,0}(U)$ 上，$\bar{\partial}(fdz_{i_1}\wedge\cdots\wedge dz_{i_p})=0$ 意味着 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_i}=0$，即此形式为全纯．全纯形式空间记作 $\Omega^p(U)$（故 $\Omega^0(U)=O(U)$）．复形

$$0 \to A^{p,0}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{p,1}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{p,q}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{p,q+1}(M) \to \cdots$$

定义了 Dolbeault 群 $H^{p,q}_{\bar{\partial}}(M)$．我们有层的序列

$$0 \to \Omega^p \to A^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{p,q} \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{p,q+1} \to \cdots$$

我们希望它是 Ω^p 的强层分解．先承认这一点，有

Dolbeault 定理　Dolbeault 上同调群 $H^{p,q}_{\bar{\partial}}(M)$ 与层的上同调群 $H^{p,q}(M,\Omega^p)$ 相同．

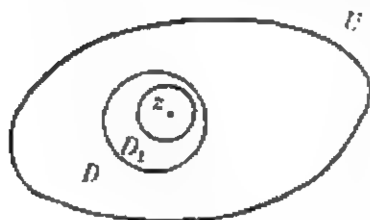
这个定理立即给出了 Mittag-Leffler 定理的实质．如果知道怎样计算 $H^{0,1}_{\bar{\partial}}(M)$，我们就能处理障碍了．因 $A^{p,q}$ 是光滑形式层，乘以一函数后不变其型，所以一切 $A^{p,q}$ 均为强层．我们所需的又是 Poincaré 引理．确实有这样的结果，即 Dolbeault-Grothendieck 引理．

它是以下面的结果为基础的.

推广的 Cauchy 积分公式 令 $f(z)$ 是定义在某开集 $U\subset \mathbf{C}$ 上的光滑函数. $D\subset U$ 是含于 U 中的闭域. 则对任意点 $z\in D^{\circ}=D$ 之内域, 我们有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{D}\frac{\partial f/\partial\bar{\xi}}{\xi-z}d\xi\wedge d\bar{\xi}. \qquad (1)$$

第二个积分是反常积分, 其收敛性将在证明过程中看到. 再注意 $\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}d\bar{\xi}=\bar{\partial}f$, 故若 f 为全纯第二项就为 0 而得通常的 Cauchy 积分公式.



证法如常. 以 z 为心作小圆 D_1, 则在 $D^{\circ}-D_1$ 中 $\omega=d\left(\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi\right)$ (ξ 为变量) 是一光滑形式. 记住 $d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\xi}}d\bar{\xi}$, 且 $\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}}\left(\frac{1}{\xi-z}\right)=0$ $\left(\frac{1}{\xi-z}\text{对 }\xi\text{ 全纯}\right)$, 可以算出

$$\omega=\frac{\partial f/\partial\bar{\xi}}{\xi-z}d\bar{\xi}\wedge d\xi.$$

所以由 Stokes 定理有

$$\int_{D-D_1}\frac{\partial f/\partial\bar{\xi}}{\xi-z}d\bar{\xi}\wedge d\xi=\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi-\int_{\partial D_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi.$$

如通常一样, 在 ∂D_1 上令 $\xi-z=\varepsilon e^{2\pi i\theta}$, 则当 $\varepsilon\longrightarrow 0$ 时第二个积分趋于 $2\pi i f(z)$. 所以左方的反常积分收敛而且 (1) 得证.

为以后的应用, 我们将 (1) 修改成一等价的形式. 首先, 已给任一复形式 ω, 我们有 $\int\bar{\omega}=\overline{\left(\int\omega\right)}$. 对 (1) 取共轭即得

$$\bar{f}(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{\overline{f}(\xi)d\xi}{\bar{\xi}-\bar{z}}d\bar{\xi}-\frac{1}{2\pi i}\int_{D}\frac{\overline{\partial f/\partial\bar{\xi}}}{\bar{\xi}-\bar{z}}d\bar{\xi}\wedge d\xi.$$

记住 $\frac{\partial}{\partial\xi}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, 容易验证

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{\xi}}=\overline{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)}.$$

在）上式中令 $f=\overline{\varphi}$，即得 $(\overline{\partial f/\partial \overline{\xi}})=\partial\overline{f}/\partial\xi$. 于是得

$$\overline{f}(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{\overline{f}(\xi)d\overline{\xi}}{\overline{\xi}-\overline{z}}-\frac{1}{2\pi i}\int_{D}\frac{(\partial\overline{f}/\partial\xi)}{\overline{\xi}-\overline{z}}d\overline{\xi}\wedge d\xi.$$

因为 f 是任意的，将上式中 $\overline{f}$ 改写成 f 即有

$$f(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\overline{\xi}-\overline{z}}d\overline{\xi}-\frac{1}{2\pi i}\int_{D}\frac{\partial f/\partial\xi}{\overline{\xi}-\overline{z}}d\overline{\xi}\wedge d\xi. \qquad (1)$$

现在来看 Dolbeault 复形

$$0\longrightarrow\Omega^p\longrightarrow A^{p,0}\longrightarrow A^{p,1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow A^{p,q}\longrightarrow\cdots,$$

先看一维情况，即设 $\dim_{\mathbf{C}}M=1$. 而 M 为一 Riemann 曲面. 这时只有 $p=0$，1，2 三种情况. 对于 $p=0$ 我们有

$$0\longrightarrow\mathcal{O}\longrightarrow A^{0,0}\xrightarrow{\overline{\partial}}A^{0,1}\longrightarrow A^{0,2}\xrightarrow{\ -\ }0$$

（注意（0，2）型形式中有 $d\overline{z}\wedge d\overline{z}=0$）. 对 $p=1$，我们有

$$0\longrightarrow\Omega^1\longrightarrow A^{1,0}\xrightarrow{\overline{\partial}}A^{1,1}\longrightarrow A^{1,2}=0.$$

$p=2$ 什么也没有，因 $A^{2,0}=0$. 这样 $p=0$，1 时的正合性化为证明其中的 $\overline{\partial}$ 是满射. 容易看出，它们都归结为以下问题：给定一定义于开集 U 上的光滑函数 f，方程 $\frac{\partial g}{\partial\overline{z}}=f$ 是否在 U 之每点附近均有局部解？它的答案是肯定的，确切地说即有

Dolbeault-Grothendieck 引理 已知任一定义于开集 $U\subset\mathbf{C}$ 上的光滑函数 $f(z)$，则每一点 $P\in U$ 均有一邻域 $V\subset U$ 使在 V 上有函数 $g(z)$ 适合 $\frac{\partial g}{\partial\overline{z}}=f$.

证 令 $D\subset U$ 是含 P 的闭圆盘. 对 $z\in D^{\circ}$ 定义 $g(z)$ 为

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{D}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi\wedge d\overline{\xi}.$$

我们已看到此积分收敛. 现证 $\frac{\partial g}{\partial\overline{z}}=f$. 为此再以 z 为心作半径 ε 的小圆 $D_1\subset D$. 在 $D-D_1$ 中考虑形式

$$\omega=d(f(\xi)\log|\xi-z|^2d\overline{\xi}).$$

我们可以把它算出来. 事实上，因为有

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(f(\xi)\log|\xi - z|^2) = \frac{\partial f}{\partial \xi}\log|\xi - z|^2 + \frac{f(\xi)}{|\xi - z|^2}\frac{\partial}{\partial \xi}[(\xi - z)(\bar{\xi} - \bar{z})]$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \xi}\log|\xi - z|^2 + \frac{f(\xi)}{|\xi - z|^2}(\bar{\xi} - \bar{z})$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \xi}\log|\xi - z|^2 + \frac{f(\xi)}{\xi - z}.$$

故由 Stokes 定理

$$\int_{D-D_1} \frac{\partial f}{\partial \xi}\log|\xi - z|^2 d\xi \wedge d\bar{\xi} + \int_{D-D_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \wedge d\bar{\xi}$$

$$= \int_{\partial D} f(\xi)\log|\xi - z|^2 d\bar{\xi} - \int_{\partial D_1} f(\xi)\log|\xi - z|^2 d\bar{\xi}.$$

再作 $\xi - z = \varepsilon e^{i\theta}$，可知右方第二个积分可用 $(\varepsilon\log\varepsilon)$ M 来估计，$M = \max\limits_{D}|f(\xi)|$．故当 $\varepsilon \longrightarrow 0$ 时它趋向 0．从而

$$2\pi i g(z) = \int_{\partial D} f(\xi)\log|\xi - z|^2 d\bar{\xi} - \int_{D} \frac{\partial f}{\partial \xi}\log|\xi - z|^2 d\xi \wedge d\bar{\xi}.$$

现在可在积分号下作$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$而有

$$2\pi i \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = -\int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\bar{\xi} - \bar{z}} d\bar{\xi} - \int_{D} \frac{\partial f/\partial \bar{\xi}}{\bar{\xi} - \bar{z}} d\bar{\xi} \wedge d\xi.$$

由（1′）此即 $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = f(z)$．证毕．

注意，这一结果在以上表述中严格地是一局部结果．每一点 P 均有一邻域 $V_P \subset U$ 和 g 使在 V_P 中$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = f$．这些局部解可能拼成也可能拼不成一整体解．因此它并不说明 $H^1(U,\mathcal{O}) = 0$．我们提醒这一点是因为对任意开集 $U \subset \mathbf{C}$ 恰好有 $H^1(U,\mathcal{O}) = 0$．事实上有一个相当不简单的定理指出对任意非紧 Riemann 曲面 X，$H^1(X, \mathcal{O}) = 0$. 所以对任一非紧 Riemann 曲面，Mittag-Leffler 问题可解．至于紧的情况，我们已经知道在环面 T^2 上 $H^1(T^2, \mathcal{O}) \neq 0$. 由 Dolbeault 定理和 Hodge 定理，我们也知道 $H^1(X,\mathcal{O}) = H^{0,1}_{\bar{\partial}}(X)$

是有限维的．但这件事还可以讲得更清楚，下一节即可看到．

§ 4. Riemann-Roch 定理

我们要在本节中计算紧 Riemann 曲面的 $H_{\bar{\partial}}^{0,1}(M)$．但在此之前可不用其复构造而得一些一般知识．$M$ 是一紧可定向流形，所以有 Poincaré 对偶映射

$$H^1(M) \longrightarrow H_1(M), \quad u \longmapsto u \frown [M],$$

这里用的是整系数同调与上同调，$[M] \in H_2(M)$ 是基本类．记住还有 Pontrjagin 赋值映射

$$H^i(M) \longrightarrow [H_i(M)]^*, \quad u \longmapsto \langle u, \cdot \rangle,$$

若系数整环不是域，它不一定是同构．但记住（第十章）如果 $H_{i-1}(M)$ 是自由的，则必是同构．现在，我们感兴趣的是 $i=1$，而 $H_0(M)$ 确是自由的．和以前一样，它表示以下映射是非奇异的：

$$H^1(M) \times H_1(M) \longrightarrow Z,$$
$$(u,v) \longmapsto \langle u \smile v, [M] \rangle.$$

由此首先得知 $H^1(M)$ 无挠．因为若 $u \in H^1(M)$ 阶数有限，则对任意 $v \in H^1(M)$，uv 阶数也有限．但，因 $H^2(M)$ 是自由的，故对任意 $v \in H^1(M)$，$uv=0$．而由对偶性有 $u=0$．但与前面不同，上积配对是斜对称形式而非对称的．所以我们需要一些关于斜对称形式的理论．所幸的是这样的理论比对称形式理论简单得多．它只有一个定理：

定理　令 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是自由 **Z** 模（即自由 Abel 群）V 上的非奇异斜对称形式，则 V 有基底 $(a_1, \cdots, a_k, b_1, \cdots, b_k)$ 使

$$\langle a_i, b_j \rangle = \delta_{ij}.$$

特别是 $\mathrm{rank} V = 2k$ 为偶．

所以一切同秩的非奇异斜对称形式都是等价的．

证　令 $(a_1, \cdots, a_l)$ 是 V 的任意基底，$(\varphi_1, \cdots, \varphi_l)$ 是 $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbf{Z})$ 的对偶基底．由假设

$$V \longrightarrow V^*, \qquad v \longmapsto \langle \cdot, v\rangle$$

是一同构．所以 φ_i 之形必为 $\varphi_i(\cdot)=\langle\cdot, b_i\rangle$，$b_i\in V$．特别是

$$\langle a_1, b_1\rangle = 1,$$

$$\langle a_i, b_1\rangle = 0, \quad i>1.$$

考虑 a_1，b_1 生成的子模 $V_1=\{a_1, b_1\}$．今证 V_1 是 V 的直和分解的一项．为此只需证明商空间 V/V_1 为自由，即若 $v\in V$ 使有某个 $\lambda\neq 0$ 而 $\lambda v\in\{a_1, b_1\}$，则 $v\in\{a_1, b_1\}$．事实上若 $\lambda v=\mu a_1+\nu b_1$ 则有

$$\lambda\langle v, a_1\rangle = -\nu, \quad \lambda\langle v, b_1\rangle = \mu.$$

所以

$$\lambda v = \lambda\langle v, b_1\rangle a_1 - \lambda\langle v, a_1\rangle b_1.$$

因 $\lambda\neq 0$ 而 V 为自由，可从上式消去 λ 而得

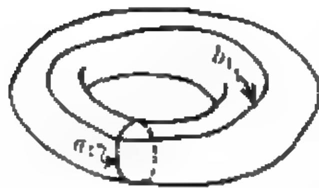
$$v = \langle v, b_1\rangle a_1 - \langle v, a_1\rangle b_1.$$

将 V 按一基底 $(a_1, b_1, \cdots)$ 写成 $V=V_1\oplus V_2$，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 有如下的矩阵表示：

$$B=\begin{pmatrix} B_1 & A \\ -A^t & C\end{pmatrix},$$

$B_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$．采用以前对对称情况的论证（第十六章§1）用一形如 $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (B_1^{-1})^t & 1\end{pmatrix}$ 的矩阵作基底变换，则

$$PBP^t=\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2\end{pmatrix}.$$



因 P，B，B_1 均为单模的（即 $\det=1$），B_2 也是．换言之，B 在 V 上分解为直和 $(V_1, B_1)\oplus(V_2, B_2)$．在 (V_2, B_2) 上重复以上论证，即得定理之证．

这样，$H^*(M)$的同调构造是简单的．$H^1(M)$ 相对于基底 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_g, \mu_1, \cdots, \mu_g)$ 是自由的，且秩为 $2g$，这里

$$\lambda_i\mu_j=\delta_{ij}.$$

g 称为 M 的亏数 (genus). 其实我们是走了一条迂回的路来表达这一切. 它是关于紧可定向曲面的非常经典非常几何的定理. 例如亏数 1 的曲面是一环面, 而 λ_1, μ_1 由相交数为 1 的对偶同调类 a_1, b_1 表示 (第十二章). 众所周知, 任一紧可定向曲面均同胚于一串具有 g 个 "洞" 的环面之一. 唯一例外是 "没有洞" 的 S^2 (亏数 $=0$). 所以, 从拓扑上讲亏数是 M 的唯一不变量.



为计算 $H_{\bar{\partial}}^{0,1}(M)$, 要用调和理论. 先搞实 de Rham 群 $H_R^1(M)$. 记住, 若 $z=x+iy$ 是一局部坐标而 $\omega=Pdx+Qdy$ 是一个 1-形式, 则相对于体元素 $dx\wedge dy$ 的 Laplace 算子 Δ 是

$$\Delta\omega=\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)dx+\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\right)dy.$$

用复语言来说, 由于

$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar{z}}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

$$\Delta=4\frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar{z}}.$$

若用 $*$ 算子表示, 有 $\Delta=d\delta+\delta d$, 且 $\delta=-*d*$ 是相应于内积

$$(\tau,\mu)=\int_M \tau\wedge *\mu$$

的形式伴. 为对 $\bar{\partial}$ 做这些工作, 需要把内积推广为复值形式的 Hermite 形式

$$(\tau,\mu)=\int_M \tau\wedge\overline{*\mu},$$

然后再作 $\bar{\partial}$ 的形式伴. 经过计 有

$$\bar{\delta}=-\overline{*}\,\partial\,\overline{*},$$

$\overline{*}(u+iv)=*u-i*v$ 是 $*$ 算子的复共轭.

现令 $\omega=f d\bar z$ 是 (0, 1) 型 1-形式．我们有 $\bar\delta\bar\partial(\omega)=0$，且

$$\bar\partial\bar\delta(\omega)=\bar\partial * \bar\partial * (f d\bar z)=-\bar\partial * \partial(-\mathrm{i} f dz)$$

$$=-\bar\partial * \left(-\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial \bar z} d\bar z \wedge dz\right)=\bar\partial\left[2\left(\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right)\right]$$

$$=2\bar\partial\left(\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right)=2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar z} d\bar z.$$

所以若记 $\bar\Delta=\bar\partial\bar\delta+\bar\delta\bar\partial$ 是 $\bar\partial$ 的 Laplace 算子，我们有 $\bar\Delta=\frac{1}{2}\Delta$．特别是 $\bar\Delta\omega=0$ iff $\Delta\omega=0$．这表明，包含关系 $A^{0,1}(M)\subset A^1(M)=$（总阶数 1 的形式之空间），诱导出包含关系

$$H_{\bar\partial}^{0,1}(M)=\mathscr{H}^{0,1}\subset\mathscr{H}^1=H_R^1(M).$$

我们也有 $A^1(M)=A^{0,1}(M)\oplus A^{1,0}(M)$，且 $A^{1,0}(M)=\overline{A^{0,1}(M)}$，即 $f dz\longmapsto \bar f d\bar z$ 是 $A^{1,0}(M)$ 与 $A^{0,1}(M)$ 间的实同构．作类似的计算后有

$$\bar\Delta(f dz)=\bar\delta\bar\partial(f dz)=2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar z}\right) dz,$$

它表明 $\bar\Delta(f dz)=0$ iff $\bar\Delta(\bar f d\bar z)=0$．这清楚地证明了

$$\mathscr{H}^{1,0}(M)\oplus\mathscr{H}^{0,1}(M)=\mathscr{H}^1(M),$$

$$\dim\mathscr{H}^{1,0}(M)=\dim\mathscr{H}^{0,1}(M).$$

这样，我们可以断言有以下的

定理 $\dim H_{\bar\partial}^{0,1}(M)=\dim H_{\bar\partial}^{1,0}(M)=\frac{1}{2}\dim H_R^1(M)=g$（$M$ 之亏数）．

要注意，这个结果可以看作一个指标定理．因为，算子 $A^{0,0}(M)\xrightarrow{\bar\partial}A^{0,1}(M)$ 的指标是

$$\dim H_{\bar\partial}^{0,0}(M)-\dim H_{\bar\partial}^{0,1}(M)=1-g.$$

它是一拓扑不变量．现在要推广它：为了说明这是什么意思，可以提出下面的问题：我们知道若可证对于某个 X, $H^{0,1}(X)\cong H^1(X,\mathcal{O})=0$，例如当 X 为非紧时，则表示 Mittag-Leffler 定理对 X 成立，这当然很好．但若 $H^1(X,\mathcal{O})\neq 0$，计算它有什么好处？在

回答此问题前，先弄清一个技巧性的地方．记住层和预层之区别在于（S，3）即可否把局部的东西拼起来．例如 $H^0(U,\Gamma)$ 中的元是一族（U_i，a_i）而 $\bigcup_i U_i = U, a_i \in \Gamma(U_i)$，在 $U_i \cap U_j$ 上 $a_i = a_j$．若 Γ 为一层，由（S，3）可得 $a \in \Gamma(U)$ 使 $a|U_i = a_i$．这样，$H^0(U,\Gamma) = \Gamma(U)$ 二者是一回事．但若 Γ 只是预层就不行了．这时，我们有一自然的映射 $\Gamma(U) \longrightarrow H^0(U,\Gamma)$，但它可能不是一对一或不是满射．所以要细心地区别二者．可能出现这样的事例的情况是有一子层 $S \subset \Gamma$，Γ 是大一点的层．这时对任一开集 U，$S(U) \subset \Gamma(U)$ 故可作商模 $\Gamma(U)/S(U)$．显然，规定

$$U \longmapsto \Gamma(U)/S(U)$$

连同诱导的限制映射给出一个预层．但即令 S，Γ 为层，它也可能不是层．若 $U = U_i$，$[a_i] \in \Gamma(U_i)/S(U_i)$ 彼此相容，则在 $U_i \cap U_j$ 上 $[a_i] = [a_j]$，但这只说明 $a_i - a_j \in S(U_i \cap U_j)$，故即令 Γ 为层也无法应用（S，3）．举一个例，令 $\mathscr{O}$ 为全纯函数芽层，$\mathscr{M}$ 为亚纯函数芽层．显然 $\mathscr{O} \subset \mathscr{M}$ 为一子层．但商 $\mathscr{M}/\mathscr{O}$ 不是层．一族相容的 $[a_i] \in \mathscr{M}(U_i)/\mathscr{O}(U_i)$ 只表示 $a_i - a_j \in \mathscr{O}(U_i \cap U_j)$ 或者说 a_i，a_j 有相同主部．若 $\mathscr{M}/\mathscr{O}$ 是层则一切 Mittag-Leffler 问题均有解，这当然不真．但以上讨论也意味着 $[a] \in \mathscr{M}(U)/\mathscr{O}(U)$ 与指定主部是相同的．因此 $\mathscr{M}/\mathscr{O}$ 称为主部的预层．

从上同调观点看，对于预层虽可定义上同调，但基本的工具，即与短正合序列 $0 \longrightarrow S \longrightarrow \Gamma \longrightarrow A \longrightarrow 0$ 相关的长正合序列只对层适用．但非常有利的情况是，若仔细考查基本引理的证明和长正合序列的构造，会看到 S 和 Γ 确实需要是层，而商 A 则不必．所以由 $0 \longrightarrow \mathscr{O} \longrightarrow \mathscr{M} \xrightarrow{\pi} \mathscr{M}/\mathscr{O} \longrightarrow 0$ 仍可得一正合序列

$$\cdots \longrightarrow H^0(X,\mathscr{M}) \xrightarrow{\pi_*} H^0(X,\mathscr{M}/\mathscr{O}) \xrightarrow{\delta} H^1(X,\mathscr{O}) \longrightarrow \cdots.$$

由已经证明了的可知，元素 $P \in H^0(X,\mathscr{M}/\mathscr{O})$ 由一族亚纯函数 (a_i)，$a_i \in \mathscr{M}(U_i)$ 来表示，这里 $X = \bigcup_i U_i$，$a_i - a_j \in \mathscr{O}(U_i \cap U_j)$，即是说 P 是主部的标志．$\delta P \in H^1(X,\mathscr{O})$ 由上循环 $(i, j) \longmapsto a_i -$

a_j 表示. 要找一个亚纯函数 α 使有指定的主部 P, 表示 $\alpha \in H^0(X, \mathscr{M})$ 而 $\pi_*(\alpha) = P$. 所以 $\mathrm{Im}\pi_* = \ker\delta$ 度量了 Mittag-Leffler 问题可解度. 但同时也有

$$H^0(X, \mathscr{M}/\mathscr{O})/\ker\delta = \mathrm{Im}\delta \subset H^1(X, \mathscr{O}),$$

所以 $H^1(X,\mathscr{O})$ 给出了有多少个主部无解的上界. 例如设 $X=T^2$ 是一环面而 $P=$单个点上的单极点, 我们知道这个 P 无解, 即 P 是 $H^0(X, \mathscr{M}/\mathscr{O})/\ker\delta$ 中的非零元. 但我们现在知道 $H^1(X,\mathscr{O}) = H_{\bar{\partial}}^{0,1}(X)$ 维数为 1. 所以类[P]是线性无关意义下唯一无解的主部. 就是说, 若 $Q=$在与 P 不同的另一点上的极点, 则 $P-Q$ 有解. 即环面上存在亚纯函数在两个不同点上有极点. 这件事并不太好证. 但至少在这时, 若假设已知一些分析上的事实, 却可以做到. 因此设已知 Weierstrass 函数的基本性质. 令 $\Gamma \subset \mathbf{C}$ 是一格, 它定义一环面 $\mathbf{C}/\Gamma = T$. Weierstrass 函数 $\mathscr{P}$ 即

$$\mathscr{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Gamma - 0}\left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right].$$

它是 $\mathbf{C}$ 上的亚纯函数而在 Γ 各点上有二阶极点. 它也是双周期的, 即 $\mathscr{P}(z+\omega) = \mathscr{P}(z)$, $\omega \in \Gamma$. 所以它定义 T^2 上的亚纯函数而有一个二阶极点. 这样, 它还一定另有两个零点. 现在 $f(z) = \mathscr{P}'(z)/\mathscr{P}(z)$ 也是双周期的. 它将 $\mathscr{P}(z)$ 的极点与零点都变成单极点. 这样, 想得到我们之所需, 应证 $\mathscr{P}(z)$ 有一个 2 阶零点. 我们知道, $\mathscr{P}(z)$ 适合方程

$$\mathscr{P}'(z)^2 = (\mathscr{P}(z) - e_1)(\mathscr{P}(z) - e_2)(\mathscr{P}(z) - e_3),$$

$e_1 = \mathscr{P}(1/2)$, $e_2 = \mathscr{P}(\tau/2)$, $e_3 = \mathscr{P}((1+\tau)/2)$, 且 $(1, \tau)$ 生成 Γ. 所以若用 $\mathscr{P}(z) - e_1$ (它也是双周期的) 代替 $\mathscr{P}(z)$, 则 $z=1/2$ 将是一零点且 $\mathscr{P}'(1/2)=0$. 故 $z=1/2$ 不是单零点而是二重零点. $\mathscr{P}'(z)/(\mathscr{P}(z) - e_1)$ 于是是 T^2 上具有两个单极点 $z=0$ 和 $z=1/2$ 的函数.

这样我们看到, 即令 $H^1(X,\mathscr{O})$ 非零, 计算它仍是有用的. 要沿这条思路得到更多结果, 考虑一个与 Mittag-Leffler 问题相平行

的问题．若有 X 上的亚纯函数 f，而 X 恰好又是紧的，则 f 不仅有极点，而且必取一切值例如 0，且总阶数相同．在 Mittag-Leffler 问题中，我们只指定极点位置和相应主部，而对其它值不置一词．现在稍许放松对极点的要求，只指定其位置和阶数而对主部不作任何要求，但同时则加强另一方面的要求即指定零点位置与阶数．这样的数据显然可用从 X 到整数集的分布函数 $\nu: X \longrightarrow \mathbf{Z}$ 来表示，这里 ν 只在一离散集上$\neq 0$．$\nu(P)=k$，$k>0$ 表示 P 点是 k 阶零点，$k<0$ 表示它是 $-k$ 阶极点．我们有

Riemann 分布定理　在全平面 $\mathbf{C}$ 上，任意分布函数 ν 均有解，即有一亚纯函数 f 只在 ν 指定的点上有零点和极点．

我们先用层的语言来重述这个问题．在任意开集 U 上，U 上函数之空间 $\mathscr{F}(U)$ 显然是一个环．但在复范畴中还可作更强的断言．例如 U 上全纯函数空间 $\mathscr{O}(U)$ 还是整环，即 $fg=0 \Rightarrow f=0$ 或 $g=0$．这里 $0 \in \mathscr{O}(U)$ 是环 $\mathscr{O}(U)$ 的零元素，即恒等于 0 的函数．这个论断可直接得自幂级数展开式，它虽然容易看出，却刻画了全纯范畴的特性．类似地，U 上的亚纯函数空间 $\mathscr{M}(U)$ 是一个域．事实上若 $f\neq 0$，则其零点是孤立的，所以 $g=1/f$ 也是亚纯函数，其极点正是 f 的零点（反过来也对）．要提醒一点，$\mathscr{M}(U)$ 不是 $\mathscr{O}(U)$ 的商域 $F\mathscr{O}(U)$．事实上对应关系 $U \longrightarrow F\mathscr{O}(U)$ 并不是层，但 $\mathscr{M}(U)=H^0(U,F\mathscr{O})$ 是此预层的 H^0．

Riemann 定理中显然应除开常值函数，故令 $\mathscr{M}^*(U)=\mathscr{M}(U)-0$ 是不恒为 0 的亚纯函数的芽层．若 $f,g \in \mathscr{M}^*(U)$ 的零点、极点的位置与阶数均相同，则 f/g 是全纯的（极点已消去）且恒不为 0（零点已消去）．若 $\mathscr{O}^*(U)$ 是恒不为 0 的全纯函数空间（注意 $\mathscr{O}^*(U)\neq\mathscr{O}(U)-0$），则 $f\equiv g$ 于 $\mathscr{M}^*(U)/\mathscr{O}^*(U)$ 中，规定 $U \longrightarrow \mathscr{M}^*(U)/\mathscr{O}^*(U)$ 是一预层，记作 $\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*$，并称为分布或除子（divisor）的预层．正如主部的预层 $\mathscr{M}/\mathscr{O}$ 一样，$\nu \in H^0(U,\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*)$ 表示一族 (α_i)，$\alpha_i \in \mathscr{M}^*(U_i)$，$\bigcup_i U_i=U$，且在 $U_i \cap U_j$ 上 $\alpha_i/\alpha_j \in \mathscr{O}^*(U_i \cap U_j)$．（注意 $\mathscr{M}^*(U)$ 是乘法群，故用乘法记号．）

这和在 U 上指定零点和极点（即在 U_i 上指定 a_i 的零点和极点）是一回事．按这样的解释，Riemann 定理很容易证明．由

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^* \longrightarrow \mathcal{M}^* \xrightarrow{\nu} \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^* \longrightarrow 0,$$

我们有

$$\cdots \longrightarrow H^0(\mathbf{C},\mathcal{M}^*) \xrightarrow{\nu_*} H^0(\mathbf{C},\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \longrightarrow H^1(\mathbf{C},\mathcal{O}^*) \longrightarrow \cdots.$$

Riemann 定理就是要证明 ν_* 是满射．如能证 $H^1(\mathbf{C},\mathcal{O}^*)=0$，则此事成立，但由

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{e^{2\pi i}} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0,$$

我们得到

$$\cdots \longrightarrow H^1(\mathbf{C},\mathcal{O}) \longrightarrow H^1(\mathbf{C},\mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^2(\mathbf{C},\mathbf{Z}) \longrightarrow \cdots.$$

但由 Mittag-Leffler 定理，$H^1(\mathbf{C},\mathcal{O})=0$．由 de Rham 定理 $H^2(\mathbf{C},\mathbf{Z})$ ＝奇异上同调＝0，因 $\mathbf{C}$ 为可缩，证毕．此外还可证明对任一非紧可定向流形 X，$H^2(X,\mathbf{Z})=0$．因为我们已知对非紧 Riemann 曲面 X，$H^1(X,\mathcal{O})=0$．所以上证对非紧的 X 也成立．

在紧 Riemann 曲面 M 上，Riemann 定理可能不成立．然而亚纯函数 f 的极点与零点毕竟是一回事．所以按我们的计算方法，总阶数必为 0：

$$D(\nu)=\sum \nu(z)=0.$$

仍然和前面一样，序列

$$\longrightarrow H^0(M,\mathcal{M}^*) \xrightarrow{\nu_*} H^0(M,\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^1(M,\mathcal{O}^*) \longrightarrow \cdots$$

表明 $H^0(M,\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)/\mathrm{Im}\,\nu_* \subset H^1(M,\mathcal{O}^*)$ 度量不可解的程度．但现在还有一个新的特性：空间 $H^1(M,\mathcal{O}^*)$ 是有几何意义的，因为 $\mathcal{O}^*=\mathbf{C}_{\mathcal{O}}^*$＝值在 $\mathbf{C}^*=\mathbf{C}-0$ 中的全纯函数芽层，故 $H^1(M,\mathcal{O}^*)$ 是 M 上的全纯线丛之群．实际上，若仔细地考查一下定义，则映射

$$H^0(M,\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^1(M,\mathcal{O}^*)$$

可以几何地描述如下：令 ν 为由一族亚纯函数 (a_i)，$a_i \in \mathcal{M}^*(U_i)$，

$\bigcup U_i = M$ 且 $a_i/a_j \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$ 所表示的分布，则 ξ_ν 只不过就是由迁移函数 $g_{ij} = a_i/a_j$ 所示的线丛，因为有以下的上循环条件，以它们为迁移函数是可以的：

$$g_{ij}g_{jk}g_{ki} = 1.$$

用这样的语言，Riemann 定理可以改述为：分布 ν 有解 iff 线丛 ξ_ν 是平凡的。注意，这里的平凡性是在全纯范畴中讲的，所以不能由其陈类 $c_1(\xi_\nu)$ 决定，但 $c_1(\xi_\nu)=0$ 至少是一必要条件。我们会看到，这件事有简单的含义。

若 M 为紧，分布 ν 只会有有限多点 P_i 使 $\nu(P_i) = k_i \neq 0$，所以可以用记号 $D = \prod P_i^{k_i}$ 表示 ν。用这样的记号，我们称 ν 为一除子并用乘法运算，而用函数记号时，ν 的运算是加法。这不会造成多少混乱。对于除子 ν，其次数定义为

$$\deg \nu = \sum \nu(P_i) = \sum k_i.$$

对亚纯函数 f，我们总有一个除子 (f) 与之相关：

$$(f)(P) = \operatorname{order} f(P).$$

因为我们已知 $\deg(f) = 0$，所以想对任意 D 解出 $D = (f)$ 是没有希望的。但对任意 D，可以讨论 f 比 D“好”或“坏”。例如，$(f)(P) \geq D(P)$ 或者表示 P 是 f 之零点，其阶数至少是 $D(P)$，所以 f 更正则些，或者表示 P 是 f 的极点，其阶数不坏于 $|D(P)|$。若有某个 g 使 $D = (g)$，这表示 f/g 为全纯。“除子”一词来源如此。

对一已给除子 D，可定义除子层 $\mathcal{O}_D$，即指定

$$U \longmapsto \mathcal{O}_D(U) = \{f \in \mathcal{M}(U) \mid (f) \geq -D\},$$

即是说，$\mathcal{O}_D(U)$ 是每点不比 $-D$ 坏的亚纯函数空间（选用 $-D$ 而不用 $+D$ 当然是一种规范化约定，它会使后来的结果更顺）。例如，若 $D = P$ 是一“点”除子，$\mathcal{O}_D(U)$ 就是那些在 P 至多有单极点的亚纯函数集。$\mathcal{O}_D$ 显然确为一层，所以我们对 $H^0(M, \mathcal{O}_D) = \mathcal{O}_D(M)$ 十分感兴趣。在 $D = 0$ 的特例下，$\mathcal{O}_D = \mathcal{O}$，所以我们知道 $H^0(M, \mathcal{O})$ 是什么。一般情况下我们可以提到，除子可以用简单的点除子构造

出来．这可能会给出它们的层的某种关系．其实这关系是很简单的．令 P 为一点除子，当然，$\mathcal{O}_D\subset\mathcal{O}_{D+P}$是一子层，故有正合序列：

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_D\longrightarrow\mathcal{O}_{D+P}\longrightarrow\mathcal{O}_{D+P}/\mathcal{O}_D=\Gamma\longrightarrow 0. \qquad (*)$$

不难描述其商预层 Γ．令 U 为一开集，若 $P\notin U$，显然 $\mathcal{O}_{D+P}(U)=\mathcal{O}_D(U)$，而 $\Gamma(U)=0$．若 $P\in U$，$\Gamma(U)$ 可用任意地在 P 点有单极点的亚纯函数 $f\in\mathscr{M}_{D+P}$来表示．所以这时 $\dim\Gamma(U)=1$．简单如此，计算 $H^*(M,\Gamma)$ 应非难事．我们需要的仅仅是以下的

引理 $H^1(M,\Gamma)=0$．

证 给定 $[\varphi]\in H^1(M,\Gamma)$，可用上循环 $\varphi\in C^1(\mathscr{U},\Gamma)$ 表示 $[\varphi]$，这里 $\mathscr{U}=(U_i)$ 是一开覆盖，使得只有一个 U_i 适合 $U_i\ni P$．令 $P\in U_{i_0}$．给定 (i,j) 后，若 i 或 $j\neq i_0$，则因 $\varphi(i,j)\in\Gamma(U_i\cap U_j)$，$P\notin U_i\cap U_j$，必有 $\varphi(i,j)=0$．另一方面，若 $i=j=i_0$，我们也有

$$\begin{aligned}0=\delta\varphi(i_0,i_0,i_0)&=\varphi(i_0,i_0)-\varphi(i_0,i_0)+\varphi(i_0,i_0)\\&=\varphi(i_0,i_0).\end{aligned}$$

所以 $\varphi=0$，从而 $[\varphi]=0$ 而引理得证．

有此结果后，可作出与 $(*)$ 相关的正合序列

$$\begin{aligned}&0\longrightarrow H^0(M,\mathcal{O}_D)\longrightarrow H^0(M,\mathcal{O}_{D+P})\longrightarrow H^0(M,\Gamma)\\&\longrightarrow H^1(M,\mathcal{O}_D)\longrightarrow H^1(M,\mathcal{O}_{D+P})\longrightarrow H^1(M,\Gamma)=0.\end{aligned} \qquad (**)$$

由此立即可知 $H^*(M,\mathcal{O}_D)$ 为有限维 iff $H^*(M,\mathcal{O}_{D+P})$ 也是．这时，$(**)$ 的 Euler 示性数为 0，即有

$$\chi(H^*(M,\mathcal{O}_D))-\chi(H^*(M,\mathcal{O}_{D+P}))+1=0. \qquad (***)$$

(由引理 $\dim H^0(M,\Gamma)=\dim\Gamma(U)=1$)．这里当然有

$$\chi(H^*(M,\mathcal{O}_D))=\dim H^0(M,\mathcal{O}_D)-\dim H^1(M,\mathcal{O}_D)$$

是 $H^*(M,\mathcal{O}_D)$ 的 Euler 示性数．因 $\deg(D+P)=\deg D+1$，$(***)$ 可写为

$$\chi(H^*(M,\mathcal{O}_D))-\deg D=\chi(H^*(M,\mathcal{O}_{D+P}))-\deg(D+P).$$

因为任意除子都可由点除子做出来，此式说明：$\chi(H^*(M,\mathcal{O}_D))-$

$\deg D$ 只要对 D 有定义则总是常数．于是若 $D=0$，我们有

$$\chi(H^*(M,\mathcal{O}))=\dim H^0(M,\mathcal{O})-\dim H^1(M,\mathcal{O})=1-g.$$

这样，我们证明了

Riemann-Roch 定理（RR 定理） 对紧 Riemann 曲面 M，$H^*(M,\mathcal{O}_D)$ 对任意除子 D 均为有限维，而且

$$\chi(H^*(M,\mathcal{O}_D))-\deg D=1-g,$$

g 是 M 的亏数．

作为一个最简单的应用，我们有

定理 亏数为 0 的紧 Riemann 曲面 M 必同构于 Riemann 球面．

因为 $g=0$ 时我们有，对任一除子 D，当 $\deg D\geqslant 0$ 时

$$\dim H^0(M,\mathcal{O}_D)=1+\deg D+\dim H^1(M,\mathcal{O}_D)>0.$$

特别是对点除子 $D=P$，$\dim H^0(M,\mathcal{O}_D)\geqslant 2$．在 M 上可以有全纯函数，这时 $\dim H^0(M,\mathcal{O}_D)=1$，所以在 M 上一定有不全纯的亚纯函数 $f\in H^0(M,\mathcal{O}_D)$，即 f 在 P 点有单极点．前已说过，f 给出一个全纯映射

$$f: M\longrightarrow S^2$$

其映射度为 1，故 f 是同构．证毕．

为了领略这个结果，读者可能记得当 $g=1$ 时，这个定理完全错了．早在第一章中我们就已看到，在环面 T^2 上有不可数无穷多个互不同构的复构造．

当然也可以在别处用类似的证明．例如我们已证明过在环面上必有具有两个单极点的亚纯函数．取 $D=P+Q$ 以及 $g=1$，我们有

$$\dim H^0(M,\mathcal{O}_D)\geqslant 2.$$

$H^0(M,\mathcal{O}_D)$ 中的对象或者是全纯函数－去掉一维，或有一个单极点（P 或 Q），这又不能存在．因此其中必有在 P，Q 两点均有单极点的亚纯函数在．

RR 定理还有许多重要应用．但要更详细地讨论它们就需要

更多工具，如 Serre 对偶性定理．这需要时间太多．于是我们转而集中讨论 RR 定理为什么可以看作指标定理．先要作一些一般评论．RR 定理是表述为以下公式的：

$$\dim H^0(M,\mathcal{O}_D)-\dim H^1(M,\mathcal{O}_D)=1-g+\deg D.$$

其中，至少从目前的观点看来，最有意思的是第一项 $H^0(M,\mathcal{O}_D)$，因为我们知道它是奇点由 D 控制的亚纯函数空间．所以 $H^1(M,\mathcal{O}_D)$ 这一项有些麻烦．如果没有这一项，我们就会得到更准确的定理．但 $H^1(M,\mathcal{O}_D)$ 没有几何意义．取 $D=0$ 这个简单情况．这时由 Dolbeault 定理 $H^1(M,\mathcal{O})=H_{\bar\partial}^{0,1}(M)$．我们说过，共轭映射

$$A^{0,1}(M)\longrightarrow A^{1,0}(M),\quad fd\bar z\longmapsto \bar f dz$$

将调和形式 $\mathscr{H}^{0,1}(M)$ 映到 $\mathscr{H}^{1,0}(M)$ 上．所以

$$H^1(M,\mathcal{O})=H_{\bar\partial}^{0,1}(M)=H_{\partial}^{1,0}(M).$$

再用 Dolbeault 定理，$H_{\partial}^{1,0}(M)=H^0(M,\Omega^1)$，$\Omega^1\longrightarrow A^{1,0}(M)\xrightarrow{\bar\partial} A^{1,1}(M)$ 是全纯 1-形式芽层．所以

$$H^1(M,\mathcal{O})\simeq H^0(M,\Omega^1)$$

也可以解释为整体全纯 1-形式．事实上，这就是 Serre 对偶定理的最简单的情况（见第十七章，那里讨论了如何由 Hodge 理论得出 Poincaré 对偶性．这里是它的复的类比）．

即使承认 RR 定理的第二项很重要，没有它也还是更好．甚至若能将其中的"—"号改为"+"号，也可得到一个定理，它给出这两个空间维数的上界．但这是过分的奢求．而指标性定理的本性正在于此：只能保持交替和或 Euler 示性数型的不变量．这个值得注意的现象第一次在第四章中出现：那里我们计算了三角剖分的顶点数、边数和面数．它们几经变形得到抽象的形状．说到头来，我们最终还是用的交替和这一相同的思想．读者从 RR 定理的证明中看到了这一点．

§5. Riemann-Roch 定理的 Hirzebruch 推广

要想把 RR 定理解释为指标定理，先需推广 Dolbeault 定理．这

意味着，例如对于 $D=0$，

$$H^0(M,\mathscr{O}) = H_{\bar\partial}^{0,1}(M), \quad H^1(M,\mathscr{O}) = H_{\bar\partial}^{1,1}(M),$$

可以用下面的 Dolbeault 复形计算

$$0 \longrightarrow A^{0,0}(M) \longrightarrow A^{0,1}(M) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow A^{1,0}(M) \longrightarrow A^{1,1}(M) \longrightarrow 0.$$

在这个复形上有 Laplace 算子

$$\bar\partial + \bar\partial^* : A^{0,0}(M) \oplus A^{1,1}(M) \longrightarrow A^{0,1}(M) \oplus A^{1,0}(M),$$

其指标 dim ker－dim coker 即 RR 定理中出现的数 $\chi(H^*(M,\mathscr{O}))$．要重复这一切，就需要一个 Dolbeault 复形来计算有除子 D 时的层的上同调 $H^*(M,\mathscr{O}_D)$．这里的关键是除子和全纯线丛的关系．记住我们有层的正合序列

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}^* \longrightarrow \mathscr{M}^* \longrightarrow \mathscr{M}^*/\mathscr{O}^* \longrightarrow 0,$$

$\mathscr{M}^*$＝恒不为零亚纯函数层，$\mathscr{O}^*$＝恒不为 0 的全纯函数层，$\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*$＝除子预层．于是我们有正合序列

$$H^0(M,\mathscr{M}^*) \longrightarrow H^0(M,\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^1(M,\mathscr{O}^*) \longrightarrow \cdots,$$

映射 δ 表明如何由除子过渡到丛．将除子 D 表示为一族 (U_i,α_i)，$\alpha_i \in \mathscr{M}^*(U_i)$，$\alpha_i/\alpha_j \in \mathscr{O}^*(U_i \cap U_j)$，$\bigcup U_i = M$．则 $\delta D=[D]$ 正是一个线丛，其迁移函数是

$$g_{ij} = \alpha_i/\alpha_j \qquad 在\ U_i \cap U_j\ 上.$$

因 $[D]$ 是复线丛，我们有其陈类 $c_1[D] \in H^2(M,\mathbf{Z})$．因 M 上有标准的定向，故有一整数 $\langle c_1[D],[M]\rangle$（仍记为 $c_1[D]$）拓扑地、光滑地但非全纯地决定丛 $[D]$．现就一个简单例子按此法作计算．当然，若 $D=0$ 可取 $\alpha_i=1$（对一切 i）．这时对一切 i，j，$g_{ij}=1$ 而显然 $[0]$ 是平凡丛．仅次的简单情况是 $D=P$ 为点除子．取 $M=S^2=\mathbf{CP}^1+0$ 为 Riemann 球．记住 M 可用两个坐标邻域覆盖：一是

$$(U_0,\ \varphi_0):U_0=\{[z_0,\ z_1] \in \mathbf{CP}^1 \mid z_0 \neq 0\},$$

$$\varphi_0 : U_0 \longrightarrow \mathbf{C}, \qquad [z_0,\ z_1] \longmapsto z_1/z_0,$$

$$(U_1,\ \varphi_1):U_1=\{[z_0,\ z_1] \in \mathbf{CP}^1 \mid z_1 \neq 0\},$$

$$\varphi_1 : U_1 \longrightarrow \mathbf{C}, \qquad [z_0, z_1] \longmapsto z_0/z_1$$

在 $U_0 \cap U_1 \simeq \mathbf{C} - 0 = \mathbf{C}^*$ 上我们有迁移函数

$$\begin{array}{ccccc} \varphi_0^{-1}(U_0 \cap U_1) & \longrightarrow & U_0 \cap U_1 & \longleftarrow & \varphi_1^{-1}(U_0 \cap U_1) \\ \| & & & & \| \\ \mathbf{C}^* & & \xrightarrow{\varphi_1^{-1} \cdot \varphi_0} & & \mathbf{C}^*, \\ z & \longmapsto & [1, z] & \longleftarrow & \frac{1}{z}. \end{array}$$

取 P 为点 $P = [1, 0]$. 在 U_0 上作亚纯函数

$$a_0[z_0, z_1] = z_1/z_0,$$

它在 P 点确有单极点，除子 $D = P^1 = P$ 正要求这样. 在 U_1 上则取 $a_1 = 1$. 从 $[P]$ 的迁移函数正是

$$g_{01} = a_0/a_1, \quad 在 U_0 \cap U_1 上,$$

用坐标来表示则为 $g_{01}(z) = a_0[1, z] = z$.

另一方面，记住（第三章，§1），$\mathbf{CP}^1$ 有典则线丛 $\gamma(\mathbf{CP}^1) = \gamma$，它可表示为

$$E = \{(L, u) \mid L \in \mathbf{CP}^1, u \in \mathbf{C}^2, u \in L\}.$$

它有局部平凡化坐标

$$\begin{array}{ccc} U_0 \times \mathbf{C} & \xrightarrow{g_0} & E \\ ([z] = [z_0, z_1], \lambda) & \longmapsto & ([z], \lambda z/z_0) \\ U_1 \times \mathbf{C} & \xrightarrow{g_1} & E \\ ([z] = [z_0, z_1], \mu) & \longmapsto & ([z], \mu z/z_1). \end{array}$$

其迁移函数则由下式给出：

$$(\tilde{g}_{01}(z))\lambda = g_1^{-1} g_0([1, z], \lambda) = g_1^{-1}([1, z], \lambda/1) = \lambda/z,$$

即 $\tilde{g}_{01} : U_0 \cap U_1 \longrightarrow \mathbf{C}^*, \quad z \longmapsto \frac{1}{z}$.

将 g_{01} 与 $\tilde{g}_{01}$ 比较一下即见 $[P]$ 是 γ 的共轭丛. 或者为了把事情理顺，我们说，与一单极点相连的点除子 P^{-1} 或 $-P$ 给出 $[-P] = \gamma$. 因为对 γ 已约定 $c_1(\gamma) = 1$，我们有 $c_1[-P] = 1$. 这就是把 $\mathcal{O}_D$ 定义为

$$\mathcal{O}_D = \{f \mid (f) \geqslant -D\}$$

的理由．如果我们把 CP^1 看作含于 $CP^\infty = BS^1$，在作丛 $[-P]$ 的分类映射时正是这样作的．因此 $c_1[-P]=1$ 对任意 Riemann 曲面 M 上的任意点除子确有 $c_1[-P]=1$．

记住在 $\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*$ 上是用乘法记号的．故若 $D=(\alpha_i)$，$D'=(\beta_i)$ 是两个除子其和 $D+D'$ 应该用积 $(\alpha_i\beta_i)$ 表示．所以丛 $[D+D']$ 的迁移函数是 $g_{ij}g'_{ij}$，而读者应记得（第三章和第十三章）它定义张量积 $[D]\otimes[D']$（这是 $H^1(M,\mathscr{O}^*)$ 中的群运算）．由第十三章的结果我们有

$$c_1[D+D'] = c_1([D]\otimes[D']) = c_1[D]+c_1[D'].$$

特别是有

$$c_1[D] = -\deg D.$$

所以 RR 定理可以重写为

$$\dim H^0(M,\mathscr{O}_D) - \dim H^1(M,\mathscr{O}_D) = 1-g+c_1[-D].$$

（我们当然可将 $c_1[-D]$ 写成 $-c_1[D]$．但我们宁用 $c_1[-D]$ 因为我们确实想的是除子 $-D$ 及其丛 $[-D]$）．这里有更多的线索了．右方各项都是流形 M 及其上线丛的拓扑不变量．它现在看起来更象指标定理了．

现在试着也用丛 $[D]$ 解释等式左方各项．设 $D=(\alpha_i)$ 由 $\alpha_i\in\mathscr{M}^*(U_i)$，$M=\bigcup U_i$ 表示．当然可设丛 $[D]$ 在 U_i 上是平凡的（其实这是定义），所以在 U_i 上有丛的局部坐标．为了不把它与流形 M 的局部坐标混淆，我们用局部截口 s_i 来表示线丛的局部坐标，即对各点 $P\in U_i$，$s_i(P)\in[D]_P$ 是其中非 0 矢量．因 $[D]$ 是线丛，局部截口就定义局部坐标．在 $U_i\cap U_j$ 上 s_i 与 s_j 正是用迁移函数 g_{ij} 联系起来的，即

$$s_i = g_{ij}s_j \quad 或 \quad s_i(P) = g_{ij}(P)s_j(P).$$

现在看 $H^0(M,\mathscr{O}_D)$．它的一个元 f 即 M 上一个亚纯函数而 $(f)\geqslant -D$．若 $D=(\alpha_i)$ 由一族 $\alpha_i\in\mathscr{M}^*(U_i)$ 表示，$-D=(1/\alpha_i)$ 则由 $1/\alpha_i$ 表示．$(f)\geqslant -D$ 只不过表明 f 极点的阶数都不大于 U_i 上 $1/\alpha_i$ 相应极点的阶数，亦即 $f\alpha_i$ 在 U_i 上全纯．但 $(f\alpha_i)$ 并不

能定义 M 上的整体全纯函数，因为 fa_i，fa_j 在 $U_i\cap U_j$ 上不一定相符．但它们之间有关系式

$$g_{ij}fa_j=(a_i/a_j)fa_j=fa_i.$$

这样连接起来的对象定义一整体截口．只是要小心一点，因为它定义 $[-D]$ 的截口，其迁移函数是 $g_{ij}=a_j/a_i$．所以由 $[-D]$ 的局部截口 s_i 可定义 U_i 上的新的截口

$$\tilde{f}_i=fa_is_i.$$

这时在 $U_i\cap U_j$ 上才有

$$\tilde{f}_i=fa_is_i=fa_ig_{ij}s_j=fa_i(a_j/a_i)s_j=fa_js_j=\tilde{f}_j.$$

所以 $(\tilde{f}_i)=\tilde{f}$ 定义从 $[-D]$ 的整体截口．反过来也对．

$D=0$ 时丛 $[-D]$ 是平凡的．平凡丛的截口就是函数，这正表明 $H^0(M,\mathscr{O}_D)=H^0(M,\mathscr{O})$．故丛的全纯截口才是全纯函数适当推广．又 $D=0$ 时 $H^1(M,\mathscr{O})$ 可解释为 M 上的全纯 1-形式．所以我们需要的是在丛中取值的形式的概念．这并不难做．进一步在一般标架下做这件事也不难．故设 M 是任意流形，$E\longrightarrow M$ 是 M 上的矢量丛．为简单计先看实情况，故设 M 是实光滑的，$E\longrightarrow M$ 也是实光滑的．最简单的情况是实值函数 $f: M\longrightarrow \mathbf{R}$．可以讨论其和、积而最重要的是其导数．它们大都可以直接推广到用矢量空间 V 代替 $\mathbf{R}$，因为这只不过是用一组实值函数 $(f_1,\cdots,f_n)$ 去代替一个 f，其运算与前完全一样．唯一没有了的是环构造：矢量不能相乘．E 中的截口则是进一步的推广．对每一点 $P\in M$，$f(P)$ 在矢量空间 E_P 中，E_P 则与 P 相关．高阶形式只是重复以上程序．所以通常的 k-形式 ω 就是对每一点 $P\in M$ 指定一个斜对称线性泛函

$$\omega(P): T_P(M)\times\cdots\times T_P(M)\longrightarrow \mathbf{R}.$$

用 E_P 代替 $\mathbf{R}$ 就得 M 上在丛 E 中取值的 k-形式，即对每一点 P 指定一个斜对称线性映射

$$\omega(P): T_P(M)\times\cdots\times T_P(M)\longrightarrow E_P.$$

换一个说法：通常的 k-形式 ω 即对 M 上矢量场的 k-元组 $X_1,\cdots,$

X_k 指定一个函数

$$\begin{aligned}\omega: P &\longmapsto \langle \omega; X_1, \cdots, X_k\rangle(P)\\ &= \langle \omega(P); X_1(P), \cdots, X_k(P)\rangle \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

现在则把函数换成 E 的一个截口：

$$\begin{aligned}P &\longmapsto \langle \omega; X_1, \cdots, X_k\rangle(P)\\ &= \langle \omega(P); X_1(P), \cdots, X_k(P)\rangle \in E_P.\end{aligned}$$

因为丛是局部平凡的，E-值形式局部地就是一个矢量值形式，亦即一组通常形式．更确切地说，令 U 为一开集而 E 在 U 上平凡，令 $(s_1, \cdots, s_n)$ $(n=\dim E)$ 是在局部坐标中描述 E 的纤维的局部标架，即 s_i 是 U 上的局部截口且对任一点 $P\in U$，$(s_1(P), \cdots, s_n(P))$ 都是 E_P 的基底．于是 $\langle \omega(P); X_1(P), \cdots, X_k(P)\rangle$ 可用一组系数 λ_i 写成 $\sum\limits_i \lambda_i s_i$．$\lambda_i$ 显然依赖于 $X_1(P), \cdots, X_k(P)$ 而事实上是其斜对称线性泛函，亦即

$$P \longmapsto \lambda_i(P) = \lambda_i\langle P; X_1(P), \cdots, X_k(P)\rangle$$

是通常的 k-形式．我们就简单地记作

$$\omega = \sum \lambda_i s_i.$$

它就是 ω 的局部表示．当然，截口 s_i 变化时形式 λ_i 也会变，但变化方式是确定的且可用迁移函数来表示．

按照局部表示，我们可以说 ω 是连续的、光滑的、全纯的乃至亚纯的，即由系数形式 λ_i 决定适当的范畴．至于代数运算，当然可以作矢量空间运算．但前面已提到，E-值形式没有外积 $\wedge$．但要注意，E-值形式 ω 与通常的形式 μ 之间确有外积 $\wedge$．在局部坐标系中，它可定义为

$$\mu\wedge\omega = \sum_i (\mu\wedge\lambda_i)s_i.$$

也可由内蕴的定义得到此式．内蕴定义是

$$\begin{aligned}&\langle \mu\wedge\omega, X_1, \cdots, X_l, X_{l+1}, \cdots, X_{l+k}\rangle\\ &= \sum_\sigma \frac{1}{k!\,l!}\varepsilon(\sigma)\langle \mu, X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(l)}\rangle\langle \omega, X_{\sigma(l+1)}, \cdots, X_{\sigma(l+k)}\rangle.\end{aligned}$$

因为右方有乘法出现，所以若 μ, ω 均为矢量值则无意义．但若 μ 为标量值，ω 为矢量值，乘法则为模运算．我们形式地说，M 上的 E-值形式之集 $A^*(E,M)$ 是定义在 M 上的通常形式 $A^*(M)$之环上的代数．事实上，局部表示

$$\omega=\sum\lambda_i s_i$$

就是 $\lambda_i\in A^k(M)$ 与 $s_i\in A^0(M,E)$ 的模乘法．

记住我们的目标是找层上同调 $H^*(M,\mathcal{O}_p)$ 的 Dolbeault 复形．所以下一步应该是找外微分 d．这导致了一些有趣的情况．定义 d 最简单的办法是用局部坐标，即对 $\omega=\sum_i\lambda_i s_i$ 定义 $d\omega=\sum_i(d\lambda_i)s_i$．因 λ_i 是通常的形式，这样作是有意义的．但是当然有坐标变换问题（是指变换从 $E\longrightarrow M$ 的坐标而不是流形 M 的坐标．若 $(t_1,\cdots,t_j)$ 是 V 上的一个标架，则在 $U\cap V$ 上有

$$s_i=\sum_j g_{ij}t_j,$$

g_{ij}是迁移函数．故 $\omega=\sum_j\mu_j t_j$, $\mu_j=\sum g_{ij}\lambda_i$，而应有

$$d\omega=\sum_j(d\mu_j)t_j=\sum_{i,j}d\lambda_i g_{ij}t_j \text{ 或 } d\mu_j=\sum d\lambda_i g_{ij}.$$

但我们实际运算却得出

$$d\mu_j=d(\sum_i g_{ij}\lambda_i)=\sum_i(d\lambda_i)g_{ij}+\sum_i(dg_{ij})\wedge\lambda_i, \qquad (*)$$

这里多了一项 $(dg_{ij})\wedge\lambda_i$．这本是意料中事．所以我们再由另一个角度来讨论此形式．内蕴地，d 的定义是

$$\langle d\omega,X_0,\cdots,X_k\rangle=\sum_{i=0}(-1)^i X_i\langle\omega,X_0\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_k\rangle$$
$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\langle\omega,[X_i,X_j],X_0,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_k\rangle,$$

要想把这个公式搬过来，麻烦在第一项．若 $\langle\omega,X_0,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_k\rangle$ 是一截口而不是函数，我们就不知道其方向导数 $X_i\langle\cdots\rangle$ 是什么意思．这个问题前而就遇到过．若 $E=T(M)$是切丛，则其截口

就是一矢量场 Y，而方向导数 $D_X(Y)$ 就是联络. 因为没有典则的方法来处理它，我们就象以前一样来定义矢量丛上的联络 D. 对 M 上的矢量场 X 和 E 的截口 s，我们可以作一个新的截口 $D_X(s)$ 使之满足一些自然的要求. 即它必须对 X 为线性的（以 $A^0(M)$为系数），对 s 是可加的，而且满足 Leibnitz 法则

$$D_X(fs) = X(f)s + fD_X(s), \quad f \in A^0(M).$$

所以我们仍可用前得的公式作为 E-值形式的 $d\omega$ 之定义，只将 $X_i\langle\omega,\cdots\rangle$ 换成 $D_{X_i}\langle\omega,\cdots\rangle$ 即可. 这看起来是合理的. 但问题还没有完，要想得到复形我们就需要 $d^2=0$. 取 ω 为 0-形式，则

$$\begin{aligned}\langle dd\omega, X, Y\rangle &= D_X\langle d\omega, Y\rangle - D_Y\langle d\omega, X\rangle - \langle d\omega, [X,Y]\rangle \\ &= D_XD_Y(\omega) - D_YD_X(\omega) - D_{[X,Y]}(\omega).\end{aligned}$$

所以，想要 $d^2=0$ 就需要

$$D_XD_Y - D_YD_X - D_{[X,Y]} = 0.$$

但熟知 Riemann 几何的读者会知道，这个条件太强了. 等式左方即联络 D 的曲率算子，不能期望它为 0. 事实上，Riemann 几何有意思的地方主要地就是它不为 0 的情况. 所以我们必须承认，对于模 $A^*(M,E)$ 一般地没有 de Rham 复形. 正是在这里，我们要引入非常特殊而又非常有利的情况即 M 为复流形，E 为全纯线丛. 这时，困难可以避免. 回到坐标变换公式（*）：

$$d\mu_j = \sum_i (d\lambda_i)g_{ij} + \sum_i d(g_{ij}) \wedge \lambda_i.$$

g_{ij}对于全纯线丛是全纯函数. 故若不用 d 而用 Dolbeault 算子 $\bar\partial$，则有 $\bar\partial$ (g_{ij}) $=0$，所以

$$\bar\partial\mu_j = \sum_i (\bar\partial \lambda_i)s_i$$

是合理定义的. 这时当然有 $\bar\partial^2=0$. 还有，因为定义是局部的，我们显然仍有 Dolbeault-Grothendieck 引理. 现在剩下来就只需要形式地把这一切都写下来. 形式 $\omega = \sum_i \lambda_i s_i$ 中若 λ_i 是 (p, q) -型的就也称为 (p, q) -型的. 这个定理是合理的，因为 $\mu_j = \sum_i g_{ij}\lambda_i$ 而

g_{ij}是函数. 对应关系

$$U \longrightarrow A^{p,q}(U,E) = U \text{ 上的 } E\text{- 值}(p,q) \text{ 型形式空间}$$

显然是层.

$$A^{p,0}(U,E) \xrightarrow{\bar\partial} A^{p,1}(U,E), \quad \sum_i \lambda_i s_i \longmapsto \sum_i (\bar\partial\lambda_i) s_i$$

有 $\ker\bar\partial = \Omega^p(U,E)$ =全纯 E-值 $(p, 0)$ 型形式空间. 于是 Ω^p 可以用强层 $A^{p,q}(E)$ 分解为层的正合序列:

$$0 \longrightarrow \Omega^p(E) \longrightarrow A^{p,0}(E) \xrightarrow{\bar\partial} A^{p,1}(E) \xrightarrow{\bar\partial} \cdots$$

而我们有

推广的 Dolbeault 定理 对复流形 M 上的全纯线丛 $E \longrightarrow M$, 系数在 E 的全纯截口中的层的上同调 $H^q(M, \Omega^p(E))$ 可以用 Dolbeault 复形, 记作 $H_{\bar\partial}^{p,q}(M,E)$, 计算:

$$0 \to A^{p,0}(M,E) \to \cdots \to A^{p,q}(M,E) \xrightarrow{\bar\partial} A^{p,q+1}(M,E) \to \cdots.$$

这个定理的一个直接的报偿是: 当 $p+q>\dim M$ 时 $H^q(M, \Omega^p(E))=0$ (注意 $\dim E$ 在此不起作用). 下一步是建立调和理论以当 M 为紧时得到维数有限定理. 这只需要将以前的结果作形式推广. 对于通常的形式我们有 $*$ 算子. 而对 E-值形式, $*$ 算子可以推广如下:

$$*\omega = \sum_i (*\lambda_i) s_i.$$

这是合理定义的, 因为在 E 中作坐标变换时只是将 λ_i 用矩阵去乘, 而 $*$ 则是线性的. 因此可和以前一样地定义 $\bar\partial$ 的形式伴为

$$\vartheta = -*\bar\partial*.$$

为证 ϑ 确为 $\bar\partial$ 之形式伴,需要 E-值形式的内积. 这只要引入丛 E 上的 Riemann 度量$[\cdot,\cdot]$(不同于定义通常的 $*$ 所用的切丛 $T(M)$ 上的 Riemann 度量 $(\cdot, \cdot)$). 于是对阶数相同的 E-值形式 $\omega = \sum_i \omega_i s_i$, $\mu = \sum_i \mu_i s_i$ 可以得到 M 上的一个通常的 n-形式 $(n=$

$\dim M$)

$$\omega \widetilde{\wedge} *\mu = \sum_{i,j} \omega_i \wedge *\mu_j[s_i, s_j].$$

使用记号$\widetilde{\wedge}$是表示它并非 E-值形式的外积，而只是把它们配对成为通常的形式．容易看到此定义是合理的．然后即可定义

$$[\omega,\ \mu] = \int_M \omega \widetilde{\wedge} *\mu.$$

然后即可相当直接地在这个一般标架下推广 Hodge 理论．(p, q)-型的 E-值调和形式集记作 $\mathscr{H}^{p,q}(M, E)$，它是$\bar\partial+\bar\delta$在 $A^{p,q}(M, E)$ 上的核．$\mathscr{H}^{p,q}(M, E)$ 为有限维且可看成即 $H_{\bar\partial}^{p,q}(M, E)$．而后者又与层的上同调 $H^q(M, \Omega^p(E))$ 是一回事．在复形

$$\bar\partial + \bar\delta: A^{0,偶}(M,E) \longrightarrow A^{0,奇}(M,E)$$

上，$\bar\partial+\bar\delta$的指标显然是

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}(\bar\partial + \bar\delta) &= \sum_q (-1)^q \dim H^q(M, \Omega^0(E)) \\ &= \chi(H^*(M, \Omega(E))).\end{aligned}$$

RR 定理可以放在这个标架里，因为当 M 是 Riemann 曲面（$\dim M = 1$）而 $E = [-D]$ 即与除子 D 相关的丛时，有

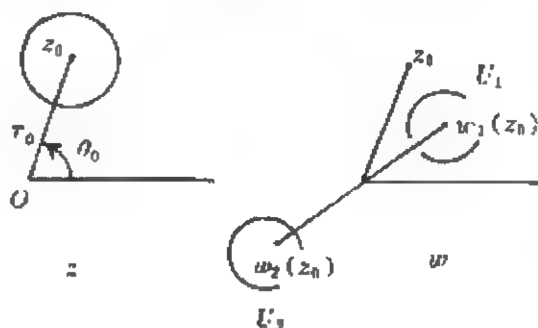
$$\dim H^0(M, \mathscr{O}_D) - \dim H^1(M, \mathscr{O}_D) = \chi(H^*(M, \Omega(E))).$$

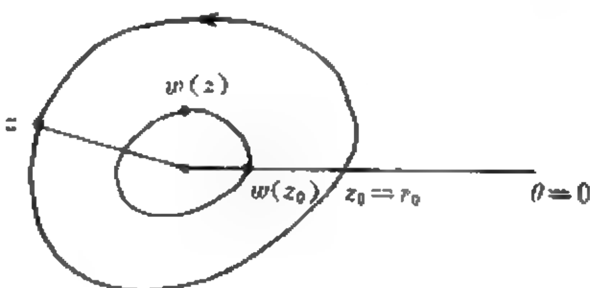
于是 RR 定理只是说它是流形 M，$1-g$ 和丛 $E(\deg D = -c_1[E])$ 的拓扑不变量．推广的 RR 定理指出，$\chi(H^*(M, \Omega(E)))$ 一般也是拓扑不变量．此外，正如 Hirzebruch 指标定理一样，可以用显示的公式将 $\chi(H^*(M, \Omega(E)))$ 用 M 和 E 的示性类表出，并称为 Todd 亏数．虽然把它们写出来并不难，但是不说明其来源也就没有多大的意思．

§6. 其它的评述

我们在本章中主要目的是把经典的 RR 定理重新解释为复 Laplace 算子的指标定理并加以推广．因此我们的方法和语言都比

较抽象和“现代化”而很少提到函数论的比较经典的方面．我们当然也有理由，因为并没有真打算对 Riemann 面理论作广泛的综述，因为它也太丰富了而为这本小书所不及，但若完全不讲这些是由何而来，则是一大疏漏．具体说来，Riemann 曲面按照 Riemann 本意是用以研究所谓多值函数的工具，所以需要就此讲几句话．“多值函数”这名词本身就是矛盾的，因为函数按定义就不会是多值的．这个不幸的名词来自例如说方程 $w^2=z$ 的研究．问题是求一函数 $w(z)$ 使 $w(z)^2-z=0$ 对 C 之某一预定区域 D 中一切点子成立．当然也可以在实域中讨论这个问题．正是因为在实情况下问题非常简单，所以早就处理完了．方程 $w^2-x=0$ 只有当 $x\geqslant 0$ 时有解．这时只有一个解 $w\geqslant 0$．记此解为 $\sqrt{x}$．于是 $w^2-x=0$ 定义了两个函数：$x\longmapsto\sqrt{x}$ 和 $x\longmapsto-\sqrt{x}$．二者均在域 $D=\{x|x>0\}$ 中解析．在复情况下代数方程 $w^2-z=0$ 仍有二解（对已给的 z）．但是现在没有典则的方法将它们标志为正或负．所以，为了构成一连续函数 $w=w(z)$ 就需作特殊的选择．并不是问题变难了，而是需要多费口舌．给定 z_0，记 $w^2-z_0=0$ 之二解为 $w_1(z_0)$ 和 $w_2(z_0)$．若 $z_0\neq 0$，$w_1(z_0)\neq w_2(z_0)$，所以可分别作它们的互不相交的邻域 U_1，U_2．当 z 充分接近 z_0 时，我们说需要 $w_1(z)$ 适合 $w_1(z)^2-z=0$ 且 $w_1(z)\in U_1$．这可无疑义地决定 $w_1(z)$．用坐标表示，可记 $z_0=r_0e^{i\theta_0}$，并理解为 $0\leqslant\theta_0<2\pi$．于是当 z 接近 z_0 时，我们有 $z=re^{i\theta}$ 且 $|r-r_0|$，$|\theta-\theta_0|$ 都很小（但 $\theta_0\neq 0$）．于是这两个函数是





$$w_1(z) = \sqrt{r}\,e^{i\theta/2},$$

$$w_2(z) = \sqrt{r}\,e^{i(\theta/2+\pi)} = -w_1(z).$$

它们不仅是连续的而且是 z 在 z_0 附近的全纯函数，这一点可以用 Cauchy-Riemann 方程来验证（因 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\theta=\operatorname{tg}^{-1}(y/x)$）.

除了没有用正负这一次序概念外，以上所作与实的情况实无区别．但在 $z_0=0$ 附近有了区别．无法在 0 的邻域中适当选定全纯的 $w(z)$．这可由简单的连续性考虑看出，找不到在挖去 0 的 0 之邻域中甚至连续的 $w(z)$ 也不存在．因为若我们从 $z_0=r_0$（即 $\theta_0=0$）开始并设 $w(z_0)=\sqrt{r_0}$，并按公式 $w(z)=\sqrt{r}\,e^{i\theta/2}$ 令 z 绕 0 一周，这里 $z=re^{i\theta}$，$r>0$．我们现规定使用此式，则当 z 绕 0 一周后 $w(z)$ 从 $\sqrt{r}\,e^{i\theta/2}$ 变成 $\sqrt{r}\,e^{i(\theta/2+\pi)}=-\sqrt{r}\,e^{i\theta/2}$ 即不能变回 $w(z)$．例如当 $\theta\longrightarrow 2\pi$ 时，$w(z)$ 不能回到 $\sqrt{r_0}$ 而是成 $-\sqrt{r_0}$，这与连续性矛盾．这当然就是解析拓展：当 z 沿曲线回到原来的起点时，$w(z)$ 变成另一枝．对全纯函数而言，它可以用幂级数来表示．选定 $w(z)$ 就是在 z_0 的某邻域中得一幂级数

$$w(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots.$$

由方程 $w(z)^2 = z$ 可得

$$a_0^2=z_0,\quad 2a_0a_1=1,\quad 2a_2a_0+a_1^2=0$$

等等．所以只要选定 a_0，其余 a_i 也都可以决定，即有

$$w(z) = a_0 + \frac{1}{2a_0}(z-z_0) - \frac{1}{8a_0^3}(z-z_0)^2 + \cdots.$$

在 $w(z)$ 的收敛圆内另取一点 z_1，并绕 z_1 重新展开 $w(z)$：计算可如下进行：

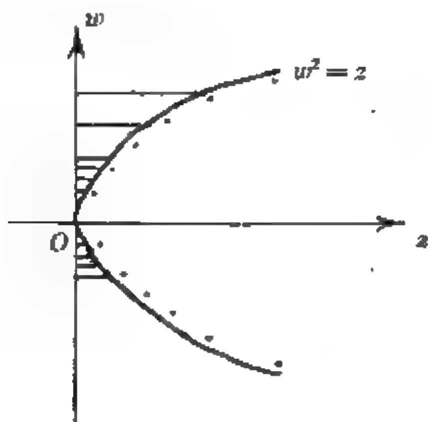
$$w(z) = a_0 + \frac{1}{2a_0}(z-z_1+z_1-z_0) + \cdots$$
$$= b_0 + b_1(z-z_1) + b_2(z-z_1)^2 + \cdots.$$

它称为前一级数的直接解析拓展．这样做下去若沿着以 0 为心的圆拓展回到 z_0，将得到另一枝．

有两个方法解决这里的问题．一是承认既成事实，承认这样所得仍是一个函数，而每一点 z 对应于函数的不同"枝"上各一点，所以这函数是"多值"的．需要注意的只是如何由函数之一枝转向另一枝．例如，单值化定理（monodromy theorem）告诉我们，沿着互相同伦的曲线（在 $\mathbf{C}$ 中要挖去若干"枝点"）作拓展，结果总是相同的．这就是 Weierstrass 关于"完全的解析函数"的观点．但另一种观点最终占了上风．这就是 Riemann 的"Riemann 曲面"的观点．按此观点，函数总应是单值的，只要我们能这样安排使当 $\theta \longrightarrow 2\pi$ 时，$z=re^{i\theta}$ 并不回到起点 z_0，而到一个新点 (z_0)，就不会发生 $w_1(z)$ 变成 $w_2(z)=-w_1(z)$ 的问题了．因为在 $\mathbf{C}$ 上，z_0 和 (z_0) 看起来完全一样，唯一合理的方法就是用两个不同的枝 $w_1(z)$ 和 $w_2(z)$ 把它们分开．即是说，新的"曲面"上的点 (z, w) 应适合

$$R=\{(z,w) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C} \mid w^2=z\}.$$

这就是方程 $w^2=z$ 在 $\mathbf{C}\times\mathbf{C}$ 中的图象．按我们已建立的关于流形的现代概念，要做的事就很简单了：要找出局部坐标系使 R 成一复流形．如果考虑实的情况，R 就是一个抛物线．怎样使它成为流形是简单的事．在一点 $(z_0, w_0) \neq (0, 0)$，或者用 z 或者用 w 为局部坐标．但在 $(0, 0)$ 处，只有用 w 才适合．事实上，在我们的情况下，$(z, w) \longmapsto w$ 是 R 的一整体坐标系（即 $\Phi: R \longrightarrow \mathbf{C}$，$(z, w) \longmapsto w$ 是一同胚，而且使 R 成为一个与 $\mathbf{C}$ 同构的复流形）．这个形象对一般情况是过于简单了，所以为了说明问题，即对我们的情况也引入更多的局部坐标系．在



$(z_0, w_0) \neq (0, 0)$，令 U_0 是 z_0 的一个邻域，其上定义 $w^2=z$ 的一枝，称为 w_1，使 $w_1(z_0)=w_0$．令 $V_0=w_1(U_0)$，因 w_1 是全纯的，V_0 必为开．于是

$$\alpha: P_0 = (U_0 \times V_0) \cap R \longrightarrow U_0, \quad (z,w) \longmapsto z$$

是 (z_0, w_0) 附近的一局部坐标. 若 $(z_0, w_0) = (0, 0)$，令 V_0 是 0 的一个邻域而 $U_0 = \{w^2 | w \in V_0\}$. 因 $w \longmapsto w^2$ 是全纯的，故 U_0 为开，而

$$\beta: Q_0 = (U_0 \times V_0) \cap R \longrightarrow V_0, \quad (z,w) \longmapsto w$$

是一局部坐标. 在 $P_0 \cap Q_0$ 中，$\alpha\beta^{-1}$是 $w \longmapsto w^2$，它当然是全纯的，$\beta\alpha^{-1}$是 $z \longmapsto w_1(z)$ 是 $w^2 = z$ 的一个全纯枝. 所以迁移函数是全纯的而使 R 为一复流形. 在 R 上现在有一"单值"全纯函数（它是合理定义的）

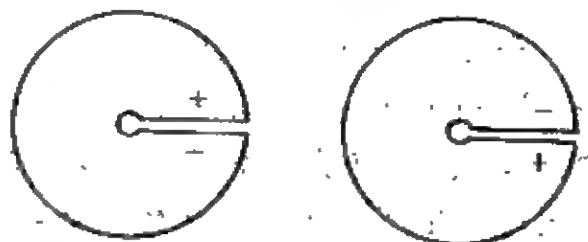
$$\varphi(z,w) \longmapsto w,$$

在 $(0, 0)$ 附近 $\varphi\beta^{-1}: w \longmapsto w$ 是恒等函数.

在 R 上还定义了另一函数，即投影 $\pi(z,w) = z$. 它也是全纯的. 在 $(0, 0)$ 附近它有一个表示：

$$\pi\beta^{-1}: w \longmapsto z = w^2,$$

所以 $(0, 0)$ 是 0 上的枝点.



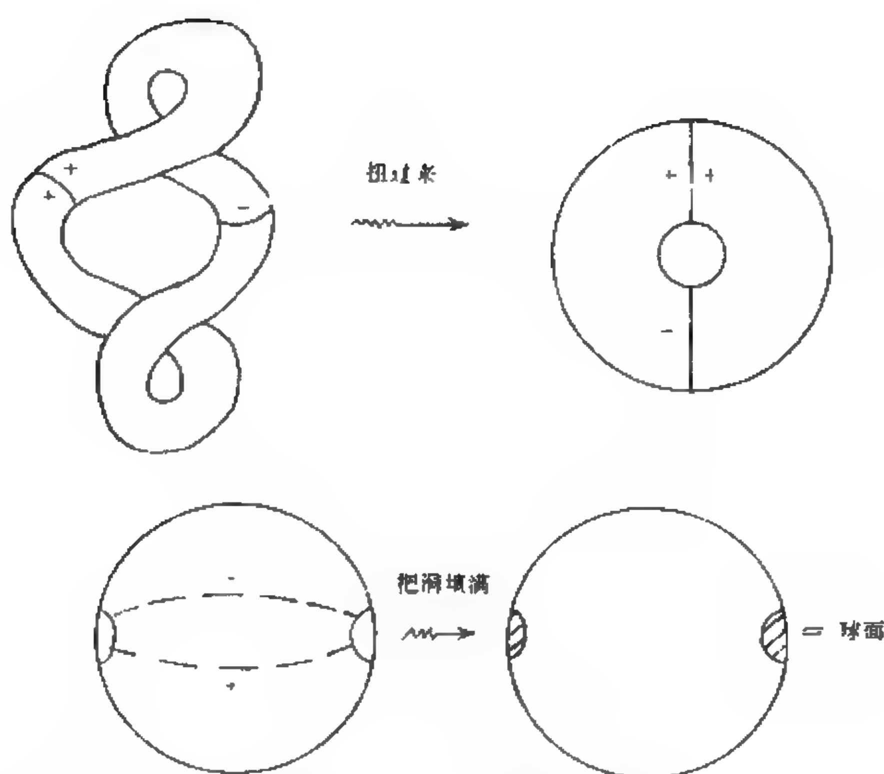
"+" 与 "+" 相粘，"−" 与 "−" 相粘

在 R 上再添一点 (∞, ∞) 就可以使图形更完美. 于是 $R \cup (\infty, \infty)$ 成一紧 Riemann 流形. 在 R 上方程 $w^2 = z$ 被两个亚纯函数 π 与 φ 所取代，我们称 R 为代数函数. 通常将复平面切上割缝再相粘的作法有助于我们形象地理解映射 π. 所以 $w^2 = z$ 的 Riemann 曲面是一球面，它是 Riemann 球面的二重分枝覆盖，而在 0，∞两点有枝点. 类似于此 $w^n = z$ 的 Riemann 曲面是球面的 n 重分枝覆盖，面在 0，∞两点有枝点.

比较一般的程序是从一多项式开始：

$$P(z,w) = w^n + a_{n-1}(z)w^{n-1} + \cdots + a_0(z),$$

系数 $a_i(z)$ 是 $\mathbf{C}$ 上的亚纯函数. 于是这个代数函数的 Riemann 曲面是一紧 Riemann 曲面以及 Riemann 球面上的分枝覆盖.



现在有一自然的问题. 已给一抽象的紧 Riemann 曲面 M，M 是否同构于某一代数函数 $P(z,w)$ 的 Riemann 曲面？要想得到肯定的回答，起点应是求球面的分支覆盖，即定义在 M 上的亚纯函数. 如果进一步还想找一个代数关系式 $P(z,w)$，这亚纯函数在极点上的性态就要受一些限制. 这正是 Riemann-Roch 定理想要处理的那一类问题. 但我们只能就此打住.

参 考 文 献

[1] Bers, L., *Riemann Surfaces*, Courant Institute of Mathematical Sciences.

[2] Forster, O., *Lectures on Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[3] Hirzebruch, F., *Topological Methods in Algebraic Geometry*, 3rd. ed., Springer-Verlag, Berlin, 1966.

第十九章 Atiyah-Singer 指标定理

§1. 矢量丛上的一般微分算子

我们计划在本章中陈述一个一般的指标定理，它推广了迄今讨论过的所有特例. 粗略地说，一般定理指出紧流形上任意椭圆微分算子的指标是拓扑不变量，并有一显式公式用示性类来描述它. 平心而论，我们还不能说，对此定理已有充分的启示，因为我们看到的很少几个情况都只是一个特例即 Laplace-Beltrami 算子的变形. 但不幸的是，充分地讨论这个一般定理不太可能. 而只能指出，除了 Laplace 算子外还有许多例子足以使我们想到确有一个一般定理. 于此我们只能满足于说明这定理是怎样陈述的. 所以我们要求读者对许多东西不加启发地承认. 如果说这与我们通常的作法不同，我们也有一个借口，因为我们已接近本讲义之末，所以本章是一个概述而不是详尽的讨论.

要建立这个一般定理，先列出我们手上有些什么材料作为起始. 我们要大范围地讨论一个微分方程，所以需要一个流形 M. 原先 M 不必为紧，但是为了有指标概念，最终还得规定它是，所以我们也可假设 M 是紧的实光滑流形.

微分算子可作用在函数或形式上，而在 Riemann-Roch 定理情况下，作用在丛值形式上. 但这种种不同的形式都是 M 上某矢量丛的截口. 因此一般地我们需要 M 上的一个矢量丛 $E \longrightarrow M$. 事实上需要两个，一为算子之定义域，另一为其值域，并分别记之为 E 与 F. 因为我们要讨论微分方程，故设它们是 M 上的光滑丛. 对于一般的讨论，它们为实为复均可. 但是我们会看到，当它们

为复丛时会得到最好的定理．故设它们为复．记 $C^\infty(E)$ 为 E 之光滑截口之空间．例如，当 $E=\Lambda^k T^*(M)\otimes C$ 即余切丛 $T^*(M)$ 上之 k 阶外乘积的复化丛时，$C^\infty(E)$ 就是我们讨论 Laplace 算子 Δ 时用的光滑复值 k-形式之空间．一般说来，一微分算子 D 是截口空间之间的一个映射：$D: C^\infty(E)\longrightarrow C^\infty(F)$．

我们当然要作一些限制．首先，需设 D 为线性的，即是说这理论只能用于线性方程．这还太广泛，有许多不是微分算子的线性映射．微分算子必须包含导数．但导数是局部的东西，所以我们要用局部坐标．我们确可取 M 的一个局部坐标 (U, x) 使丛 E 与 F 在 U 上均为平凡的．事实上，在 U 上切丛 $T(M)$ 与余切丛 $T^*(M)$ 也都是平凡的．这种平凡性可以用 U 上的不同截口来刻画．例如对 $T(M)|U$ 用 $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$，对 $T^*(M)|U$ 用 $(dx_1, \cdots, dx_n)$ $(n=\dim M)$．对 E 和 F 则无通用的记号，所以我们就说 $(s_1, \cdots, s_p)$ 是 $E|U$ 的局部截口 $(p=\dim E)$，$(t_1, \cdots, t_q)$ 是 $F|U$ 的局部截口 $(q=\dim F)$．所以 $C^\infty(E)\simeq C^\infty(U\times \mathbf{C}^p)=C^\infty(\mathbf{R}^n\times \mathbf{C}^p)$ 可以与 $\mathbf{R}^n$ 上的光滑 $\mathbf{C}^p$ 值函数之空间 $C^\infty(\mathbf{R}^n,\mathbf{C}^p)$ 等同．这种等同性可以表述如下：截口 $x\longmapsto \sum_{i=1}^{p} f_i(x)s_i(x)$，$x\in \mathbf{R}^n$ 转化为函数 $x\longmapsto f(x)=(f_1(x),\cdots,f_p(x))$．所以，局部地我们需要一个由导数构成的算子

$$D: C^\infty(\mathbf{R}^n,\mathbf{C}^p)\longrightarrow C^\infty(\mathbf{R}^n,\mathbf{C}^q).$$

提醒一下，若 α 为重指标：$\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，令 $|\alpha|=\sum_i \alpha_i$，$D_\alpha=\partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}$．故若 $f\in C^\infty(\mathbf{R}^n,\mathbf{C}^p)$，$D_\alpha f\in C^\infty(\mathbf{R}^n,\mathbf{C}^p)$．要把它变到 $C^\infty(\mathbf{R}^n,\mathbf{C}^q)$，还需一个线性变换 $A_\alpha\in \mathrm{Hom}(\mathbf{C}^p,\mathbf{C}^q)$，准确地说，需一光滑函数

$$\mathbf{R}^n\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbf{C}^p,\mathbf{C}^q),\quad x\longmapsto A_\alpha(x),$$

即 $A_\alpha(x)$ 是 $(q\times p)$ 矩阵，其元是 $x\in\mathbf{R}^n$ 的复值光滑函数．故 $A_\alpha\in C^\infty(\mathbf{R}^n,\mathrm{Hom}(\mathbf{C}^p,\mathbf{C}^q))$．于是 $A_\alpha D_\alpha f\in C^\infty(\mathbf{R}^n,\mathbf{C}^q)$ 是函数

$$x \longmapsto A_\alpha(x)[(D_\alpha f)(x)].$$

这样我们得到一个含有偏导数的线性算子

$$C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^p) \longrightarrow C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^q), \quad f \longmapsto A_\alpha D_\alpha f.$$

我们可取 $A_\alpha D_\alpha$ 这样算子的有限和，即

$$D = \sum_\alpha A_\alpha D_\alpha, \tag{$*$}$$

它更为一般但仍为线性．显然

$$Df = g$$

恰是一组具有变系数 A_α 的线性偏微分方程，这就是我们之所需．所以我们定义微分算子

$$D: C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(F)$$

即局部可表为（$*$）的线性映射．

和通常一样，有不变性问题．D 必须是内蕴地定义而有如（$*$）的局部表示．坐标改变时，局部变换（$*$）也会变，但 D 不应变．举例来说，若想用（$*$）来定义 D，就必需证明它是适当定义的．大家记得，当我们定义 Laplace 算子时，在这个问题上花了多少功夫．

有两种坐标变换．在从 E 与 F 上我们都可改变坐标．这就是改变局部截口 (s_i) 或 (t_j)．

我们把 A_α 看作矩阵函数，显然，坐标变换会把系数函数 A_α 改变为 $\tilde{A}_\alpha = P_\alpha A_\alpha Q_\alpha$，$P_\alpha$ 和 Q_α 是 $\mathbf{R}^n$ 上的 $q \times q$ 和 $p \times p$ 非异矩阵函数．这显然不会改变（$*$）的一般形式．

我们也可在 M 上把坐标由 (U, x) 变为 (V, y)．若 $\tilde{D}_\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial y_1^{\alpha_1} \cdots \partial y_n^{\alpha_n}$，则显然有

$$\tilde{D}_\alpha f = \sum_{|\alpha'|=|\alpha|} D_{\alpha'} f + \sum_\beta A_\beta D_\beta f,$$

$\sum_\beta$ 中的算子 D_β 阶数较低：$|\beta| < |\alpha|$．这清楚地表明"局部地形如（$*$）"这句话是内蕴的．其实它的含义还多一些，若在（$*$）中取一最大整数 $k \geqslant 0$ 使得有 $|\alpha| = k$ 的某 α 而 $A_\alpha \neq 0$（即 $x \longmapsto$

$A_a(x)$不是零函数). 这个整数在坐标变换下不变. 它就定义为 D 之阶. 例如 Laplace 算子 Δ 在直角坐标 (x, y) 下表为

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

它在极坐标 (r, θ) 下表为

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

但在每个情况下所含的导数之最高阶为 2. 所以 Laplace 算子是二阶微分算子.

下一个重要概念是椭圆性概念, 或更为一般地, 在一般标架下微分算子的型的概念. 为此需要回到 $\mathbb{R}^2$ 上的二变量二阶算子

$$D = Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy}.$$

A, B, C 是 (x, y) 的函数. 型的问题是关于由矩阵

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

所定义的对称形式的问题. 若 S 之指数为 0, 1 或奇异的, 即有椭圆、双曲与抛物方程 (见第十七章). 对于流形理论中的东西, 需要考虑坐标变换. 回忆一下, 若 $(x, y) \leftrightarrow (\xi, \eta)$ 是这样一个变换, 则 D 在 (ξ, η) 坐标系中的表示为

$$D = \overline{A}u_{\xi\xi} + 2\overline{B}u_{\xi\eta} + \overline{C}u_{\eta\eta} + \text{低阶项}$$

而

$$\begin{cases} \overline{A} = A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2, \\ \overline{B} = A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + C\xi_y\eta_y, \\ \overline{C} = A\eta_x^2 + 2B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2. \end{cases} \qquad (*)$$

故有一新矩阵

$$\begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{B} \\ \overline{B} & \overline{C} \end{pmatrix},$$

它以某种方式与原矩阵相关. 只要问对称双线性形式 S 定义在哪里, 就能很方便地描述这个"某种方式". S 当然定义在 $\mathbb{R}^2$ 上, 但 $\mathbb{R}^2$ 可以多种方式来解释. 设把 $\mathbb{R}^2$ 看作对于某一点 $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$

的余切空间 $T_P^*(M)$．就是说，在 (x, y) 坐标下以 dx, dy 为 $T_P^*(M)$ 的基底，而 S 定义在 $T_P^*(M)$ 上如下：

$$S(dx,dx) = A, \quad S(dx,dy) = B, \quad S(dy,dy) = C.$$

要说 S 是适当定义的就必须证明

$$S(d\xi,d\xi) = \overline{A}, \quad S(d\xi,d\eta) = \overline{B}, \quad S(d\eta,d\eta) = \overline{C}. \tag{**}$$

事实上

$$\begin{aligned} S(d\xi,d\xi) &= S(\xi_x dx + \xi_y dy, \xi_x dx + \xi_y dy) \\ &= A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = \overline{A}, \end{aligned}$$

所以（*）式就是（**）．这样我们得到了一个内蕴地定义在 $T_P^*(M)$ 上的对象 S，称为 D 之"象征"(symbol) 并记作 $\sigma(D)$．"象征"一词表明 $\sigma(D)$ 可以形式地自 D 读出．但真正有意义的是，D 之"型"(从而还有其特征流形)仅由 $\sigma(D)$ 决定．

尽管我们知道双线性形式 S 在多变元情况（即 $\mathbf{R}^2$ 代以 $\mathbf{R}^n$）下也存在，上述讨论只适用于二阶方程．所以还要做更多的事．注意，迄今为止的讨论与总的标架不全符合，因为没有用到定义域 E 与值域 F，即未涉及未知函数 u．既然 D 作用在函数 u 上而给出函数 Du，E 与 F 就应为平凡丛而函数即平凡丛的截口．所以，给定一点 $P\in\mathbf{R}^2$，$E_P\simeq F_P=\mathbf{C}$（或 $\mathbf{R}$）就是一维矢量空间．对于一点 $P\in\mathbf{R}^2$ 以及余切向量 $w\in T_P^*(M)$，必有一数 $S(w,w)$，即是就，若

$$w = w_1dx + w_2dy,$$

有

$$S(w,w) = (Aw_1^2 + 2Bw_1w_2 + Cw_2^2)_P.$$

但在一维情况下，一个数可以看作线性映射：$E_P \longrightarrow F_P$．这一解释可以推广．确切地说，对每一点 $P\in M$ 与一余切向量 $w\in T_P^*(M)$，象征 $\sigma(D)$ 在 P 之值为一线性映射：$\sigma(D)_P: E_P \longrightarrow F_P$．这一点可用局部坐标表示如下：令 (U, x) 是 M 上 P 点附近的局部坐标，$(U; s_1, \cdots, s_k)$，$k=\dim E$，$(U; t_1, \cdots, t_l)$，$l=\dim F$ 为丛 E 与 F 之局部坐标．我们已知 D 在此坐标上有局部表示

$$D=\sum_{\alpha} A_\alpha D_\alpha,$$

$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $n=\dim M$ 是重指标 $D_\alpha=\partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}$, $A_\alpha: E_P\longrightarrow F_P$ 则是一线性映射. 要得到 $\sigma(D)$. 先设 $\deg D=d$, 而将 D 之最高阶项集中, 即写成

$$D=\sum_{|\alpha|=d} A_\alpha D_\alpha+|\alpha|<d\text{ 的低阶项.}$$

令 $w=\sum_{i=1}^{n} w_i dx_i\in T_P^*(M)$ 是用 (U,x) 坐标系表示的余切向量. 对每个 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, 定义

$$w^\alpha=\prod_{i=1}^{n} w_i^{\alpha_i}=w_1^{\alpha_1}\cdots w_n^{\alpha_n}.$$

这是一个数. 故

$$\sum_{|\alpha|=d} w^\alpha A_\alpha$$

是一线性映射 $E_P\longrightarrow F_P$, 它就是 $\sigma(D)$在 w 之值:

$$\sigma(D)(w)=\sum_{|\alpha|=d} w^\alpha A_\alpha. \qquad (*)$$

我们当然必须证明它与坐标 (U,x) 无关. 故设 (U,ξ) 是 P 附近的另一局部坐标系. 用 $\tilde{D}$ 表示对 ξ 的求导, 我们有

$$D_{x_i}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{D}_{\xi_j},$$

而 $a_{ij}=\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}$. 作二阶导数 $D_{x_j}D_{x_i}$, 我们既会得到二阶导数 $\tilde{D}_{\xi_p}\tilde{D}_{\xi_q}$, 也由于乘积求导法则会出现一阶导数 $\tilde{D}_{\xi_p}$. 然而, $\sigma(D)$既仅由最高阶项决定, 我们可以装作当成低阶项不曾出现. 这样就容易跟踪最高阶项:

$$D_{x_j}D_{x_i}=\sum_{p,q} a_{ip}a_{jq}\tilde{D}_{\xi_p}\tilde{D}_{\xi_q},$$

更一般地则有

$$D_\alpha=\prod_{i=1}^{n}\Big(\sum_p a_{ip}\tilde{D}_p\Big)^{\alpha_i},\quad \alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n).$$

于是 D 在 (U,ξ) 坐标系中可以表示为

$$D=\sum_{|\alpha|=d}A_\alpha\Big[\prod_{i=1}^{n}\Big(\sum_{p}a_{ip}\widetilde{D}_p\Big)^{\alpha_i}\Big].\qquad (**)$$

为在此坐标系中计算 $\sigma(D)(w)$，要把 w 在 $(U, d\xi)$ 系中展开为

$$w=\sum_p\widetilde{w}_p d\xi_p.$$

在(* *)中把 $\widetilde{D}_p$ 换成 $\widetilde{w}_p$，可得

$$\sigma(D)(w)=\sum_{|\alpha|=d}A_\alpha\Big[\prod_{i=1}^{n}\Big(\sum_{p}a_{ip}\widetilde{w}_p\Big)^{\alpha_i}\Big].\qquad (***)$$

然而我们有

$$w=\sum_p\widetilde{w}_p d\xi_p=\sum_{p,i}\widetilde{w}_p\frac{\partial\xi_p}{\partial x_i}dx_i.$$

所以

$$w_i=\sum_p a_{ip}\widetilde{w}_p,$$

而(* * *)成为

$$\sigma(D)(w)=\sum_{|\alpha|=d}A_\alpha w^\alpha$$

这正是（*）式.

现在可以谈到算子 D 的型，至少是其椭圆性了. 在二变量情况，若双线性形式 $S(w,w)$ 为定，就说 D 是椭圆的. 用 $\sigma(D)(w)$ 来说就是，当 $w\neq0$ 时 $\sigma(D)(w)$ 恒为非奇异的($\sigma(D)(0)$ 显然总是 0). 因为这个说法总是有意义的，就以它为椭圆性的一般定义.

即令 D 不是椭圆的，象征 $\sigma(D)$ 在研究 D 时仍起很大的作用. 它可以在下述意义下看作是与 D 相关的无穷小对象. 取 D 的局部表示

$$D=\sum_\alpha A_\alpha D_\alpha,$$

一般地不可以仅取其最高项

$$\sum_{|\alpha|=d}A_\alpha D_\alpha$$

而说我们有了一个整体定义的新算子(称为 D 之"主部")，因为我们知道，若在另一坐标系下展开 D_α，Leibnitz 法则会把低阶项拉进

来. 我们刚才所作就是:若把 D_α 换成余切向量 w 所生成的 w^α,就可以仅用最高项而得一整体定义的对象 $\sigma(D)$. 不幸的是,$\sigma(D)$ 并不是 D 那种意义下的算子,因为它并不作用于截口 $C^\infty(E)$ 上. 若 $\rho\in C^\infty(E)$ 是一截口,$\sigma(D)\rho$ 是没有意义的. 还必须有另一个因素参于即一个余切向量 w 参与. 确实的,可以通过 D 和截口对 $\sigma(D)(w)$ 作出内蕴的解释. 令 $v\in E_P$ 可以用 P 附近的一个截口 ρ 来描述,即 $\rho(P)=v$. 令 g 是定义在 M 上的函数而且 $g(P)=0, dg(P)=w$. 这时 $(g^d\rho)$ 是 E 在 P 附近的一个截口($d=D$ 之阶数). 所以 $\frac{1}{d!}D(g^d\rho)$ 是 F 的一个截口. 在 P 点估计它即可给出 $\sigma(D)(w)(v)\in F_P$. 为了要着重说明 $\sigma(D)$ 与 D 是不同世界里的东西,很容易在抽象的一般性中确切说明 $\sigma(D)$ 在哪里. 对 M 上的矢量丛 E 和 F, $\mathrm{Hom}(E,F)$ 如前面讲过的,也是 M 上一个丛. 令 $\pi: T^*(M)\longrightarrow M$ 为余切丛中的投影,可作拉回丛 $\pi^*(\mathrm{Hom}(E,F))$. 注意其中一点实为一个对 (w, H),这里 $w\in T^*(M)$, $H\in \mathrm{Hom}(E,F)$,而 $P=\pi(w)=H$ 之投影,即 $H\in \mathrm{Hom}_P(E,F)$ 是一线性映射:$H: E_P\longrightarrow F_P$. 于是 $\pi^*(\mathrm{Hom}(E, F))$ 的截口是一函数,而对每个余切向量 $w\in T^*(M)$ 指定一个线性映射 $H: E_P\longrightarrow F_P, P=\pi(w)$. $\sigma(D)$ 也就是这样一个东西. 关于这些细微的讨论,可以详见[2].

现在看一些例子. 为方便计算,最好是先作出前述的 $\sigma(D)(w)v$ 的内蕴表示. 这是很容易的. 设 g 是一定义于 P 附近的函数且 $g(P)=0, dg(P)=w$, f 是 E 的截口而 $f(P)=v$. 在局部表示中,需要计算

$$D(g^d f)=\Big(\sum_\alpha A_\alpha D_\alpha\Big)(g^d f).$$

因为 D_α 是偏导数,故若 $|\alpha|<d$,由 Leibnitz 法则,在 $D_\alpha(g^d f)$ 的展开式中每一项都有因子 g. 故若在 P 求值,整个式子为 0,因为已选定 $g(P)=0$. 若 $|\alpha|=d$,即对最高阶项,应用上之结论可知,只有 $[(D_\alpha g^d)f]_P$ 这样的项会留下来. 而在其中,又只有一项 $d!$

$\prod_i \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_P^{\alpha_i} f(P)$ 会留下来. 但 $w=dg(P)$，故有

$$w = \sum w_i dx_i = \sum \frac{\partial g}{\partial x_i}(P) dx_i,$$

所以有 $\frac{1}{d!}D\ (g^d f)_P = \sum_{|\alpha|=d} A_\alpha w^\alpha$.

流形上最简单的微分算子即外微分 $d: A(M) \longrightarrow A(M)$. 所以这时有 $E=F=\Lambda T^*(M)$(若需复丛,则 $E=F$ 为 $\Lambda T^*(M)$之复化). 按分量写则有 $E=\Lambda^k T^*(M)$, $F=\Lambda^{k+1}T^*(M)$. 首先, d 确为微分算子. 一个 k-形式 μ(E 之截口)局部地可以表为

$$\mu = \sum \mu_{i_1\cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

$d\mu$ 则含有 $\mu_{i_1\cdots i_k}$的偏导数. 这也表明 d 之阶为 1. 为计算$\sigma(d)(w)\mu$, 取一函数 g 使 $g(P)=0$, $dg(P)=w$. 按我们上面说的办法,

$$\sigma(D)(w)\mu = [d(w\mu)]_P.$$

因为

$$d(g\mu) = dg \wedge \mu + g \wedge d\mu$$

我们有

$$\sigma(d)(w)\mu = w \wedge \mu$$

亦即

$$\sigma(d)(w) = w \wedge$$

即在 $\Lambda T^*(M)$中外乘以 w. 因对任一 $w\neq 0$、恒可求出 $T^*(M)$的一基底$(w_1,\cdots,w_n)$使 $w_1=w$,则有 $0\neq w_1\wedge\cdots\wedge w_k=\mu\in \Lambda^k T^*(M)$但 $w\wedge\mu=0$. 所以算子 d 不是椭圆的.

联络是一个比较复杂的例子. 记住联络就是一个算子 D,它对 M 上每一对向量场 X, Y 给出第三个适合某些要求的向量场 $D_X(Y)$. 在我们的标架下, 我们取 $E=T(M)$, $F=\mathrm{Hom}(T(M), T(M))$, 于是定义一个算子 $\widetilde{D}: C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(F)$ 如下: 对 $X\in C^\infty(E)$, $\widetilde{D}(X)\in C^\infty(\mathrm{Hom}(T(M), T(M)))$, 且 $\widetilde{D}(X)Y=D_Y(X)$. 现在 P 附近的局部坐标(U,x)下计算 $\widetilde{D}$ 之局部表示. 这时 E 有基底$(e_1$,

$\cdots,e_n),e_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$. $\mathrm{Hom}(T(M),T(M))$有基底(φ_{ij})，这里φ_{ij}变e_i为e_j，变其它e_k为0。即是说，元$\sum a_{ij}\varphi_{ij}$即为矩阵(a_{ij}). 于是设$X=\sum_i X_ie_i,\tilde{D}(X)=\sum_{i,j}a_{ij}\varphi_{ij}$，我们有

$$\begin{aligned}\sum_j a_{ij}e_j=\tilde{D}(X)(e_i)&=D_{e_i}\Big(\sum_k X_ke_k\Big)\\&=\sum_k\Big(\frac{\partial\lambda_k}{\partial x_i}e_k+\sum_l\lambda_k\Gamma^l_{i,k}e_l\Big)\\&=\sum_j\Big(\frac{\partial\lambda_j}{\partial x_i}+\sum_k\lambda_k\Gamma^j_{i,k}\Big)e_j.\end{aligned}$$

即是说

$$a_{ij}=\frac{\partial\lambda_j}{\partial x_i}+\sum_k\lambda_k\Gamma^j_{i,k}.$$

这又一次表明$\tilde{D}$是一阶微分算子. 但与前述情况不同，它不是齐次的. Christopher-Levi-Civita 符号$\Gamma^j_{i,k}$给出了0阶项. 因为$\dim E$与$\dim F$不同，$\tilde{D}$不可能是椭圆的，但仍容易计算其象征$\sigma(\tilde{D})$. 令$w\in T^*(M),X\in E,g$为一实函数使$dg(P)=w$即$w_i=\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_P$. 于是

$$\sigma(\tilde{D})(w)X=\tilde{D}(gX)_P=\sum_{i,j}b_{ij}\varphi_{ij}.$$

系数b_{ij}由下式给出：

$$b_{ij}=\Big[\frac{\partial}{\partial x_i}(g\lambda_j)+\sum_k g\lambda_k\Gamma^j_{i,k}\Big]_P=w_i\lambda_j.$$

换言之，$\sigma(\tilde{D})(w)X$是一矩阵

$$\begin{pmatrix}w_1\lambda_1 & w_1\lambda_2 & \cdots & w_1\lambda_n\\ w_2\lambda_1 & w_2\lambda_2 & \cdots & w_2\lambda_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ w_n\lambda_1 & w_n\lambda_2 & \cdots & w_n\lambda_n\end{pmatrix}.$$

由它仍可看到，$w\neq0$时$\sigma(\tilde{D})(w)$必为一对一的.

最重要的经典的椭圆算子无疑是 Laplace 算子Δ. 在欧氏空间$\mathbb{R}^n$中它很简单，我们已知为

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

故 Δ 是二阶微分算子. 若 $w = \sum w_i dx_i$ 是一余切向量,则有

$$\sigma(\Delta)(w) = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 = \| w \|^2,$$

即乘以 w 的通常的范数 $\| w \|^2$. 这显然是 $\mathbf{R}^n$ 上的同构,所以可以说 Δ 是二阶($\deg\Delta=2$)椭圆算子.

在一般流形 M 上,上述论证就不够了. 记住,在一般情况下需设 M 是一定向 Riemann 流形. 这些附加的构造帮助我们定义了算子 $*$,由 $*$ 又可以定义余外微分

$$\delta = \pm (* d *).$$

然后定义 Laplace 算子 Δ 为

$$\Delta = (d + \delta)^2 = d\delta + \delta d$$

(见第十七章). 我们在 $\mathbf{R}^n$ 中所作的计算暗地里假设了 $\mathbf{R}^n$ 上的 Riemann 构造由下式给出

$$\| w \|^2 = \| \sum_i w_i dx_i \|^2 = \sum_i w_i^2,$$

即$(dx_1, \cdots, dx_n)$对每一点 $P \in \mathbf{R}^n$ 均为就范正交基底. 每当说到"通常的基底"就是指它. 在流形 M 上每一点 P 附近自然可以找到局部坐标系(U,x),使 U 同胚于 $\mathbf{R}^n$. 但是不一定能找到局部坐标系(U,x)使$(dx_1, \cdots, dx_n)$对 U 中每一点均为 M 上之 Riemann 内积下的就范正交基底. 所以我们不能只用特例而必须作一般的讨论.

首先,d 和 δ 都作用在形式上,故可取 $E=F=\Lambda T^*(M)$. 我们已经看到 $d: C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$是一阶微分算子, 而且

$$\sigma(d)(w) = w \wedge .$$

记住 $*$ 首先是逐点定义在丛 $\Lambda T^*(M)$上然后才拓展到截口上. 再记住在 $\Lambda T^*(M)$上不论怎样描述 $*$ 只是一线性同构 (改变基底中的元素), 很明显有

$$* : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$$

是零阶微分算子，即完全不含求导的算子．对这类算子显然有，对任一余切向量

$$\sigma(*)(w) = *,$$

(因为没有需要换成 w^α 的 D_α)．对于 k 阶微分算子 $D_1: C^\infty(E)\longrightarrow C^\infty(F)$ 和 l 阶微分算子 $D_2: C^\infty(E)\longrightarrow C^\infty(G)$，其复合 $D_2D_1: C^\infty(E)\longrightarrow C^\infty(G)$ 显然是 $k+l$ 阶的，而且其象征是 $\sigma(D_2)$ 与 $\sigma(D_1)$ 的复合．由这些考虑可知 $\Delta: C^\infty(E)\longrightarrow C^\infty(E)$ 至少是一个二阶微分算子，我们还有

$$\begin{aligned}\sigma(\Delta)(w) &= \sigma(d)(w)\sigma(\delta)(w)+\sigma(\delta)(w)\sigma(d)(w)\\ &= (w\wedge)*(w\wedge)*+*(w\wedge)*(w\wedge).\end{aligned}$$

为了弄清这是怎么一回事，我们来计算

$$\sigma(\Delta)(w)\mu,\quad \mu\in\Lambda^k T_p(M).$$

取一就范正交基底 $(e_1,\cdots,e_k)\in T_p^*(M)$，取 μ 为 $\Lambda^k T_p^*(M)$ 的一个基底元，例如 $\mu=e_1\wedge\cdots\wedge e_k$．于是

(i) $*(e_1\wedge\cdots\wedge e_k)=e_{k+1}\wedge\cdots\wedge e_n$，

(ii) $(w\wedge)*(e_1\wedge\cdots\wedge e_k)=w\wedge(e_{k+1}\wedge\cdots\wedge e_n)$．记

$$w=\sum_{i=1}^{n} w_i e_i$$

我们有

$$(w\wedge)*\mu=\sum_{i=1}^{k} w_i e_i\wedge e_{k+1}\wedge\cdots\wedge e_n.$$

(iii) 再作用以 $*$ 即得形如 $e_1\wedge\cdots\wedge\hat{e}_i\wedge\cdots\wedge e_k$ 这样的项，其中没有 e_i，每一项有适当符号，故

$$*(w\wedge)*\mu=\sum_{i=1}^{k}\pm w_i e_1\wedge\cdots\wedge\hat{e}_i\wedge\cdots\wedge e_k.$$

(iv) 再作用以 $w\wedge$，可得形如 $(w_ie_i)\wedge w_ie_1\wedge\cdots\wedge\hat{e}_i\wedge\cdots\wedge e_k=\pm w_i^2 e_1\wedge\cdots\wedge e_i\wedge\cdots\wedge e_k=\pm w_i^2\mu$ 的项，e_i 又重新出现．还有 $j>k$ 的项

$$w_je_j\wedge w_ie_1\wedge\cdots\wedge\hat{e}_i\wedge\cdots\wedge e_k$$

这样的项．所以

$$(w\wedge)*(w\wedge)*\mu=\pm\left(\sum_{i=1}^{k}w_i^2\right)\mu+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n}\pm w_iw_je_1\wedge\cdots\wedge\hat{e}_i\wedge\cdots\wedge e_k\wedge e_j.$$

作类似的计算还有

$$*(w\wedge)*(w\wedge)\mu=\pm\left(\sum_{j=k+1}^{n}w_j^2\right)\mu+\text{如同上式的第二项}.$$

如果仔细地计算一下符号，就会发现两个“第二项”恰好彼此抵消．所以我们得到下式而最多相差一个符号：

$$\sigma(\Delta)(w)=\|w\|^2,$$

即乘以 w 之范数平方，和 $\mathbf{R}^n$ 完全一样．由此也知 Δ 是椭圆的．

§2. 椭圆算子的解析指标，Hodge 理论

如果丢开那些奇怪的名词诸如丛截口之类，微分算子 D：$C^\infty(E)\longrightarrow C^\infty(F)$ 其实就是一个微分方程．因此涉及到的还就是关于微分方程的那些通常的问题．具体说，已知 $g\in C^\infty(F)$，方程

$$Df=g$$

是否有解？若有解，解是否唯一？最简单的情况显然就是 D 为矢量空间 $C^\infty(E)$ 与 $C^\infty(F)$ 之间的同构的情况．这时对任一 $g\in C^\infty(F)$，恒有唯一解 $f\in C^\infty(E)$．但这只是空泛的谈论．不仅是这种情况很少见，更由于没有一种有效的理论能把微分方程问题化为简单的线性空间问题来考虑．然而，即令在一般性的水平上，既然 D 已设为线性的，非唯一性与非存在性仍可用线性子空间来描述．所以可以用

$$\ker D\subset C^\infty(E)$$

来刻画非唯一性，而用

$$\operatorname{coker}D=C^\infty(F)/\operatorname{Im}D$$

来刻画非存在性．若它们均为零空间，D 就是同构．若不然，下一

个可能是最好的情况是二者均为有限维．在第十七章里我们已经看到，当 M 为一紧 Riemann 流形而 $D=\Delta$ 时，情况确实如此．这就是 Hodge 理论．情况是，Hodge 理论的思想对所有椭圆算子都是通用的，这一点下面再解释．承认这一点以后，我们定义 D 的指标为

$$\operatorname{Ind}(D)=\dim\ker D-\dim\operatorname{coker} D.$$

这样定义的理由全然是出于实效的考虑．前已指出，知道上面定义中右方两个值甚至知道其和都有用得多，但可以用拓扑方法得到的唯有其差．为什么是这样正是指标定理的内容．记住这一点，我们有时称 $\operatorname{Ind}(D)$ 为 D 的解析指标．注意，这定义相当确切地依赖于 E 和 F．这是很合理的．例如，若把 F 扩张为更大的丛，只不过引入更多的使方程 $Df=g$ 无解的 g，但增加了 $\dim\operatorname{coker} D$ 之值而使 $\operatorname{Ind}(D)$ 改变．

一般的 Hodge 理论的第一步是建立起 Sobolev 空间，再证明 Sobolev 和 Rellich 引理．在 Laplace 算子的情况，我们已经看到怎样借助于 M 的切丛 $T(M)$ 上的一个联络来作到这一点．联络不过是一个矢量场(即 $T(M)$ 的截口）的方向导数的公理化的定义．没有理由说我们不能模仿同样的公理来微分任一矢量丛 E 的截口．这样，光滑丛 E 上的联络就是一个映射

$$\nabla: C^{\infty}(T(M))\times C^{\infty}(E)\longrightarrow C^{\infty}(E),$$
$$(X,\rho)\longmapsto\nabla_X\rho,$$

它适合线性规则：对 X 以函数为标量，对 ρ 以常数为标量，而且对函数 f 有 Leibnitz 法则：

$$\nabla_X(f\rho)=X(f)\rho+f\nabla_X\rho.$$

若设 M 为紧的可定向流形（可在其上积分），而 E 有内积(Riemann 构造)．给 E 以一联络（与 Riemann 构造相容的联络只有一个），即可如第十七章那样在 E 之 s 类截口的空间 $C^s(E)$ 上定义 Sobolev s 范数．然而我们在第十七章就已指出过，可以直接利用局部坐标．而不必用联络．又因为这样做在许多方面更为初等一些而在第十

七章中又没有这样做．我们现在就来讲怎样做．故从现在起就设 M 为紧．取一固定的有限开覆盖 (U_i) 将 E 平凡化．在每个 U_i 上取固定的局部截口 $(s_1^i, s_2^i, \cdots, s_k^i)$，$k=\dim E$．再选从属于 (U_i) 的一的分割 (λ_i)．令 $K_i \subset M$ 为 λ_i 之支集，于是 K_i 为紧．当然也可取 U_i 为坐标邻域，局部坐标为 $x^i=(x_1^i, \cdots, x_n^i)$，$n=\dim M$．给出一个截口 $\rho \in C^\infty(E)$ 则有展开式

$$\lambda_i \rho = \sum_{j=1}^{k} \rho_j s_j^i.$$

于是 $\tilde{\rho}_i=(\rho_1, \cdots, \rho_k)$ 可看作是 $\mathbf{R}^n=U_i$ 上的矢量值 $\mathbf{C}^k$ 函数．这种函数显然可以就一平行体 P 周期拓展而 $K_i \subset \operatorname{Int} P$（注意区别：我们不是讨论 $\mathbf{R}^n$ 上的紧支集函数，此支集可以因函数而异，而是讨论支集位于一固定紧集 K_i 内的函数）．故若 $C^\infty(T^n)$ 是环而 T^n 上的 $\mathbf{C}^k$ 值函数空间，可定义一个映射

$$C^\infty(E) \longrightarrow \bigoplus_i C^\infty(T^n), \quad \rho \longmapsto (\tilde{\rho}_i).$$

我们知道怎样在 $C^\infty(T^n)$上定义 Sobolev s-范数，故可在其有限直和上定义 s-范数．上述映射显然是线性一对一的．故可把 $C^\infty(E)$与$\bigoplus_i C^\infty(T^n)$的一个子空间等同起来，从而 $C^\infty(E)$也有了 s-范数．类似地可以定义 s-完备化．令 $H^s(T^n)$为 $C^\infty(T^n)$的 Sobolev s 空间，$C^\infty(T^n) \subset H^s(T^n)$为包含，于是有包含映射

$$C^\infty(E) \longrightarrow \bigoplus_i C^\infty(T^n) \subset \bigoplus_i H^s(T^n).$$

因右方为一 Hilbert 空间，故可取 $C^\infty(E)$在其中的完备化，此即 Sobolev 空间 $H^s(E)$．用这样的方法显然仍有 Sobolev 引理和 Rellich 引理．这个程序中当然有很多有待选择的地方，要证明这些不同选择给出等价的范数很繁冗，但并不难．也可以在作一特定的论证前先作一选择．

构造 Sobolev 空间 $H^s(E)$与任意算子无关．但若 $D: C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(F)$是一 d 阶微分算子，它显然映一 s 类截口为一 $s-d$ 类截口．由下图

$$
\begin{array}{ccc}
C^{\infty}(E) & \xrightarrow{D} & C^{\infty}(F) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^{s}(E) & \cdots\longrightarrow & H^{s-d}(F)
\end{array}
$$

可将 D 拓展为一连续的线性算子 $D: H^{s}(E)\longrightarrow H^{s-d}(F)$. 在泛函分析中有一个引理与此有关：

Schwartz 引理 令 H 和 H' 是两个 Hilbert 空间，$T: H\longrightarrow H'$ 是一连续的一对一线性映射且使 $\operatorname{Im}T\subset H'$ 为闭. 则对任一紧算子 $K: H\longrightarrow H'$, $\dim\ker(T+K)$ 为有限.

证 若否，则 $\ker(T+K)$ 中有一无限的就范正交序列 (e_i). 因为 K 为紧，故可设 $Ke_i\longrightarrow f$. 又因 $Te_i+Ke_i=0$，故 $Te_i\longrightarrow -f$. 又因 $\operatorname{Im}T$ 为闭，故必有一个 $e\in H$ 使 $Te=-f$，但 T 又是连续且一对一的线性算子，且将 H 映到另一 Hilbert 空间 $\operatorname{Im}T$ 上，故 $e_i\longrightarrow e$，而这是不可能的.

为了应用这一引理，需要证明

椭圆算子的基本估计 若 $D: C^{\infty}(E)\longrightarrow C^{\infty}(F)$ 是一椭圆微分算子，其阶为 d，则对任意指数 s 均有一个只依赖于 D 与 s 的常数 C 使得

$$
\|\rho\|_{s+d}^{2}\leqslant C(\|D\rho\|_{s}^{2}+\|\rho\|_{s}^{2}),\quad \rho\in C^{\infty}(E). \qquad (*)
$$

证明的想法很简单. 显然只需对环面证明它即可. 于是设

$$
D=\sum_{\alpha}A_{\alpha}D_{\alpha}.
$$

先看一简单的特例，即 D 只含主部即 $|\alpha|=d$，而且系数 $A_{\alpha}=A_{\alpha}(x)$ 为常数. 记住若 $\rho\in C^{\infty}(E)$ 表为一 Fourier 级数 (ρ_{ξ})，则 $D\rho$ 可表为 Fourier 级数 $((\sum_{\alpha}A_{\alpha}\xi^{\alpha})\rho_{\xi})$，但 $\sum_{\alpha}A_{\alpha}\xi^{\alpha}=\sigma(D)(\xi)$ 正是象征同态，这里把 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 解释为任一点 $P\in T^n$ 处的余切矢量. 因为由假设 $\sigma(D)(\xi)$ 对一切 $\xi\neq 0$ 为同构，故存在一常数 $C(\xi)$ 使得对任一向量 $v\in E$，

$$\|\sigma(D)(\xi)(v)\| \geqslant C(\xi)\|v\|.$$

因 $\sigma(D)(\xi)$ 是 d 次齐次多项式，故 $C(\xi)$ 必为 $C\|\xi\|^d$ 之形，C 是一常数. 于是我们有

$$\|\sigma(D)(\xi)(v)\| \geqslant C\|\xi\|^d\|v\|.$$

现由定义

$$\|D\rho\|_s^2 = \sum_\xi \|\sigma(D)(\xi)\rho_\xi\|^2(1+|\xi|^2)^s$$

$$\geqslant C\sum_\xi \|\xi\|^{2d}|\rho_\xi|^2(1+|\xi|^2)^s.$$

所以，

$$\|D\rho\|_s^2 + \|\rho\|_s^2 \geqslant \sum_\xi (1 + \mathrm{Const}\|\xi\|^{2d})|\rho_\xi|^2(1 + \|\xi\|^2)^s$$

$$\geqslant \mathrm{Const}\sum_\xi |\rho_\xi|^2(1+\|\xi\|^2)^{s+d}$$

$$\geqslant \mathrm{Const}\|\rho\|_{s+d}^2.$$

然后，对一般情况只需用逼近. 想法如下：对任一点 $P\in T^n$，我们将先求其一个小邻域 U 使对一切适合 $\mathrm{supp}\rho\subset U$ 的 ρ，（*）式成立. 用这些邻域 U 覆盖 T^n 再用一的分割即可证明一般的（*）. 在小邻域内的证明如下：对于 P 点令 D_0 为将 D 之系数 A_α 代以 $A_\alpha(P)$ 且仅保留其最高阶 $|\alpha|=d$ 的项所得的常系数算子. 由上面已经证明了的，有不等式

$$\|\rho\|_{s+d} \leqslant C(\|D_0\rho\|_s + \|\rho\|_s)$$

$$\leqslant C[\|D\rho\|_s + \|(D-D_0)\rho\|_s + \|\rho\|_s]. \tag{1}$$

但算子差 $D-D_0$ 可写为 $D-D_0=A+B$，B 即 D 中之低阶项 $\sum_{|\alpha|<d} A_\alpha D_\alpha$，从而

$$A = \sum_{|\alpha|=d}(A_\alpha(x) - A_\alpha(P))D_\alpha.$$

所以若 U 充分小，必可使上式最右方之第二项

$$C\|A\rho\|_s \leqslant \frac{1}{2}\|\rho\|_{s+d}$$

而因 B 之阶最多为 $d-1$，故由连续性有

$$\| B\rho \|_s \leqslant \| B \| \, \| \rho \|_{s+d-1}.$$

为处理这一项，需要以下的不等式：

引理 已知整数 $s_1 < s < s_2$ 以及 $\varepsilon > 0$，必存在一常数 $C(\varepsilon) > 0$ 使得

$$\| \rho \|_s^2 \leqslant \varepsilon \| \rho \|_{s_2}^2 + C(\varepsilon) \| \rho \|_{s_1}^2.$$

证 对任一正数 y，因 y 与 $\frac{1}{y}$ 中至少有一个 $\geqslant 1$，

$$1 \leqslant y^{s_2 - s} + \left(\frac{1}{y}\right)^{s - s_1}.$$

现令 $y = \varepsilon^{1/(s_2 - s)} (1 + \| \xi \|^2)$，则有

$$(1 + \| \xi \|^2)^s \leqslant \varepsilon (1 + \| \xi \|^2)^{s_2} + C(\varepsilon)(1 + \| \xi \|^2)^{s_1},$$

这里 $C(\varepsilon) = \varepsilon^{(s_1 - s)/(s_2 - s)}$，引理证毕。

现在对 $s \leqslant s + d - 1 < s + d$ 应用以上引理，并适当取 ε，必可得

$$C \| B \| \, \| \rho \|_{s+d-1} \leqslant \frac{1}{4} \| \rho \|_{s+d} + C_1 \| \rho \|_s.$$

从而 (1) 式化为

$$\| \rho \|_{s+d} \leqslant C(\| D\rho \|_s + \| \rho \|_s) + \frac{3}{4} \| \rho \|_{s+d},$$

由此即得 (*)。

有此基本估计后即可应用 Schwartz 引理了．记住由 Rellich 引理，对任一 s，包含算子 $j: H^s(E) \longrightarrow H^{s-1}(E)$ 为一紧算子．考虑

$$F = D \oplus j : H^{s+d}(E) \longrightarrow H^s(F) \oplus H^{s+d-1}(E),$$

我们有

$$\begin{aligned} \| F\rho \| &= \| D\rho \|_s + \| \rho \|_{s+d-1} \geqslant \| D\rho \|_s + \| \rho \|_s \\ &\geqslant C \| \rho \|_{s+d}, \end{aligned}$$

这表明 F 是一对一的，且有闭值域．由 Schwartz 引理，$\ker D = \ker(F - j)$ 维数为有限，从而 $\ker D \cap C^\infty(E)$ 也是有限维的．

我们还要证明 $\operatorname{coker} D = C^\infty(F)/\operatorname{Im} D$ 也是有限维的．这是很容易的技巧性问题．思路如下：在 E, F 上给出内积，使得若 ρ, μ 为 $C^\infty(E)$ 之截口，必可得一 M 上之函数 $P \longmapsto (\rho(P), \mu(P))$．若 M 为

紧的可定向流形，则可用积分定义 $C^{\infty}(E)$ 上之内积为

$$(\rho,\mu)=\int_M(\rho(P),\mu(P))dP.$$

这样可按平常的方式定义伴随算子 D^*：

$$(D\rho,\mu)=(\rho,D^*\mu),\quad \rho\in C^{\infty}(E),\mu\in C^{\infty}(F). \tag{2}$$

因为 dim coker$D$=dim kerD^*，则对 D^* 应用上之所述即得所需的结果.

在这过程中有几个技术问题. 首先，$C^{\infty}(E)$ 与 $C^{\infty}(F)$ 均非 Hilbert 空间，故不能用（2）来定义 D^*（因线性映射 $\rho\longmapsto(D\rho,\mu)$ 不能写成（ρ，$*$）之形）. 故需用其它方法定义 D^*. 此外，即使定义了 D^*，也还需证明它也是椭圆算子，才能应用 Hodge 理论. 所幸是这一切对于从事偏微分方程的人都很熟习而容易. 只需看一下局部情况. 故设 $M=\mathbb{R}^n$ 而 E，F 为平凡丛，且只讨论具紧支集的截口. 由 Gram Schmidt 方法作 E 与 F 之就范正交基，使其内积成为“通常的”内积. 对函数 f，g 有

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f(x),g(x))=\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i},g(x)\right)+\left(f(x),\frac{\partial g(x)}{\partial x_i}\right).$$

因在无穷远附近 $(f,g)=0$，求积上式将有

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i},g\right)=-\left(f,\frac{\partial g}{\partial x_i}\right),$$

即对算子 $D_\alpha=\dfrac{\partial}{\partial x_i}$，有 $D^*=-\dfrac{\partial}{\partial x_i}=(-1)D_\alpha$，更一般地

$$\left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}\right)^*=(-1)^{|\alpha|}\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}.$$

若 $D=\sum_\alpha A_\alpha D_\alpha$，我们有

$$(A_\alpha D_\alpha f,g)=(D_\alpha f,A_\alpha^*g),$$

$A_\alpha^*(P):F_P\longrightarrow E_P$ 即通常的伴随矩阵. 所以

$$(D_\alpha f,A_\alpha^*g)=(-1)^{|\alpha|}(f,D_\alpha A_\alpha^*g).$$

但显然有

$$D_\alpha A_\alpha^*=A_\alpha^*D_\alpha+\text{低阶导数}. \tag{3}$$

这表明 D^* 局部地应如何定义. D^* 实为一微分算子，其阶数与 D 相同仍为 d. (3) 式还表明应如何定义象征 $\sigma(D^*)$. 因为这时低阶项不起作用. 显然

$$\sigma(D^*)(\xi)=(-1)^d[\sigma(D)(\xi)]^*.$$

是 $\sigma(D)(\xi)$之伴随矩阵（加上±号）. 特别是，当 D 为椭圆时，D^* 亦然. 所需作的即是如此.

当我们一开始在定义 $\sigma(D)$ 时就弄掉了低阶项，并将 D_α 代以余切向量 w^α，其实并未说明何以要这样做，只是说我们想要一个整体定义的东西. 但通过讨论 Hodge 定理以后，现在就理解多了. 算子 D_α 与函数不可交换，要使它们可以交换就必须抛去由 Leibnitz 法则而来的低阶项. 这样才能得到一个性态较好的东西. 这样做当然会失去一些什么. Hodge 定理就表明了这一点. 当我们设 $\sigma(D)$ 为一同构（椭圆性）时，其实还不能断定 D 也是同构. 相反地我们来证明 D 与同构之差别至多为有限维的. 这就引出了最后一点评注. 总结起来，我们先要证明一个"容易的"正定理：当 D 为一同构时，$\sigma(D)$亦然. 证明确实是"容易的"：若 D 有逆 D_1 而 $DD_1=D_1D=1$. 但作象征时组合变成了乘积，所以

$$\sigma(D)\sigma(D_1)=\sigma(D_1)\sigma(D)=1.$$

不幸的是这样做并不管用，因为逆算子 D_1 并非微分算子. 它确实不可能是. 因为所有的微分算子之阶≥0 而 $\deg(1)=0$. 不管怎么说，微分之"逆"是积分. 所以需要在流形上引入一个整体定义的积分算子并证明它也有适当定义的象征. 这就是拟微分算子. 虽然我们这里不可能讨论它，仍应指出，即令我们只对微分算子有兴趣，也很容易出现这样的情况，使得我们需要更一般类型的算子. 当读者研读指标定理的详细证明（例如见［2］）时，应该记住这一点. 关于拟微分算子可以参看［3］.

§3. K 理论概述

我们已经看到，Hodge 定理指出，定义在紧流形 M 上的椭圆微

分算子 D 有一不变量

$$\mathrm{Ind}(D)=\dim\ker D-\dim\operatorname{coker} D.$$

现在的问题是怎样证明它是一个拓扑不变量. 在特定的特例下,办法是以拓扑方式显示地重新解释 $\mathrm{Ind}(D)$,例如用 L-亏数、除子、陈类等等. 而为在一般情况下做到这一点,就需要一种新的工具以拓扑方式定义一个新的不变量. 然后再进而证明这两个不变量是一回事. 为拓扑指标提供自然的语言的这种新工具就是 K 理论.

回忆一下,K 群 $K(X)$是一种形式的万有的对象使 $V(X)$成群,$V(X)$是 X 上的矢量丛的同构类所成的半群. $V(X)$中的加法即 Whitney 和$\oplus$. 因为万有的对象是用公理定义的,所以有不同的方式去定义它. 例如 Grothendieck 构造就是取由 $V(X)$生成的自由群 $F(V(X))$以及由所有形如 $E\oplus F-E-F$ 的关系所成的子群 I 之商群. 另一种对我们目前的情况更适用的构造法是仿效由非负整数($V(X)$)得出整数($K(X)$). 所以我们考虑$V(X)$中的元素对(E,F)之集 P. 我们说两个对为等价$(E,F)\sim(E_1,F_1)$即指存在一个 $A\in V(X)$使得

$$(E\oplus F_1)\oplus A=(E_1\oplus F)\oplus A.$$

我们知道,上面要添加一个 A 是因为相消律在 $V(X)$中不一定成立. 所以若没有 A,$\sim$就不是等价关系. P 是一个半群,其中的加法定义为$(E,F)+(E_1,F_1)=(E\oplus E_1,F\oplus F_1)$而 $K(X)=P/\sim$是一个群. 和平常一样,这里有嵌入关系

$$V(X)\longrightarrow K(X),\quad E\longmapsto[E,0].$$

因为$[E,F]=0$ 是 $K(X)$中的零元,可将 $K(X)$中的任意元$[E,F]$写成

$$[E,F]=[E,0]+[0,F]=[E,0]-[F,0]=E-F.$$

很明显,它完全等价于 Grothendieck 构造法.

$K(X)$是 X 上的函子. 若 $f: X\longrightarrow Y$ 为一映射,则由拉回映射可给出一个映射

$$V(Y)\longrightarrow V(X),\quad E\longmapsto f^*(E).$$

它又进一步诱导出一个映射

$$f^*: K(Y) \longrightarrow K(X).$$

点空间 $*$ 是一不足道的例子. 因为 $V(*)\simeq$(非负整数), $K(*)\simeq \mathbf{Z}$ =(整数). 若空间 X 有一基点 $*\in X$, 则嵌入映射 $*\xrightarrow{j}X$ 给出

$$K(X)\xrightarrow{j^*}K(*)\simeq \mathbf{Z}$$

其核即定义为约化群

$$\widetilde{K}(X)=\ker j^*.$$

若 $X\xrightarrow{p}*$ 为平凡的投影, 则 $pj=1$ 定义了直和

$$K(*)\xrightarrow{p^*}K(X)\xrightarrow{j^*}K(*)$$

即

$$K(X)=\widetilde{K}(X)\oplus \mathbf{Z}.$$

此式几何意义很清楚. 对于 $E\in V(X)$, $\mathbf{Z}$ 就是取其维数 $\dim E$. 故若将任意整数 $n\geqslant 0$ 与 n 维平凡丛混同起来, 则对任意 $E\in V(X)$, $E-\dim E\in \widetilde{K}(X)$. 所以 $\widetilde{K}(X)$ 只不过是抛开几何上不足道的信息. 所以它在几何上更有意义. 事实上可以用一几何方式直接定义 $\widetilde{K}(X)$, 这对于非形式地了解 $\widetilde{K}(X)$ 十分重要. 下述引理是基本的事实.

平凡化引理 设 X 为紧, 则对 X 上任一矢量丛 E, 必有另一矢量丛 F 使 $E\oplus F$ 为平凡丛.

证 由分裂原则, 只需证明有一平凡丛 A 使 $E\subset A$ 即可. 令 $\{(U_i, \varphi_i)\}$, $i=1, \cdots, k$ 为有限的平凡化覆盖而其中的局部坐标为

$$\varphi_i: \pi_i^{-1}(U_i)\longrightarrow U_i\times \mathbf{R}^n.$$

令 ψ_i 为 φ_i 之后再继以投影 $U\times\mathbf{R}^n\longrightarrow\mathbf{R}^n$ 使

$$\psi_i: \pi^{-1}(U_i)\longrightarrow \mathbf{R}^n.$$

$\psi_i|E_x: E_x\longrightarrow\mathbf{R}^n$ 为一线性同构. 再令 (λ_i) 为从属于 (U_i) 的一的分割. 和通常一样, ψ_i 可以拓展为整个 E 上的映射 $\bar{\psi}_i$ 如下:

$$\bar{\psi}_i: \quad E\longrightarrow\mathbf{R}^n, \qquad v\longmapsto\lambda_i(\pi(v))\bar{\psi}_i(v).$$

注意．在任意纤维 E_x 上．$\psi_i|E_x$ 仍为线性的（若 $\lambda_i(x)\neq 0$，且为同构）．今定义

$$\psi:\quad E\longrightarrow X\times(\overbrace{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times\cdots\times\mathbf{R}^n}^{k\text{个副本}}),$$

$$v\longmapsto(\pi(v),\psi_1(v),\psi_2(v),\cdots,\psi_k(v)).$$

因 $\psi|E_x$ 是线性的，故 ψ 是一丛映射．ψ 也是嵌入，因为对任意 $x\in X$，至少有一 $\lambda_i(x)\neq 0$，故 $\psi|E_x$ 是一对一的．

现考虑映射

$$\alpha: V(X)\longrightarrow\widetilde{K}(X),\quad E\longmapsto[E,\dim E].$$

若 $\alpha(E)=\alpha(F)$，由 $\widetilde{K}(X)$ 之定义，必有某丛 A 使

$$E\oplus\dim E\oplus A=F\oplus\dim F\oplus A.$$

由平凡化引理可再作丛 B 使 $A\oplus B$ 为平凡丛，于是上式成为

$$(*)\quad E\oplus k=F\oplus l,$$

k,l 是两个整数（＝平凡丛）．易见（$*$）是等价关系而以上所证其实就是 $\alpha(E)=\alpha(F)\Leftrightarrow E(*)F$．故

$$V(X)/(*)\subset\widetilde{K}(X).$$

但易见这里的 $\subset$ 其实是 $=$．因为给定任一 $[E,F]\in\widetilde{K}(X)$．将 F 平凡化：$F\oplus A=n$．于是 $[E,F]=[E\oplus A,n]=\alpha(E\oplus A)$，因为由 $[E,F]\in\widetilde{K}(X)$ 即知 $\dim E=\dim F\Rightarrow n=\dim(E\oplus A)$．

关系（$*$）是很有几何内容的．若（$*$）对某平凡丛 k,l 成立，就说 E 与 F 为“稳定等价”．例如，我们已知 n 维球面之切丛 $T(S^n)$ 不是平凡的（当 n 为偶时，不存在处处非 0 的截口），但其法丛 $\tau(S^n)$ 则是．于是有

$$\tau(S^n)\oplus 1=n+1$$

而 $\tau(S^n)$ 是稳定平凡的．这一现象表明 $V(X)$ 中相消律不成立，而 $\widetilde{K}(X)$ 正是表明其不成立的程度．确实地，我们也可以用一万有的对象抽象地定义 $\widetilde{K}(X)$，此对象把适合某附加条件（即要求对平凡丛 $\varphi(n)=0$）的加法函数 $\varphi: V(X)\longrightarrow$ 某 Abel 群变为群同态．

以上所述虽然严格说来只当 X 为紧时成立，但由分类定理，

它对广泛得多的空间也对. $V(X)$是伦型不变的,从而 $K(X)$和 $\widetilde{K}(X)$也是.

稳定等价关系另一有用的推论是 $\widetilde{K}(X)$的同伦描述. 记住丛 $E\in V(X)$可以用分类映射 $f: X\longrightarrow BG_n$ 的同伦类来分类,这里 $n=\dim E$, $G_n=U(n)$或 $O(n)$视所论的丛为复或实而定. 再记住包含关系 $G_n\subset G_{n+1}$诱导出一映射 $j_n: BG_n\longrightarrow BG_{n+1}$. 若 $f: X\longrightarrow BG_n$ 将 E 分类,则 $j_nf: X\longrightarrow BG_{n+1}$的意义很清楚:它就是从 $E\oplus 1$ 的分类映射,亦即稳定关系. 令$[X,BG_n]$为映射 $f: X\longrightarrow BG_n$ 的同伦类之集. 于是 $j_n: G_n\longrightarrow G_{n+1}$诱导出一映射$(j_n)_*: [X,BG_n]\longrightarrow[X,BG_{n+1}]$. 这样可得一(集的)有向系$\{[X,BG_n],(j_n)_*\}$,其直接极限记作$[X,BG]$:

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ n\to\infty}}[X,BG_n]=[X,BG]$$

称为稳定同伦类之集. 由上面所说,可以认为

$$[X,BG]=\widetilde{K}(X).$$

确定也可将$[X,BG]$解释为 X 到一"稳定"分类空间 BG 的映射 $f: X\longrightarrow BG$ 的同伦类. 有一个一般的同伦操作方法把 $j_n: BG_n\longrightarrow BG_{n+1}$精确到所涉及到的空间和映射的伦型变为包含映射. 于是 BG 是$\cdots BG_n\subset BG_{n+1}\subset\cdots$的"望远镜并"(telescopic union). 但我们不必详谈,而是要说明可以直接用此格式进行计算. 首先把问题确定,我们讨论复丛于是 $G_n=U(n)$, X 取为 n 维球面 S^n.

若 $n=0$,则 $\widetilde{K}(S^0)=K(*)=\mathbf{Z}$ 而没有什么意思.

若 $n=1$,则$[S^1,BU(n)]=\pi_1(BU(n))=\pi_0(U(n))$. 这是由 $EU(n)$之可缩性与纤维化

$$U(n)\longrightarrow EU(n)\longrightarrow BU(n)$$

而来. 因为对一切 n, $\pi_0(U(n))=0$($U(n)$为连通群),有

$$\widetilde{K}(S^1)=0.$$

下一个情况 $n=2$ 时需计算 $\pi_1(U(n))$,先由纤维化

$$U(n)\longrightarrow U(n+1)\longrightarrow U(n+1)/U(n)=S^{2n+1}$$

可知对一切 $n\geqslant 1$ 有 $\pi_1(U(n))=\pi_1(U(n+1))$. 因为 $U(1)=S^1$, $\pi_1(S^1)=\mathbf{Z}$ 故有

$$\widetilde{K}(S^2)=\mathbf{Z}.$$

这件事可以更几何化地重新表述. 函数

$$V(S^2)\longrightarrow\mathbf{Z},\quad E\longmapsto c_1(E),$$

其中 $c_1(E)$ 为 E 之第一陈类,是可加的且 $c_1(n)=0$. 故有群的同态

$$\begin{array}{ccc} V(S^2) & \xrightarrow{c_1} & \mathbf{Z} \\ \downarrow\alpha & \nearrow c_1 & \\ \widetilde{K}(S^2) & & \end{array}$$

因为我们已经抽象地知道 $\widetilde{K}(S^2)=\mathbf{Z}$,所以若能求得丛 $E\subset V(S^2)$ 使 $c_1(E)=1$,即知 c_1 为同构. 这个丛 E 当然就是典则的万有线丛 $E\longrightarrow S^2=\mathbf{CP}^1$,即通常称为 Hopf 丛 H 者. 故知 $\alpha(H)=H-1$ 是群 $\widetilde{K}(S^2)$的生成元.

对更大的 k 计算 $\pi_k(U(n))$就难了,只有当 $2n+1>k$ 时才会有稳定点:

$$\pi_k(U(n))=\pi_k(U(n+1))=\cdots.$$

所以只知道 n 很小时(例如 $n=1$ 或 2)的 $\pi_k(U(n))$就不够了. K 理论的基本定理,即周期定理之最简单的形式如下:

Bott 周期性定理

$$\widetilde{K}(S^n)=\pi_n(BU)=\begin{cases}\mathbf{Z}, & n\text{ 为偶},\\ 0, & n\text{ 为奇}\end{cases}$$

(故稳定同伦群 $\pi_n(BU)$之周期为 2).

我们不能来证明它了,但还要多说几句以便最后把它改述为对我们最方便的形式.

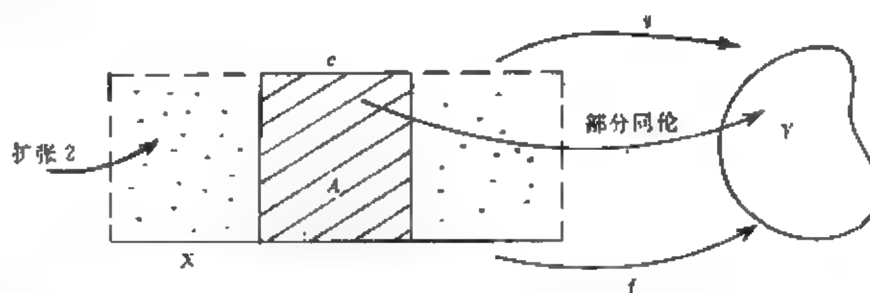
令 $A\subset X$ 为一子集. X/A 表示由 X 将 A"捏"(collapse)为一点(即以它为 X/A 之基点)所得的空间. 这种作法是很普遍的,但需加一些限制以便得到很好的空间 X/A. 由序列

$$A\xrightarrow{i}X\xrightarrow{\pi}X/A$$

可以对一空间 Y 得到序列

$$[X/A,Y]\xrightarrow{\pi^*}[X,Y]\xrightarrow{i^*}[A,Y].$$

可否希望此序列为正合的,即 $\mathrm{Im}\pi^*=\ker i^*$?这里 $\ker i^*$ 解释为 i^{*-1}[常值映射 $C: A\longrightarrow Y$ 的基点之类]. 因为由定义 $\pi i=C$,故 $\mathrm{Im}\pi^*\subset\ker i^*$ 而没有问题. 但包含关系 $\ker i^*\subset\mathrm{Im}\pi^*$ 相当于要求:给定一映射 $f: X\longrightarrow Y$ 使 $f|A$ 同伦于常值映射($[f]\in\ker i^*$),要找到另一映射 $g: X\longrightarrow Y$ 使 $g|A=C$($[g]\in[X/A,Y]$)且 $f\sim g$($[f]=\pi^*[g]$). 画一个图来帮助记忆:



事实上很普遍的对(X,A)均有此性质(形式地称与同伦扩张性质). 例如(X,A)为一单纯复形对或 CW 对,或者与它们同伦的东西都有. 特别是对于流形对是如此.

由此受到启发,以 $Y=BU$,可定义相对 K 群为

$$K(X,A)=\widetilde{K}(X/A),$$

这时,

$$K(X,A)\xrightarrow{\pi^*}\widetilde{K}(X)\xrightarrow{i^*}\widetilde{K}(A)$$

成为(群的)正合序列!

注意,若对 $\widetilde{K}(X)$,$\widetilde{K}(A)$均加上一个 $\mathbf{Z}$,并不改变正合性,于是对任意的对(X,A),序列

$$K(X,A)\xrightarrow{\pi^*}K(X)\xrightarrow{i^*}K(A)\qquad(*)$$

均为正合的.

为应用这一事实,考虑以下情况. 设有 X 上的丛 E 和 F 使 $E|A=F|A$. 于是$[E,F]\in K(X)$在 $\ker i^*$ 中,因为 $i^*[E,F]=[E|A,F|$

$A]=0$，故可求得元 $a\in K(X,A)$ 使 $\pi^*(a)=[E,F]$. 因为 $[E,F]\in K(X)$ 即"差"$E-F$，a 可以称为 E 与 F 在 $K(X,A)$ 中之差.

这一情况确与我们有关. 设 E,F 是流形 M 上的丛，而 $D: C^\infty(E)\longrightarrow C^\infty(F)$ 是一微分算子，于是 D 有象征 $\sigma(D)$ 使对任一余切向量 $\omega\in T^*M$ 均给出一个线性映射

$$\sigma(D)(\omega): E_P\longrightarrow F_P,\quad P=\pi(\omega).$$

这事可改述如下：令 $\pi: T^*(M)\longrightarrow M$ 为余切丛的投影，可以考虑拉回 $\pi^*(E)$，$\pi^*(F)$. $\pi^*(E)$ 之元是一个对 (ω,P)，$\omega\in T^*(M)$，$P\in M$ 且 $\pi(\omega)=P$. 故象征 $\sigma(D)$ 可以看作一线性映射：对任一 (ω,P) 有

$$\sigma(D): \pi^*(E)_{(\omega,P)}\longrightarrow\pi^*(F)_{(\omega,P)}.$$

即 $\sigma(D):\pi^*(E)\longrightarrow\pi^*(F)$ 是丛同态. 若设 D 为椭圆的，即 $\sigma(D)$ 对一切 (ω,P) 凡 $\omega\neq 0$ 时均为同构. 即，若以 $0\in T^*(M)$ 表 0 截口，则

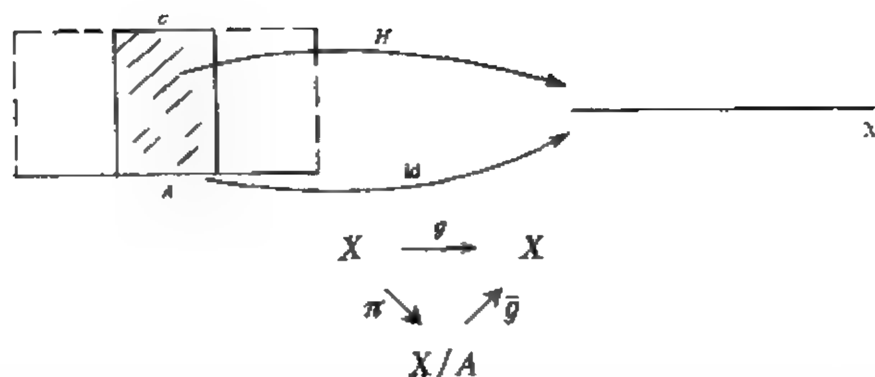
$$\sigma(D): \pi^*(E)|(T^*(M)-0)\longrightarrow\pi^*(F)|(T^*(M)-0)$$

为同构. 故以 $X=T^*(M)$，$A=T^*(M)-0$，就得到了获得差元素的情况. 以上的表述并不准确，因为映射 $\pi^*: K(X,A)\longrightarrow K(X)$ 不一定是一对一的，故使 $\pi^*(a)=[E,F]$ 的差 $a\in K(X,A)$ 也不必唯一. 所以还要多做些事才能使选取更清楚. 这并不难做，要用到一般同伦理论中的 Puppe 序列. 出发点是：(*)看起来疑为一正合上同调序列之一段. 这是当然的，由于我们选用记号 $K(X,A)=\tilde{K}(X/A)$ 的方法，这就产生了一个"相对群"的幻觉. 但若非这个幻觉是真实的，我们也就不会这样做了. 做法如下：

记住 $K(X)$ 只与 X 的伦型有关. 在下面的引理中，这件事是有用的.

引理 设 $A\subset X$ 为一子集. 若 A 作为一个空间是可缩的，则 X 与 X/A 伦型相同. 事实上，投影 $\pi: X\longrightarrow X/A$ 即同伦等价.

证 A 为可缩即指恒等映射 $A\longrightarrow A$ 同伦于常值映射 C. 用 H 表此同伦，故在下图中有一映射 $(X\times 0)\cup(A\times I)\longrightarrow X$. 由同伦扩张性质，这可拓展为一映射 $X\times I\longrightarrow X$. 称顶 $X=X\times\{1\}$ 的映射为 g，则因 $g|A=C=$ 常值，可以通过商将它分解如下：



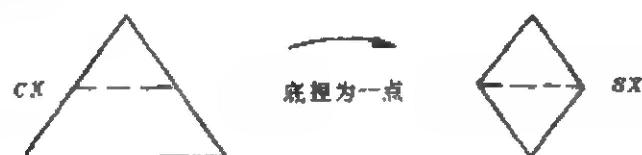
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & X \\ & \pi\searrow \quad \nearrow\bar{g} & \\ & X/A & \end{array}$$

即 $\bar{g}\pi=g$. 因 $g\sim\mathrm{id}$,故 $\bar{g}\pi\sim\mathrm{id}$. 同理 $\pi\bar{g}\sim\mathrm{id}$,故 $\bar{g}$ 是 π 的同伦逆.

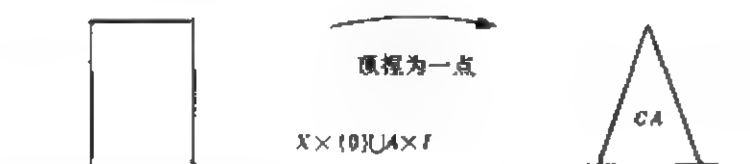
对任一空间 X,$(X\times I)/(X\times\{1\})$ 称为 X 上之锥 CX. CX 显然



可缩. 若在 CX 中再将 $X=X\times\{0\}$ 捏为一点,所得空间 CX/X 称为 X 的双角锥(suspension),记作 SX:



若在 $(X\times\{0\})\cup(A\times I)$ 中将顶 $A\times\{1\}$ 捏合,可得一空间:$X\cup CA$.



$A\subset X\cup CA$ 是可缩的,故由上之引理:$X\cup CA\sim(X\cup CA)/CA$($\sim$表伦型相同). 但显然 $(X\cup CA)/CA=X/A$. 换言之,商空间被代以

"并"空间. 又图式

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{包含}} & X\bigcup CA \\ {\scriptstyle id}\Big\| & & \Big\updownarrow {\scriptstyle \text{同伦等价}} \\ X & \xrightarrow[\pi]{} & X/A \end{array}$$

为同伦可换. 这就是上面说的将任一映射(π)换成包含映射的同伦运算. 现将两个对(X,A)和$(X\bigcup CA,X)$放在一起,即得

$$\begin{array}{ccccc} & & X & \longrightarrow X\bigcup CA \longrightarrow & (X\bigcup CA)/X=SA \\ & & {\scriptstyle id}\Big\| & \Big\updownarrow & \\ A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X/A \end{array}$$

作用以 K 函子后即可将两个正合序列连起来:

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{K}(SA) & \longrightarrow & \widetilde{K}(X\bigcup CA) & \longrightarrow & \widetilde{K}(X) \\ & & \Big\| & & \Big\| \\ \widetilde{K}(X/A) & \longrightarrow & \widetilde{K}(X) & \longrightarrow & \widetilde{K}(A), \end{array}$$

即短的 3 项正合序列延长了一项. 还有一个对(SX,SA)使 $SX/SA=S(X/A)$. 故又得两个正合序列连接起来:

$$\widetilde{K}(S(X/A)) \longrightarrow \widetilde{K}(SX) \longrightarrow \widetilde{K}(SA) \longrightarrow \widetilde{K}(X) \longrightarrow \widetilde{K}(A).$$

当然可以反复这样作:定义 n 重 suspension $S^nX=S(S^{n-1}X)$,又定义"负"的 K 群为

$$K^{-n}(X)=\widetilde{K}(S^nX),$$

即得一长正合序列:

$$\cdots\to K^{-n}(X,A)\longrightarrow K^{-n}(X)\longrightarrow K^{-n}(A)\longrightarrow K^{-n+1}(X,A)\to\cdots$$

但右方不能无限延长,它将终止于 $K(A)=K^0(A)$,而且我们不知道在$\cdots\to K(X,A)\longrightarrow K(X)\xrightarrow{i^*}K(A)$的最后一个映射 i^* 是否满射. 这一点很重要. 若 i^* 是满射,上面序列右方还可再添上 0. 而现在这样的半无限正合序列称为"Puppe"序列. 然而周期性定理还有一个更一般的表述,即是说,对任意空间 X,

$$\widetilde{K}(X)=\widetilde{K}(S^2X).$$

例如，若 $X=S^0$ 有 $S^kX=S^k$ 即 n 维球面. 因为

$$\widetilde{K}(S^0)=\mathbf{Z}, \qquad \widetilde{K}(S^1)=0,$$

所以

$$\widetilde{K}(S^k)=\begin{cases}\mathbf{Z}, & 若\ k\ 为偶;\\ 0, & 若\ k\ 为奇.\end{cases}$$

由周期性定理，对正的 n 可即用周期性来定义 K^n：

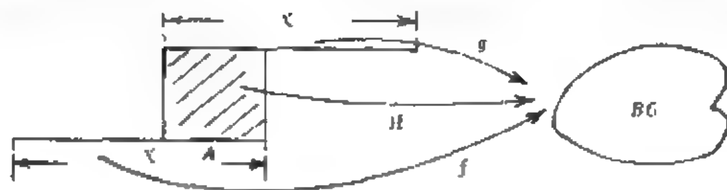
$$K^n(X)=K^{n-2k}(X),$$

这里 k 充分大. 确实，Puppe 序列可以无限地向右推而得一完整的长正合序列. 众所周知，这使得分次群 $K^*(X)=K^0(X)\oplus K^1(X)$ 成一"上同调理论". 但因我们并不需要它所以也不费力来说明这句话的意思.

现在回到差的构作. 记住，我们的问题在于，对某些对 (X,A)，映射 $K(X,A)\xrightarrow{\pi^*}K(X)$ 可能不是一对一的. 事实上，Puppe 序列

$$\cdots\longrightarrow K^{-1}(A)\xrightarrow{\delta}K(X,A)\xrightarrow{\pi^*}K(X)\longrightarrow K(A)$$

是说 $\ker\pi^*=\operatorname{Im}\delta$. 但有些特殊的情况使 π^* 成为一对一的. 再设有 X 上的丛 E 和 F，且其限制有 $E|A=F|A$. 这里的 = 自然意思是 $E|A$ 和 $F|A$ 同构. 更确切地说，令 $\varphi: E|A\longrightarrow F|A$ 为给出这个同构的丛映射. 用这些材料可以自然地作出一个新丛：令 $Y=X\bigcup\limits_A X$ 为将两个 X 沿 A 重合而得的空间. 若在这两个 X 上各给出丛 E 和 F 而在 A 上则通过 φ 把 $E|A$ 与 $F|A$ 等同起来，这样"显然"得到 Y



上的一个丛，记作 $E\bigcup\limits_\varphi E$. 我们把"显然"二字加上引号是因为，虽然思路是完全合理的，但我们没有给出细节，例如局部坐标等. 但是可以用分类映射来考虑. 若 $f,g: X\longrightarrow BG$ 分别表示 E 和 F，则

$E|A=F|A$ 正表示 $f|A\sim g|A$. 而一特定的丛映射 φ 就给出一特定的同伦 H. 在上图中，矩形可用同伦扩张性质来填满，只要给出出其项 Y 到 BG 上的映射. 这映射即丛 $E\bigcup_\varphi F$. 这称为"捏拢"(clutching) 构造.

现在有了好几个映射. 有投影 $p: Y\longrightarrow X$, 有两个包含 i_1, $i_2: X\longrightarrow Y$, 它们的商是 $Y/i_1(X)=Y/i_2(X)=X/A$. 所以，对于对 $(Y, i_1(X))$，我们有

$$\begin{array}{ccccc} K(Y,X) & \xrightarrow{\pi^*} & K(Y) & \xrightarrow{i_1^*} & K(X) \\ \| & & {\scriptstyle p^*}\nwarrow & & \updownarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ K(X/A) & & & & K(X). \end{array}$$

因为 $i_1^* p^*=\mathrm{id}$, 故 i_1^* 为满射，这还不是我们所需的 π^* 为单射. 但 Puppe 序列是函子的，在长序列

$$\begin{array}{ccccccccc} \longrightarrow K^{-1}(Y) & \xrightarrow{i_1^*} & K^{-1}(X) & \longrightarrow & K(Y,X) & \xrightarrow{\pi^*} & K(Y) & \xrightarrow{i_1^*} & K(X) \\ {\scriptstyle p^*}\nwarrow & & \updownarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & & & {\scriptstyle p^*}\nwarrow & & \updownarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ & & K^{-1}(X) & & & & & & K(X) \end{array}$$

中在 $K^{-1}(X)$ 处也有 $i_1^* p^*=\mathrm{id}$. 故 i_1^* 在 $K^{-1}(X)$ 处也是满射. 这和正合性蕴涵了 π^* 为一对一的. 事实上

$$0\longrightarrow K(Y,X)\xrightarrow{\pi^*} K(Y)\xrightarrow{i^*} K(X)\longrightarrow 0$$

是分裂正合序列(在 K^* 处也一样). 我们做了的所有的一般形式的工作最后的结果即此.

现在 Y 上有丛 $E\bigcup_\varphi F$, 故可作出类 $[p^*E, E\bigcup_\varphi F]\in K(Y)$. 因 $i_1^*(E\bigcup_\varphi F)=E$, $i_1^* p^*=\mathrm{id}$, 故有

$$i_1^*[p^*E, E\bigcup_\varphi F]=[E,E]=0.$$

故可认为 $[p^*E, E\bigcup_\varphi F]\in K(Y,X)=K(X,A)$. 这就称为 E,F 通过 φ 的差元素，记作 $d(E,F,\varphi)$.

上述构造中虽有很多意思不大的一般东西，不应该忘记 $d(E,$

F,φ)有很清楚的几何意义. 以上作法中最重要的部分显然是用"捏拢"函数 φ 作出的丛 $E\bigcup\limits_{\varphi}F$. 但在丛论中这样做不仅是自然的，而且是唯一要做的事. 丛的局部坐标的迁移函数 φ_{ij}，

$$U_i\times\mathbf{C}^n \longrightarrow E \longleftarrow U_j\times\mathbf{C}^n,$$
$$(b,v) \longleftrightarrow (b,\varphi_{ij}(b)v)$$

恰好是平凡丛 $U_i\times\mathbf{C}^n$ 和 $U_j\times\mathbf{C}^n$ 在 $U_i\bigcap U_j$ 上的捏拢函数. 所有的丛都是这样做出来的. 在此过程中，捏拢函数是本质的，所以在符号 $d(E,F,\varphi)$中要把 φ 标出来，在 $K(X,A)$中也需要它. 因为到头来我们需要的是"差"，而后来又定义 $K(X)$中的类$[E,F]$即是"差"$E-F$. 是否有 $E|A\simeq F|A$，而当有同构时，同构 $\varphi: E|A\longrightarrow F|A$ 又是什么，这都是不关重要的. $E-F$ 是形式差，它在$K(X,A)$中，而 $d(E,F,\varphi)$使我们既能领会形式的代数的方面 $p^*E-E\bigcup\limits_{\varphi}F$，又保持了捏拢函数 φ 的几何实质.

作为一个特例，令 $X=D^2, A=\partial D^2=S^1$. 于是 $Y=X\bigcup\limits_{A}X=S^2$. 令 E,F 为平凡线丛，捏拢函数 φ 为

$$S^1\times\mathbf{C}\longrightarrow S^1\times\mathbf{C},$$
$$(z,v)\longmapsto(z,zv).$$

所得的丛即 Hopf 丛 H. 所以

$$d(1,1,\varphi) = 1 - H \in \widetilde{K}(S^2).$$

大家记得 $1-H$ 是 $\widetilde{K}(S^2)$的生成元. 所以我们所作的肯定不是游戏.

记住，若 $D: C^\infty(E)\longrightarrow C^\infty(F)$是椭圆微分算子，则其象征 $\sigma(D)$可以看成一个同构

$$\sigma(D): \quad \pi^*(E)|(T^*(M)-0)\longrightarrow \pi^*F|(T^*(M)-0),$$

这里 $\pi: T^*(M)\longrightarrow M$ 是余切丛. 所以我们有差类

$$d(\pi^*E,\pi^*F,\sigma(D)) \in K(T^*(M),T^*(M)-0).$$

可以此类为算子 D 的拓扑指标的定义. 有了抽象定义后问题在于将它与数值的解析指标 $\mathrm{Ind}(D)$相比较. 这是下一节的事. 但在解

释细节之前，已经有一定理. 注意，拓扑指标只依赖于 D 的象征 $\sigma(D)$. 可能解析指标 $\operatorname{Ind}(D)$ 也是这样，但由我们迄今所作的讨论，这却不是显然的.

现以一个技术性的说明结束本节. 前面已看到函子 $K^*(X,A)$ 对于紧的 CW 对最为合用(同伦扩张与平凡化引理)，但 $(T^*(M),T^*(M)-0)$ 却不是紧的. 但这里没有问题. 可以在 $T^*(M)$ 或 $T(M)$ 上给出一个度量使 M 成为一个 Riemann 流形. 于是我们可以考虑单位球体丛 $D^*(M)\subset T^*(M)$ 与球面丛 $S^*(M)=\partial D^*(M)$. 我们知道，包含映射 $(D^*(M),S^*(M))\subset(T^*(M),T^*(M)-0)$ 是一个同伦等价，于是可以用 $(D^*(M), S^*(M))$——当 M 为紧时这是一个 CW 对——代替 $(T^*(M), T^*(M)-0)$. 最后，有时有人确实注意于 collapsing 空间

$$D^*(M)/S^*(M)\sim T^*(M)/(T^*(M)-0).$$

它称为从 $T^*(M)\longrightarrow M$ 的 Thom 空间.

§4. Todd 亏数与拓扑指标

上节所定义的拓扑指标是 $K(T^*(M),T^*(M)-0)$ 中的元素 $d(\pi^*(E),\pi^*(F),\sigma(D))$. 我们解释过，它即从 $\pi^*(E)\bigcup_{\sigma(D)}\pi^*(F)$. 我们用示性类来将它与数值的解析指标 $\operatorname{Ind}(D)$ 加以比较. 因为我们讨论的是复丛，基本的示性类是陈类：

$$c:\quad V(X)\longrightarrow H^*(X),\qquad E\longmapsto c(E)\ (E\text{ 的全陈类}).$$

但从形式的观点看来，这却不能令人满意，因为 c 不是可加的，因此不能用 $K(X)$ 来分解[另一方面，c 保持稳定等价性，因而可以用 $\tilde{K}(X)$ 来分解]. 但这不是严重的问题. 大家记得，我们确有一个由 c 导出的可加函数，即陈特征

$$\operatorname{ch}:\quad V(X)\longrightarrow H^*(X;Q).$$

回顾一下定义：将 c 形式地加以分解(利用加权)

$$c = 1 + c_1 t + \cdots + c_m t^m = \prod_{i=1}^{m}(1 + \omega_i t),$$

于是 $\mathrm{ch} = \sum_{i=1}^{m} e^{\omega_i}$.

要付出的代价是：ch 是 $H^*(X;Q)$中的有理类而不是$H^*(X;\mathbf{Z})$中的整类. 以下我们都这样理解而不加说明. 于是我们有 Abel 群的同态：

$$\mathrm{ch}: \quad K(X) \longrightarrow H^*(X).$$

若(X,A)是一个对，记住在许多场合下，相对同态$(X,A) \longrightarrow (X/A,*)$导出奇异同调群的同构：

$$H^*(X,A) \simeq \widetilde{H}^*(X/A)$$

(例如(X,A)是一 CW 对). 故在相对群上我们也有

$$\mathrm{ch}: K(X,A) = \widetilde{K}(X/A) \longrightarrow \widetilde{H}^*(X/A) = H^*(X,A).$$

事实上，ch 也可以拓展到 $K^*(X,A)$，但我们不需要这个.

用特征即可将拓扑指标变化如下：

$$\mathrm{ch}: K(T^*(M), T^*(M) - 0) \longrightarrow H^*(T^*(M), T^*(M) - 0).$$

此外，我们还有 Thom 同构(若 M 为可定向)：

$$\varphi: H^*(M) \longrightarrow H^*(T^*(M), T^*(M) - 0)$$

所以 $\varphi^{-1}\mathrm{ch}$ 引导到 $H^*(M)$上. 若$[M] \in H_n(M)$ $(n = \dim M)$，则知

$$\langle \varphi^{-1}\mathrm{ch}\, d[\pi^*(E), \pi^*(F), \sigma(D)], [M] \rangle \qquad (*)$$

是一个数(通常为有理数). 现在确实可以把它与 $\mathrm{Ind}(D)$加以比较. 因此我们愿以(*)为 D 之拓扑指标的定义，并记为$\mathrm{Ind}_t(D)$. 与此相比，在有必要时，解析指标 $\mathrm{Ind}(D)$将记作$\mathrm{Ind}_a(D)$.

但是说实在的，怎么会想到 $\mathrm{Ind}_t(D) = \mathrm{Ind}_a(D)$呢？至少有一个特例可供检验. 我们有 Hirzebruch 指标定理，它告诉我们，当 D 为 Laplace 算子时，可以用 L-亏数来计算 $\mathrm{Ind}_a(D)$. 我们可以在现在检验一下，在此情况下，(*)也就是 L-亏数. 所涉及的计算确非不足道的. 它要用到我们在第 15 章讲过的示性类这一工具，再加上重要的周期性定理. 我们就来解释它.

先要讲一些一般知识. 记住，ch 还有一个好处即它保持张量

积. $V(X)$中的张量积显然在 $K(X)$中定义一个积. 所以

$$\mathrm{ch}: \quad K(X) \longrightarrow H^*(X)$$

是环同态. 我们需要把它推广到相对群. 为此, 应用外张量积$\dot{\otimes}$更为方便. 故若 X 是 E 上之丛, F 是 Y 上之丛, $E\dot{\otimes}F$ 是 $X\times Y$ 上的丛. 若 $X=Y$, 则利用对角映射

$$\Delta: \quad X \longrightarrow X \times X$$

的拉回即可定义内张量积 $E\otimes F$, 即有 $E\otimes F=\Delta^*(E\dot{\otimes}F)$. 现令 X,Y 均有基点. 令 $X\vee Y$ 为 X 与 Y 在基点上之并, 即

$$X \vee Y = X \times (*) \cup (*) \times Y \subset X \times Y.$$

我们显然有 $\widetilde{K}(X\vee Y)=\widetilde{K}(X)\oplus\widetilde{K}(Y)$. 定义"楔"积 $X\wedge Y$ 如下:

$$X \wedge Y = (X \times Y)/(X \vee Y),$$

如通常一样, 有 Puppe 序列

$$\cdots \xrightarrow{i^*} \widetilde{K}^{-1}(X \vee Y) \longrightarrow \widetilde{K}(X \wedge Y)$$

$$\xrightarrow{\pi^*} \widetilde{K}(X \times Y) \xrightarrow{i^*} \widetilde{K}(X \vee Y).$$

然而现在还有投影

$$X\times Y \begin{array}{l} \overset{\pi_1}{\nearrow} X \\ \underset{\pi_2}{\searrow} Y. \end{array}$$

$\widetilde{K}(X\vee Y)$的元是一个对(α,β), $\alpha\in\widetilde{K}(X)$, $\beta\in\widetilde{K}(Y)$. 今定义

$$s(\alpha,\beta) = \pi_1^*\alpha + \pi_2^*\beta.$$

显然有

$$i^*s(\alpha,\beta) = i^*\pi_1^*\alpha + i^*\pi_2^*\beta = \alpha + \beta = (\alpha,\beta).$$

即 s 是 i^* 的提升(lifting). 于是 Puppe 序列可以分裂, 所以我们可以又一次把 $\widetilde{K}(X\wedge Y)$看作 $\widetilde{K}(X\times Y)$的子群, 因为 π^* 是一对一的. 若 $\alpha\in\widetilde{K}(X)$, $\beta\in\widetilde{K}(Y)$表为 $E-\dim E$, $F-\dim F$, 则 $\alpha\dot{\otimes}\beta$ 可以表为

$$E \dot{\otimes} F - E \dot{\otimes} \dim F - \dim E \dot{\otimes} F + \dim E \dot{\otimes} \dim F.$$

它是在 $\ker i^*$ 中. 所以我们可以认为 $\alpha\dot{\otimes}\beta$ 是在 $\widetilde{K}(X\wedge Y)$中. 现在设 $Y=X/A$, 则对角映射

$$\Delta: X \longrightarrow X \times X$$

诱导出对角映射

$$\Delta: X/A \longrightarrow (X \wedge X)/A.$$

所以,

$$\widetilde{K}(X) \times \widetilde{K}(X,A) \xrightarrow{\dot{\otimes}} \widetilde{K}((X \wedge X)/A) \xrightarrow{\Delta^*} \widetilde{K}(X,A)$$

定义 $K(X,A)$ 为 $K(X)$ 上之模. 类似的程序使 $K(X,A)$ 成为一环,所以它实是 $K(X)$ 上的代数.

要想利用这一切,回到差的构造. 若 E,F 是 X 上的丛,且有同构 $\varphi: E|A \longrightarrow F|A$,这也可以说成是我们实有正合序列

$$0 \longrightarrow E|A \xrightarrow{\varphi} F|A \longrightarrow 0.$$

这一点可以推广:设有丛的序列

$$0 \longrightarrow E_0 \xrightarrow{\varphi_0} E_1 \xrightarrow{\varphi_1} E_2 \longrightarrow 0 \qquad (**)$$

使得在 A 上,下面的序列是正合的:

$$0 \longrightarrow E_0|A \xrightarrow{\varphi_0} E_1|A \xrightarrow{\varphi_1} E_2|A \longrightarrow 0.$$

作 φ_1 的一个提升 $s: E_2 \longrightarrow E_1$(即有 $\varphi_1 s=1$),即有同构

$$\varphi_0 + s: \quad (E_0 \oplus E_2)|A \longrightarrow E_1|A.$$

于是可以得差 $d(E_0 \oplus E_2, E_1, \varphi_0+s)$. 它依赖于 s 的选取,但是可以证明它其实没有关系. 若记($*$)为 (E^*, φ),则记差为 $d(E^*,\varphi) \in K(X,A)$. 它比以前的定义推广在于:若用 $\pi^*: K(X,A) \longrightarrow K(X)$ 将它推到 $K(X)$ 中,我们显然有

$$\pi^* d(E^*,\varphi) = E_0 - E_1 + E_2.$$

没有理由停止在三项序列上. 所以若有 X 上的丛的序列

$$(E^*,\varphi): 0 \longrightarrow E_0 \xrightarrow{\varphi_0} E_1 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\varphi_{k-1}} E_k \longrightarrow 0,$$

且其在 $A \subset X$ 上之限制为正合,则称之为一椭圆复形. 于是有一个类 $d(E^*,\varphi) \in K(X,A)$ 使得

$$\pi^* d(E^*,\varphi) = \sum_i (-1)^i E_i.$$

今设 $\pi: E \longrightarrow M$ 是一复矢量丛. 可以定义 E 上的一个复形如下：E^* 的第 i 项可以取作

$$E_i = \pi^*(\Lambda^i E)$$

即 E 之 i 次外幂 $\Lambda^i E$ 的拉回. 关于同态

$$\varphi_i: \pi^*(\Lambda^i E) \longrightarrow \pi^*(\Lambda^{i+1} E),$$

注意 $\pi^*(\Lambda^i E)$之一点为(w,v)，$w\in E$，$v\in\Lambda^i E$ 且 $\pi(w)=\pi(v)=p$，即 $(w,v)\in E_p\times(\Lambda^i E)_p$，$p\in M$ 是某一点. 因为$(\Lambda^i E)_p=\Lambda^i E_p$，所以 $w\wedge v \in \Lambda^{i+1}E_p$ 有意义. 我们定义 $\varphi_i(w,v)=(w,w\wedge v)$. 若 $w=0$，当然对一切 i 有 $\varphi_i=0$ 而我们没有正合序列. 但是容易证明，即在 0 截口之外

$$0 \longrightarrow \pi^*(\Lambda^0 E) \xrightarrow{\varphi_0} \cdots \longrightarrow \pi^*(\Lambda^i E) \xrightarrow{\varphi_i} \pi^*(\Lambda^{i+1} E) \longrightarrow 0$$

确为正合的. 我们自然地记 $K(E,E-0)$的这个元为 $d(\pi^*(\Lambda^* E),\Lambda)$，或简记为 $\pi^*(\Lambda^* E)$. 我们再提醒一次，此元映入$K(E)$后即为元素

$$\pi^*\left(\sum_i(-1)^i\Lambda^i E\right).$$

引入 $\pi^*(\Lambda^* E)$的理由在于它对 K 理论中的周期定理给出了最一般和最方便的形式.

K 理论中的 Thom 同构定理. 对任一复矢量丛 $\pi: E\longrightarrow M$，以下的映射是一同构：

$$\psi_E: K(M) \longrightarrow K(E,E-0),$$
$$a \longmapsto \pi^*(a)\cdot d(\pi^*(\Lambda^* E)),$$

这里的 · 表示 $K(E)$和 $K(E,E-0)$的乘积.

这个定理的名称自然来自以下事实，即它与通常的$H^*(M)$中的 Thom 同构定理形状相同，而 $d(\pi^*(\Lambda^* E))$起着 Thom 类的作用. 要看出它与周期定理有关可看 $M=*$ 即一点而 E 是平凡线丛这一最简单的情况. 复形 $\pi^*(\Lambda^* E)$就是

$$\begin{array}{ccc} E\times\mathbf{C} & \longrightarrow & E\times E \\ \| & & \| \\ \pi^*(\Lambda^0 E) & & \pi^*(\Lambda^1 E) \end{array}$$

而映射 φ 为

$$\varphi(w,v) = (w, w \wedge v) = (w, wv)$$

(w,v 这时就是复数). 但是大家记得,这就给出了元 $1-H \in \widetilde{K}(S^2)$,所以我们做的是对的. 这当然不是证明,但它是 Thom 同构在平凡情况下的验证. 但是大家记得,在我们前面已有的通常的 Thom 同构定理中,平凡情况就是我们所需的一切,其余的只是 Meyer-Vietoris 序列的形式同调计算. 这就是为什么我们前面说明,周期定理的简单形式

$$\widetilde{K}(X) \longrightarrow \widetilde{K}(S^2X)$$

蕴涵了值得注意的 Puppe 序列的拓展. 因为对于函子 $K^*(X)$,同伦性质是显然的,切除(excision)性质来自定义 $K^*(X,A) = K^*(X/A)$,缺少的就只有正合序列了. 证明了它以后,求证一般的 Thom 同构定理就可以逐字重复前面的论证了. 所以 Thom 同构定理尽管形式一般,其实等价于周期定理.

Thom 同构定理的用处在于我们现在有了另一条由 K^* 到 H^* 的途径,即 $\varphi^{-1}\mathrm{ch}$ 或 $\mathrm{ch}\psi^{-1}$:

$$\begin{array}{ccc} K(T^*(M),T^*(M)-0) & \xrightarrow{\mathrm{ch}} & H^*(T^*(M),T^*(M)-0) \\ \uparrow \psi & & \uparrow \varphi \\ K(M) & \xrightarrow{\mathrm{ch}} & H^*(M) \end{array}$$

二者是否相同或者是否一个优于另一个则还不清楚. 现在就来弄清这一点. 先需一点技术性的说明. K 理论中的 Thom 同构 ψ 只对复丛有定义,而流形的余切丛 $\pi: T^*(M) \longrightarrow M$ 则是实丛. 解决的方法自然是作其复化 $\pi: T^*_{\mathbb{C}}(M) \longrightarrow M$,并作其在 $K(T^*_{\mathbb{C}}(M), T^*_{\mathbb{C}}(M)-0)$中的差 $d(\pi^*(E), \pi^*(F), \sigma(D))$(对 E,F 不需作什么,它们本来就是复丛). 从今以后我们都认为已经这样作了,并将差简记为$[\sigma(D)]$.

现在研究可换性:$\mathrm{ch} \circ \psi = \varphi \circ \mathrm{ch}$. 函数

$$V(X) \longrightarrow H^*(X), \quad E \longmapsto \varphi^{-1} \circ \mathrm{ch} \circ \psi(1),$$

$$K(X)\xrightarrow{\psi}K(E,E-0)\xrightarrow{\mathrm{ch}}H^*(E,E-0)\xrightarrow{\varphi^{-1}}H^*(X)$$

显然是函子的，因为 φ，ch，ψ 都是自然的．故由定义，$\varphi^{-1}\circ \mathrm{ch}\circ \psi[1]$是示性类．记之为 $\mu(E)$．由基本的构造定理，我们知道，复丛的任意示性类都是陈类的多项式函数($H^*(BU(m))=Q[c_1,c_2,\cdots,c_m]$)．能不能算出多项式 $\mu(E)$？为做这件事，取 E 为万有丛 $E\longrightarrow BU(m)=X$．

考虑以下图式：

$$\begin{array}{ccccc}
K(E,E-0) & \xrightarrow{j^*} & K(E) & \xrightarrow{i^*} & K(X)\\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{ch}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ch}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ch}}\\
H^*(E,E-0) & \xrightarrow{j^*} & H^*(E) & \xrightarrow{i^*} & H^*(X)\\
 & \nwarrow{\scriptstyle\varphi} & & \nearrow{\scriptstyle\chi} & \\
 & & H^*(X) & &
\end{array}$$

$j:E\longrightarrow E/(E-0)$是投影而 $i:X\longrightarrow E$ 是零截口．记住对于 Thom 同构 φ，$i^*j^*\varphi(\mu)=\mu\circ\chi$ 即 Euler 类 χ 的乘法．因为

$$\mu=\varphi^{-1}\circ \mathrm{ch}\circ\psi(1)$$

即有

$$i^*j^*\varphi(\mu)=i^*j^*\mathrm{ch}\psi(1)=\mathrm{ch}(i^*j^*\psi(1)),$$

亦即

$$\mu\circ\chi=\mathrm{ch}(i^*j^*\psi(1)).$$

记住

$$\psi(1)=d(\pi^*(\Lambda^*E)),$$

而在用 j^* 推到 $K(E)$中以后有

$$j^*d\pi^*(\Lambda^*E)=\pi^*\sum_i(-1)^i\Lambda^iE.$$

因为 π 和 i 互为同伦逆，故有

$$\mathrm{ch}(i^*j^*\psi(1))=\mathrm{ch}(\sum_i(-1)^i\Lambda^iE)$$

容易用权来表示此数．若 V 是一 $U(m)$-模而权为 $\omega_1,\cdots,\omega_m$，即有

$V|T^m = \sum_i V_i$, $\dim V_i = 1$，而 T^m 在 V_i 上的作用即乘以 ω_i. 令 e_i 为 V_i 的基底，我们知道 $\Lambda^i V$ 有一组基底 $e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_i}$, $k_1 < k_2 < \cdots < k_i$. 所以 $\Lambda^i V$ 有权

$$\omega_{k_1} \cdots \omega_{k_i}, \quad k_1 < k_2 < \cdots < k_i.$$

再考虑到符号 $(-1)^i$，可得

$$\mathrm{ch}\left(\sum_i (-1)^i \Lambda^i E\right) = \prod_i (1 - e^{\omega_i}).$$

再回忆到，若用权来表示，有

$$\sum_i c_i t^i = \prod_i (1 + \omega_i t),$$

故得 Euler 示性类为

$$\chi = \prod_i \omega_i = c_m.$$

故得下面的公式

$$\mu \cdot \prod_i \omega_i = \prod_i (1 - e^{\omega_i}).$$

我们是在 $H^*(BU(m))$ 中讨论，而它是整环. 因此乘以 χ 的运算是一对一的，故上面的公式说明 μ 是方程

$$\mu \cdot \chi = \prod_i (1 - e^{\omega_i})$$

的唯一解. 我们显然可以将此解写为

$$\mu = \frac{\prod_i (1 - e^{\omega_i})}{\chi} = \prod_i \left(\frac{1 - e^{\omega_i}}{\omega_i} \right). \qquad (*)$$

这个公式是可以实际计算的. 上式右方由其形式显然是 $\omega_1, \cdots, \omega_m$ 的对称函数，若将它展开并用 ω_i 的初等对称函数来表示，即得 $\mathscr{T}$ 用陈类 c_1, c_2, $\cdots$, c_m 的多项式表达式. 例如有

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_1 = \frac{1}{2} c_1, \quad \mu_2 = -\frac{1}{12} c_2 + \frac{1}{6} c_1^2, \cdots$$

这样我们知道，K^* 理论和 H^* 理论中的 Thom 同构 ψ 和 φ 与示性函数 ch 是不可交换的. 但是我们也找到了二者之差别 $\varphi^{-1} \circ \mathrm{ch} \circ \psi$，它就是 μ 类. 我们要把这一点也放进拓扑指标 $[\sigma(D)]$ 中去.

由于技术上的原因，我们不用 μ 类而将用其逆 Todd 类 $\mathscr{T}$，它就是

$$\mathscr{T}=\prod_i \frac{\omega_i}{1-e^{\omega_i}}.$$

对一给定的流形 M，我们定义其 Todd 类 $\mathscr{T}(M)$ 为 M 的复化切丛 $T_C(M)$ 的 Todd 类 $\mathscr{T}(T_C(M))$. 有了这一些，我们即可形式地定义：紧定向流形 M 上的复丛 E 和 F 上的椭圆微分算子 D：$C^\infty(E)\longrightarrow C^\infty(F)$ 的拓扑指标 $\mathrm{Ind}_t(D)$ 为

$$\mathrm{Ind}_t(D)=\langle\varphi^{-1}\mathrm{ch}[\sigma(D)]\mathscr{T}(M),[M]\rangle,$$

即在暂时规定的定义（*）中加上一个"校正"因子 $\mathscr{T}(M)$. 有很自然的理由解释为什么要加上它，但这里不可能来讲. 反之，我们要看一下它在一些计算中起什么作用.

记住对于复丛 $E\xrightarrow{\pi}X$，有

$$\mu(E)=\varphi^{-1}\circ\mathrm{ch}\circ\varphi(1)=\varphi^{-1}\circ\mathrm{ch}\circ d[\pi^*(\Lambda^*E),\Lambda]$$

这样，在 Ind_t 和 μ 的计算中都有

$$\varphi^{-1}\circ\mathrm{ch}(u)=\alpha.$$

$u\in K(E,E-0)$ 是"差异"类. 我们适才作的计算的基本思想是：用 j^* 把它推入 $K(E)$ 中. 其好处是，在相对群 $K(E,A)$ 中，差元 u 只依赖于捏拢函数 φ，

$$0\longrightarrow E_0|A\xrightarrow{\varphi_0}E_1|A\longrightarrow\cdots\xrightarrow{\varphi_{k-1}}E_k|A\longrightarrow 0,$$

这使得不容易得到 $\mathrm{ch}(u)$. 但是在 $K(E)$ 中它是"未耦合"的. 它就是在 $K(E)=K(X)$ 中的形式差 $\sum_i(-1)^iE_i$，所以 $\mathrm{ch}\,j^*(u)$ 容易计算. 要付出的代价是，我们得到的并非 α 而是

$$\mathrm{ch}(j^*(u))=\alpha\cdot\chi(E)\qquad(*)$$

即 α 乘以 Euler 类 $\chi(E)$. 幸好在 μ 的情况下我们是在分类空间 $X=BU(m)$ 中讨论，从而 $\chi(E)\in H^*(X)$ 不是零因子，所以上式可以决定 α. 在计算 $\varphi^{-1}\circ\mathrm{ch}[\sigma(D)]$ 时，我们讨论的是丛 $T_C(M)\longrightarrow M$. 上面的（*）式现在将给出

$$\mathrm{ch}\circ(j^*[\sigma(D)])=\alpha\cdot\chi(T^*(M)).$$

若给 $T(M)$ 一个 Riemann 度量，将有 $T(M)\simeq T^*(M)$，故 $\chi(T^*(M))=\chi(T(M))=\chi(M)$ 即流形 M 的 Euler 类．另一方面 $j^*[\sigma(D)]=E-F$ 是由丛 E 和 F 决定的，而 $D: C^\infty(E)\longrightarrow C^\infty(F)$即定义其上．因为 ch 可加，我们有

$$a\cdot\chi(M)=\mathrm{ch}(E)-\mathrm{ch}(F).$$

在好的情况下，这也将确定出

$$a=\varphi^{-1}\circ\mathrm{ch}[\sigma(D)].$$

当 D 是一万有算子 $\tilde{D}: C^\infty(\tilde{E})\longrightarrow C^\infty(\tilde{F})$ 的拉回时，就是一个好的情况，这里 $\tilde{E}\longrightarrow BU(m)$，$\tilde{F}\longrightarrow BU(m)$ 是万有丛，就是说，这时有一分类映射 $f: M\longrightarrow BU(m)$ 使得 $E=f^*(\tilde{E})$，$F=f^*(\tilde{F})$ 而 $\tilde{D}=f^*(D)$（以自然的方式定义：$\tilde{D}\varphi=D(\varphi\circ f)$）．于是元素

$$\tilde{a}=\varphi\circ\mathrm{ch}[\sigma(\tilde{D})]$$

将满足

$$\tilde{a}\cdot\chi=\mathrm{ch}\tilde{E}-\mathrm{ch}\tilde{F}.$$

因为 $\chi\in H^*(BU(m))$ 不是零因子，故

$$\tilde{a}=\frac{\mathrm{ch}\tilde{E}-\mathrm{ch}\tilde{F}}{\chi}$$

定义在 $H^*(BU(m))$ 上．于是我们有

$$a=f^*(\tilde{a}).$$

它可形式地写成

$$a=\varphi^{-1}\mathrm{ch}[\sigma(D)]=\frac{\mathrm{ch}E-\mathrm{ch}F}{\chi(M)}.$$

注意当上式合法时 a 没有用算子 D 作任何事情，而仅仅依赖于丛 E 和 F，在它们上面我们定义了算子 D.

一个这样的例子是 Laplace 算子 Δ，取一个足够大的 Grassmann 流形，$BU(m)$ 是一个紧流形，从而有一个万有的 Laplace 算子 $\tilde{\Delta}$存在．记得在此情形（第十七章），我们将外代数

$$\Lambda^*(T_c^*(M))=\Lambda^+\oplus\Lambda^-$$

分裂为两个丛 Λ^+ 和 Λ^-，其中 Λ^+ 是从星算子 $*$ 导出的算子 $\alpha=$

$i^{p(p-1)+m}*$ 的本征空间. $\Lambda^{\pm}=\{w|\alpha(w)=\pm w\}$. 因此我们有 $E=\Lambda^{+}$ 和 $F=\Lambda^{-}$，并且我们恰需要 Λ^{+} 和 Λ^{-} 的权. 设 $(\pm y_1, \cdots, \pm y_m)$ 是实丛 $T^{*}(M)$ 的实权，我们有

引理 $\quad \mathrm{ch}\Lambda^{+}-\mathrm{ch}\Lambda^{-}=\prod(\mathrm{e}^{y_i}-\mathrm{e}^{-y_i})$.

证 对 Riemann 流形 M^{2m} 的切丛 $\tau(M)$，其群为自然作用在 $\mathbf{R}^{2m}$ 上的 $SO(2m)$ 对于 $T\subset SO(2m)$ 的限制，其中若记 $\mathbf{R}^{2m}=\mathbf{R}^2\oplus\cdots\oplus\mathbf{R}^2$. 则 T 在 $\mathbf{R}^2$ 上的作用为具权 $(\pm y_i)$ 的旋转. 因为 $\Lambda^{*}(\mathbf{R}^{2m})=\bigotimes\Lambda^{*}(\mathbf{R}^2)$. 只需考虑 $\Lambda^{*}(\mathbf{R}^2)$ 即可. 若 (e_1, e_2) 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个通常的基底，我们有

$$*e_1=e_2, \quad *e_2=-e_1.$$

所以 Λ^{+} 有一基底 $(1+\mathrm{i}(e_1\wedge e_2), e_1+\mathrm{i}e_2)$，其权为 $(0, y)$. Λ^{-} 有一基底 $(1-\mathrm{i}(e_1\wedge e_2), e_1-\mathrm{i}e_2)$，其权为 $(0, -y)$. 故

$$\mathrm{ch}(\Lambda^{+})-\mathrm{ch}(\Lambda^{-})=1-1+\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{-y}=\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{-y}.$$

引理得证.

继续来作计算. 因为 Euler 类为 $\chi(M)=\prod_i y_i$，故

$$\alpha=\prod_{i=1}^{m}\frac{\mathrm{e}^{y_i}-\mathrm{e}^{-y_i}}{y_i}.$$

另一方面，复化切丛 $T_C(M)$ 之权为 $(y_1, \cdots, y_m, -y_1, \cdots, -y_m)$，所以 Todd 类 $\mathscr{T}(M)$ 由下式给出：

$$\mathscr{T}(M)=\prod_{i=1}^{m}\frac{y_i}{1-\mathrm{e}^{y_i}}\cdot\frac{-y_i}{1-\mathrm{e}^{-y_i}}.$$

由此可得

$$\alpha\mathscr{T}(M)=\prod_{i=1}^{m}(-y_i)\frac{\mathrm{e}^{y_i}-\mathrm{e}^{-y_i}}{(1-\mathrm{e}^{y_i})(1-\mathrm{e}^{-y_i})}.$$

因为

$$\frac{A-A^{-1}}{(1-A)(1-A^{-1})}=\frac{A^2-1}{(1-A)(A-1)}=\frac{1+A}{1-A}$$
$$=-\frac{A^{1/2}+A^{-1/2}}{A^{1/2}-A^{-1/2}}.$$

所以

$$\prod_i(-y_i)\cdot\frac{e^{y_i}-e^{-y_i}}{(1-e^{y_i})(1-e^{-y_i})}=\prod_i y_i\frac{\cosh(y_i/2)}{\sinh(y_i/2)}.$$

用 $2y_i$ 代替 y_i 可知，除了一个数值因子外，上式等于

$$\prod_i y_i/\tanh(y_i).$$

但这就是 M 的 L-亏数（见第十六章）. 所以指标定理

$$\mathrm{Ind}_t(D)=\mathrm{Ind}_a(D)$$

至少对于 Laplace 算子已得验证.

§ 5. Atiyah-Singer 指标定理

一般的指标定理当然可以陈述如下：对于椭圆微分算子 D，有 $\mathrm{Ind}_t(D)=\mathrm{Ind}_a(D)$. 在这里给出其证明当然办不到. 但是可以概要地指出证明的思路. 这样做当然也多少有些重要性，因为在定理的证明现时已有不止一种途径. 所以我们以简要的说明作为这本书的结束，希望对于有心研究证明的读者有所助益.

指标定理最重要的特例当然是对于 Laplace 算子的 Hirzebruch 定理. 大家记得，其证明依靠了协边理论. 首先是把解析指标 $\mathrm{Ind}_a(\Delta)$理解为上积（cup-product）双线性型. 所以它是一个协边不变量. 因为协边环 $\Omega\otimes\alpha$ 的构造已知，我们知道 $\mathrm{Ind}_a(\Delta)$ 必可用示性类来表示. 于是 L-亏数的特殊公式也就是在 $\Omega\otimes\alpha$ 上找一个环同态，使在生成元 $[\mathrm{CP}^{2n}]$ 上取值为 1. 一般指标定理的原证就是由推广协边思想而得的. 公式

$$\langle\varphi^{-1}\circ\mathrm{ch}(u)\circ\mathscr{T}(M),[M]\rangle$$

对任意元 $u\in K(T^*(M),T^*(M)-0)$ 都是有意义的，不论 u 是否一个算子的象征. 所以 Ind_t 是 $K(T^*(M),T^*(M)-0)$ 上的一个函数. 此外，因为 $K(T^*(M),T^*(M)-0)$ 是 $K(M)$ 上的一个模，可以定义

$$\mathrm{Ind}_t(M,V)=\mathrm{Ind}_t(V,[\sigma(\Delta_M)]),$$

这里 $V\in K(M)$ 而 Δ_M 是 M 上的 Laplace 算子. 函数 Ind_t 有一些自

然的性质．例如，

(1)　$\mathrm{Ind}_t(M+v, V+W)=\mathrm{Ind}_t(M, V)+\mathrm{Ind}_t(v, w)$，这里“+”表示分离并．

(2)　$\mathrm{Ind}_t(M, V\oplus W)=\mathrm{Ind}_t(M, V)+\mathrm{Ind}_t(M, W)$，这里$\oplus$是$K(M)$中的加法．

(3)　$\mathrm{Ind}_t(M\times N, V\hat{\otimes}W)=\mathrm{Ind}_t(M, V)\cdot\mathrm{Ind}_t(N, W)$．

但最重要的是，Ind_t 有协边性质．我们现在处理的对象是 (M, V)，M 是一流形而 V 是 M 上的复矢量丛．我们说 $(M, V)\sim(N, W)$，如果存在一个流形 K 使 $\partial K=M\cup N$，而且存在一个 K 上的丛 P 使得 $P|M=V$，$P|N=W$．所得的协边环可以记作$\Omega(BU)$而我们有

(4)　$\mathrm{Ind}_t(M, V)=0$，若在 $\Omega(BU)$ 中 $[M, V]=0$．

事实是我们对于 $\Omega(BU)$的构造多少有所知(至少是对$\Omega(BU)\otimes Q$ 的构造多少有所知)．它是一个多项式环而有生成元 $[\mathbf{CP}^{2n}, 1]$ 与 $[S^{2n}, \alpha_n]$，这里 $\alpha_n\in\tilde{K}(S^{2n})=\mathbf{Z}$ 是一生成元．现在我们可以算出

$$\mathrm{Ind}_t[\mathbf{CP}^{2n}, 1]=1$$

而

$$\mathrm{Ind}_t[S^{2n}, \alpha_n]=2^n.$$

这样函数 Ind_t 完全确定．要想证明指标定理，只需证明 Ind_a 也有这些性质即可．有以下诸点要注意．首先必须证明 Ind_a 是 $K(X)$ 上的一个函数．这意味着

(1)　$[\sigma(D)]=[\sigma(D_1)]\Rightarrow\mathrm{Ind}_a(D)=\mathrm{Ind}_a(D_1)$，这一点前面已经讲到了．

(2)　任一个 $u\in K(T^*(M), T^*(M)-0)$ 都是某个算子 D 的象征 $[\sigma(D)]$．如果我们仅限于微分算子这就不一定对的，但是对于更大的一类算子——拟微分算子（见 [3]），这是成立的．

然后可以一点一点地来证明 Ind_a 具有所需要的性质．但具体

的工作是相当艰巨的．[2] 是标准的参考文献．

以上有一点特殊的东西即 $\Omega(BU)\otimes Q$ 的构造定理．Atiyah 和 Singer 在 1974 年一组文章中给出了一个不同协边理论的新证明．基本的工具是 K 理论．回顾一下 Thom-Pontrjagin 构造．设 $M\subset N$ 是一个嵌入，而 V 是 M 的一个管状邻域．于是 $V\longrightarrow M$ 是一个（实）矢量丛，而我们有以下的图式：

$$H^*(M)\xrightarrow{\varphi=\text{Thom 同构}}H^*(V,V-0)\overset{\text{切除}}{\cong}H^*(N,N-0)\xrightarrow{j^*}H^*(N)$$

（下方由 $H^*(M)$ 到 $H^*(N)$ 的箭头记为 $i!$）

它定义了“错误途径（wrong way）”映射 $i!$，它是由包含映射 $i: M\longrightarrow N$ 诱导而得的．因为我们有 K 理论中的 Thom 同构 ψ，所以也可以在 K 理论中来做上面的事．但是有一个漏洞．$\psi: K(M)\xrightarrow{\sim}K(E,E-0)$ 只对复丛 $E\longrightarrow M$ 有定义，但 V 却是实的．但若把一切都提升到切丛水平上来，$TM\subset TN$ 是一个子流形．它的管状邻域 $W: TM\subset W\subset TN$ 有自然的复构造．事实上，$W=\pi^*(V\otimes\mathbf{C})$（$\pi: TM\longrightarrow M$ 是投影）本质上就是 V 的复化．然后我们就可以照抄上面的定义：

（上方由 $K(T(M),T(M)-0)$ 到 $K(TN,TN-0)$ 的箭头记为 $i!$）

$$K(T(M),T(M)-0)\longrightarrow K(W,W-0)\xrightarrow{\sim}K(TN,TN-TW)\rightarrow K(TN,TN-0)$$

这里 ψ 是 K 中的相对 Thom 同构．若 M 等于一点 $*\subset N=\mathbf{R}^n$，则可以取 $W=TN$ 而使 $i_!=\psi$ 是一同构．记此包含 $i: M=*\subset N=\mathbf{R}^n$ 为 j: $i=j: *\longrightarrow\mathbf{R}^n$．将 M 嵌入在一个具有较大的 n 的 $\mathbf{R}^n$ 中，我们有

$$K(TM,TM-0)\xrightarrow{i!}K(T\mathbf{R}^n,T\mathbf{R}^n-0)\xleftarrow{j!}K(T*,T*-0)$$
$$\|$$
$$K(*)=\mathbf{Z}.$$

这就定义了拓扑指标

$$\mathrm{Ind}_t = j!^{-1} \circ i!.$$

有此定义后，自然要求，若 $k: M \subset N$ 是一包含映射，应有

$$(\mathrm{Ind}_t^M) \circ k! = \mathrm{Ind}_t^N.$$

这正是一个基本事实，它蕴涵了唯一性而不必用到协边理论．若将此定义转译到 H^* 理论中去，则 Todd 类作为一个因子出现也变得很清楚了．

参 考 文 献

[1] Atiyah, M. F. and I. M. Singer, The index of elliptic operators, I, *Ann. of Math.*, 87 (1968), 484—530; Ⅲ, *Ann. of Math.*, 87 (1968), 546—604.

[2] Palais, R. S. (ed). Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem, *Ann. of Math. Studies*, No. 57 (1965), Princeton Univ. Press, Princeton, N. J.

[3] 齐民友，《线性偏微分算子引论》，上 (1986)，北京，科学出版社．

第二十章　曲率和相关问题

§1. 曲　率

我们前面说过，这本书的写法是选定一个主题，然后一步一步地把所有为解释主题所需的材料加以展开．在本书中选定的主题就是 Atiyah-Singer 指标定理，这在上一章讲了．按这个写法来看，可以说这本书已经完成了．然而我们还想再加一个主题以供讨论，这就是曲率的概念．理由有两层．首先是，我们都知道，曲率的概念在微分几何是基本的．但是它还和我们讲过的许多其它东西有联系．所以也值得讲一讲这种联系．此外，为了讲这些东西所需的工具绝大部分在本书中已经具备了，不去利用它确有不妥．更确切些说，我们要说明，曲率概念通过 de Rham 定理提供了陈类的另一个定义．然后再看这怎样导致著名的 Gauss-Bonnet 定理．最后我们还要提到曲率概念有助于提出数学物理中所谓的 Yang（杨振宁）-Mills 规范场理论．

因为曲率这词表示一个东西是怎样“弯曲”的，所以它确是一个几何概念．用更多行话来说，应该说它不是拓扑概念．归根结蒂，每一本初等的拓扑教科书都强调，拓扑学的对象应该允许用同胚去“扭曲”、“拉伸”，只要不把东西“弄破”．所以，几何必然比拓扑多一些东西，要从拓扑学进到几何学，还必须引入附加的构造．在第十六章中，这个构造是用“联络”来表述的．回顾一下这是怎样做的．设 M 是一微分流形．给定了一个矢量场 X 和一个光滑函数 f，可以作方向导数 $X(f)$．流形的作用尽在于此．然而要想进一步求一向量场可在 X 方向的方向导数 $X(Y)$，这虽然似乎是最自然的

推广，却无法以任何自然的、自动的方式来完成. 做这件事唯一的方法是要求它适合一个合理的然而是任意的公理系统. 所以联络或称为协变导数 $D_X(Y)$ 要用公理来定义. 所以它确是一个附加的构造. 有了它就可以研究微分几何了. 这种作法虽然是合理的，却对于曲率以及我们熟悉的任何一个几何概念什么也没有说. 这种现代的抽象作法为什么好以及好在哪里，这是首先要做的事. 因此要回到 Gauss 和他的著名的"绝妙定理"(Theorem Ergregium). 从根本上说它有些象 Poincaré 的同调概念(当然历史上 Poincaré 要晚得多，所以我们又是把事情在时间顺序上倒过来了). 大家记得"同调"是为了在拓扑空间中找"洞"用的，所以若此空间在 $\mathbb{R}^3$ 中而可以"看"得见，这就没有什么可谈了. Poincaré 的思想之不朽在于即令这空间根本"看"不见，洞仍有内蕴的意义. 类似于此，在你看得见的曲面上，曲率概念是显然的. 如果我们看着一只船消失在地平线上，我们终于就知道了曲率概念. 但是若一只臭虫对于三维空间 $\mathbb{R}^3$ 一无所知它也能发现地球是弯曲的吗? Gauss 的绝妙定理说，如果这臭虫微分几何学得很好，它就会发现，因为他通过计算 $D_X(Y)$ 得知地球上的测地线最后会回到其起点，而这在平面上是不可能的. 如果说这是人类历史上最惊人的发现之一，这可不是笑话. 直到今天，人们讲到 Einstein 相对论中的"弯曲"时空时，总还不太自然，就是说，"看不见"的曲率这一概念可不容易吞下去.

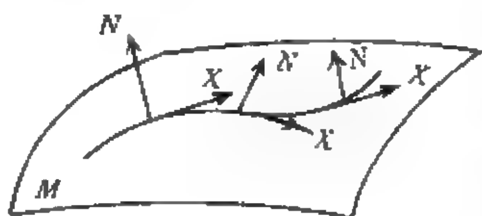
Gauss 的结果来自他对 $\mathbb{R}^3$ 中曲面的研究. 所以取一个二维子流形 $M\subset\mathbb{R}^3$. 给定一点 $P\in M$，M 在 P 处的切空间 $T_P(M)$ 是 $T_P(\mathbb{R}^3)$ 的二维子空间: $T_P(M)\subset T_P(\mathbb{R}^3)=\mathbb{R}^3$. 故可取 $\mathbb{R}^3$ 之一向量 N_P 使之张成 $T_P(M)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中的正交补 $T_P(M)^\perp$，即 N_P 是法向量. N_P 之符号尚未确定. 更确定些说，设 M 是可定向的. 对 $\mathbb{R}^3$ 也给以通常的定向. 于是可以唯一地取一 N_P 使 $T_P(M)$ 之定向后再附以 N_P 将得出与 $\mathbb{R}^3$ 相同的定向. 这就是外法线方向. 最后，给 N_P 以单位长，即有定义于 M 上的单位法向量场 $P\longrightarrow N_P$，记为 $N: P\longrightarrow N_P$.

令 X 为 M 上一个向量场，这就可以讨论 N 在 X 方向的方向

导数 $D_X(N)$. 注意，这里面并没有什么奇妙的东西，我们只不过是在 $\mathbf{R}^3$ 中作通常的向量计算. $\mathbf{R}^3$ 上的向量场（不论是否切于 M）只不过是向量值函数. 故若 $N=(N_1,N_2,N_3)$, $X=(X_1,X_2,X_3)$，则有

$$D_X(N)_P = \sum_{i=1}^{3} X_i(P)\left(\frac{\partial N}{\partial x_i}\right)_P.$$

导数 $D_X(N)$ 是曲率的一种度量，因为它描述了法向量在 M 上沿 X 方向运动时 N 的变化率（见左图）. 更准确些说，$|D_X(N)|/|X|$ 就是 X 方向的曲率. 这一点可以作得更漂亮一些如下.



记住，$\mathbf{R}^3$ 中的导数有以下的不变性质：

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle D_X(Y),Z\rangle + \langle Y,D_X(Z)\rangle.$$

将此式用于方程

$$\langle N,N\rangle = 1$$

就给出

$$2\langle D_X(N),N\rangle = 0.$$

换言之，$D_X(N)$ 恒切于 M. 故对应关系 $X \longrightarrow D_X(N)$ 定义了 $T_P(M)$ 上的一个变换（显然是线性的），记作 L（或 L_P）. 最好的情况是 $L(X)=D_X(N)=\lambda X$，即与 X 成比例而 X 成为 L 的固有向量. 固有值 λ 是有符号的曲率. 既然讨论的是线性变换，这里就没有什么大的困难. 在二维空间中，L 有二次的特征方程

$$L^2 - 2HL + K = 0, \qquad H,K \in \mathbf{R}.$$

在复域中对它作因式分解：

$$(L-\lambda_1)(L-\lambda_2) = 0,$$

即得固有值 λ_1,λ_2. 它们通常是复的. 但在我们的情况下可以说得更确定一些，即可证 L 是自伴的. 所以 λ_1,λ_2 均为实数. 相应的固有向量 X_1,X_2 将张成 $T_P(M)$，称为主方向，而 λ_1,λ_2 称为主曲率. $H=(1/2)(\lambda_1+\lambda_2)$ 称为平均曲率，$K=\lambda_1\lambda_2=\det(L)$ 称为 Gauss 曲率

或全曲率. L 为自伴易证. 由 $\langle N, Y\rangle=0$ 有

$$0 = X\langle N, Y\rangle = \langle L(X), Y\rangle + \langle N, D_X(Y)\rangle,$$

同理

$$0 = Y\langle N, X\rangle = \langle L(Y), X\rangle + \langle N, D_Y(X)\rangle.$$

所以

$$\langle L(X), Y\rangle - \langle X, L(Y)\rangle = \langle N, D_Y(X) - D_X(Y)\rangle.$$

但由定义

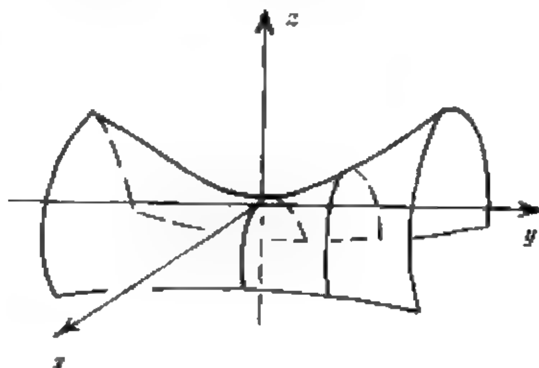
$$D_Y(X) - D_X(Y) = -[X, Y]$$

即 Poisson 括弧，而因为 $[X,Y]\in T_P(M)$，故有 $\langle N, D_Y(X)-D_X(Y)\rangle=0$. 所以 $\langle L(X), Y\rangle=\langle X, L(Y)\rangle$.

这样，由很初等的分析就得出了曲面局部几何的很好的图景. 在每一点 P，切空间 $T_P(M)$ 都选出了两个特别的方向. 在这些方向的积分曲线上，法向量的变化与曲线平行. 若固有值 λ_1 和 λ_2 相异，主方向 X_1 与 X_2 必互相正交(这可由算子的自伴性而知:

$$\langle L(X_1), X_2\rangle = \lambda_1\langle X_1, X_2\rangle = \langle X_1, L(X_2)\rangle = \lambda_2\langle X_1, X_2\rangle).$$

若 $\lambda_1=\lambda_2$ 则 $T_P(M)$ 的每一个方向 X 都是主方向，这时 $L=\lambda$. 即乘以标量 λ 的乘法算子，所以这时各个方向都一样而没有必要区分出什么方向为“主”方向. 这种点 P 称为“脐”点. 例如平面上每一点都是脐点($\lambda=0$)，球面上点也都是脐点($\lambda=1/$半径). 另一方面“马鞍面”$z=y^2-x^2$ 在原点处有两个主方向，即 x 轴($\lambda_1=1$)和 y 轴($\lambda_2=-1$). 这些都是简单而又熟知的例子.



可以用坐标来进行一般的计算. 设 $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow M$ 是 M 在一点 $P\in M$ 附近的局部坐标. 记 $\mathbb{R}^2$ 的坐标为 (u,v) 并把 f 看作是由 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的映射. 我们采用标准的记号 $f_u=\dfrac{\partial f}{\partial u}$, $f_v=\dfrac{\partial f}{\partial v}$ 等等. 于是 $X=f_u$

和 $Y=f_v$ 是 $T_p(M)$ 的基底. 于是单位法向量场是

$$N=(X\times Y)/|X\times Y|,$$

$X\times Y$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的向量积, 也就是外积 $X\wedge Y$. 令

$$E=|X|^2=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial f^i}{\partial u}\right)^2,$$

$$F=\langle X,Y\rangle=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial f^i}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial f^i}{\partial v}\right),$$

$$G=|Y|^2=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial f^i}{\partial v}\right)^2.$$

$|X\times Y|$ 是以 X 和 Y 为边的平行四边形的面积, 因为 $\langle X,Y\rangle=|X||Y|\cos\theta$, 故有

$$|X\times Y|^2=|X|^2|Y|^2\sin^2\theta=|X|^2|Y|^2-\langle X,Y\rangle^2$$
$$=EG-F^2.$$

因为 $\langle N,X\rangle=0$. 双方作用以 D_X 即有 $\langle D_X(N),X\rangle+\langle N,D_X(X)\rangle=0$, 故

$$\langle L(X),X\rangle=\langle D_X(N),X\rangle=-\langle N,D_X(X)\rangle$$
$$=-\langle X\times Y,D_X(X)\rangle/\sqrt{EG-F^2}.$$

对于 $\mathbf{R}^3$ 中的三个行向量 A,B,C, 我们有

$$\langle A,B\times C\rangle=\det\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix},$$

又由于

$$D_X=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f^i}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial u},$$

所以

$$\langle D_X(X),X\times Y\rangle=\det\begin{pmatrix}f_{uu}\\f_u\\f_v\end{pmatrix}.$$

如果 $\{X,Y\}$ 是就范正交基底, 就会有

$$\det L = \langle L(X), X\rangle\langle L(Y), Y\rangle - \langle L(X), Y\rangle\langle L(Y), X\rangle.$$

但现在 $X=f_u, Y=f_v$ 并非就范正交，这时作简单的计算可以得出

$$\det L = \frac{\langle L(X), X\rangle\langle L(Y), Y\rangle - \langle L(X), Y\rangle\langle L(Y), X\rangle}{\langle X, X\rangle\langle Y, Y\rangle - \langle X, Y\rangle^2}.$$

作了这些计算以后，可得知 Gauss 曲率 K 适合

$$\begin{aligned}(EG-F^2)\cdot K &= [|X|^2|Y|^2-\langle X, Y\rangle]\det L \\ &= \det\begin{pmatrix} f_{uu} \\ f_u \\ f_v \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} f_{vv} \\ f_u \\ f_v \end{pmatrix} - \left[\det\begin{pmatrix} f_{uv} \\ f_u \\ f_v \end{pmatrix}\right]^2. \qquad (*)\end{aligned}$$

在每一本讲曲面微分几何的教本上都可以找到这个公式. 然而它除了作为计算工具外，还有更深的含义. 再多算一下就可以看出来. 每个矩阵 P 与其转置矩阵有相同的行列式：$\det P = \det P^t$，所以，例如就有

$$\det\begin{pmatrix} f_{uu} \\ f_u \\ f_v \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} f_{vv} \\ f_u \\ f_v \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} f_{uu} \\ f_u \\ f_v \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} f_{vv} \\ f_u \\ f_v \end{pmatrix}^t = \det\begin{pmatrix} f_{uu} \\ f_u \\ f_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{vv} \\ f_u \\ f_v \end{pmatrix}^t.$$

但是很容易看到

$$\begin{pmatrix} f_{uu} \\ f_u \\ f_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{vv} \\ f_u \\ f_v \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \langle f_{uu}, f_{vv}\rangle & \langle f_{uu}, f_u\rangle & \langle f_{uu}, f_v\rangle \\ \langle f_u, f_{vv}\rangle & E & F \\ \langle f_v, f_{vv}\rangle & F & G \end{pmatrix}.$$

这样就可以把(*)重写为

$$\begin{aligned}(EG-F^2)K = \det&\begin{pmatrix} \langle f_{uu}, f_{vv}\rangle & \langle f_{uu}, f_u\rangle & \langle f_{uu}, f_v\rangle \\ \langle f_u, f_{vv}\rangle & E & F \\ \langle f_v, f_{vv}\rangle & F & G \end{pmatrix} \\ &- \det\begin{pmatrix} \langle f_{uv}, f_{uv}\rangle & \langle f_{uv}, f_u\rangle & \langle f_{uv}, f_v\rangle \\ \langle f_u, f_{uv}\rangle & E & F \\ \langle f_v, f_{uv}\rangle & F & G \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

将两个行列式各按第一列展开，再经过重新组合，就可以得到

$$(EG-F^2)K=\det\begin{pmatrix}\langle f_{uu},f_{vv}\rangle-|f_{uv}|^2 & \langle f_{uu},f_u\rangle & \langle f_{uu},f_v\rangle\\ \langle f_u,f_{vv}\rangle & E & F\\ \langle f_v,f_{vv}\rangle & F & G\end{pmatrix}$$

$$-\det\begin{pmatrix}0 & \langle f_u,f_{uv}\rangle & \langle f_v,f_{uv}\rangle\\ \langle f_u,f_{uv}\rangle & E & F\\ \langle f_v,f_{uv}\rangle & F & G\end{pmatrix}\qquad(**)$$

但由 E,F,G 的定义有

$$\langle f_{uu},f_u\rangle=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}=\frac{1}{2}E_u,$$

$$\langle f_{uv},f_u\rangle=\frac{1}{2}E_v,$$

$$\langle f_{vv},f_v\rangle=\frac{1}{2}G_v,$$

$$\langle f_{uv},f_v\rangle=\frac{1}{2}G_u,$$

$$\langle f_{uu},f_v\rangle=F_u-\frac{1}{2}E_v,$$

$$\langle f_{vv},f_u\rangle=F_v-\frac{1}{2}G_u.$$

对第四、五两式再求一次导，可得

$$\frac{1}{2}G_{uu}=\langle f_{uuv},f_v\rangle+\langle f_{uv},f_{uv}\rangle,$$

$$F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv}=\langle f_{uuv},f_v\rangle+\langle f_{uu},f_{vv}\rangle.$$

两式相减有

$$\langle f_{uu},f_{vv}\rangle-|f_{uv}|^2=F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv}-\frac{1}{2}G_{uu}.$$

代入(＊＊)即得最终的 Gauss 公式

$$(EG-F^2)K=\det\begin{pmatrix} F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv}-\frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{1}{2}E_v \\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{pmatrix}$$

$$-\det\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{pmatrix}. \qquad (＊＊＊)$$

这就是 Gauss 的“绝妙定理”. 以上全部计算给出的结论就是：Gauss 曲率 K 可以用 E、F，G 及其对 $\mathbb{R}^2$ 中的 u，v 之导数来表示而不需任何其它东西. 这里最值得注意的是：$E=|X|^2$，$G=|Y|^2$，$F=\langle X,Y\rangle$ 都是 TM 中切向的东西，所以若由(＊＊＊)式定义 K 则完全不涉及法向的东西. 对这件事的准确的含义必须仔细. 用现代的语言来说，我们可从一个抽象流形 M 开始. 这就谈不上“弯曲”而曲率也就没有意思了. M 是 $\mathbb{R}^3$ 的子流形是指我们有一嵌入 $i: M\longrightarrow\mathbb{R}^3$. 而通过 i，由 M 在 $\mathbb{R}^3$ 中的法丛可得 M 上的法向量场 N. 这是“看得见”的事，而观察 P 点在 M 变动时 N_P 的变化就可定义曲率. 发现了(＊＊＊)中不含 N 可能使人以为曲率 K 与嵌入 i 无关，因此是一个拓扑概念. 这显然不对，这一发现其实是说，嵌入 i 在两个方面为流形 M 提供了附加的构造. 其一是才说到的法向量场. 另一个不那么引人注意的是，由于 i，M 的切空间 $T_P(M)$ 其实是 $T_P(\mathbb{R}^3)=\mathbb{R}^3$ 的子空间，从而也有了 $\mathbb{R}^3$ 上的内积. Gauss 称此内积为第一基本形式，用现代语言来说就是 M 上的 Riemann 度量：

$$I(X,Y)=\langle X,Y\rangle,\quad X,Y\in T_P(M).$$

其实也就是函数 $E=I(X,X)$，$G=I(Y,Y)$ 和 $F=I(X,Y)$. Gauss 绝

妙定理说的就是：为了定义曲率，有这些也就够了（（* * *）式）．换言之，若 $j: M \longrightarrow \mathbf{R}^3$ 是另一嵌入但在 M 上诱导出同样的 Riemann 构造，则对任一点 $P \in M$，$\iota(P) \in \iota(M)$ 和 $j(P) \in j(M)$ 处的 Gauss 曲率是相同的．

Gauss 绝妙定理是抽象地研究几何的起点．现在我们知道了，可以抽象地定义流形，可以抽象地定义切丛．此外还需要的只是切丛上的 Riemann 度量了．然而推广（* * *）以作为曲率的抽象定义显然是没有希望的．所以需要 Gauss 定理的一个新的更多依靠概念而不那么依靠计算的证明．这就引导到联络的概念．记住曲率 K 是通过考虑导数 $D_X(N)$ 来定义的．在 M 上一般地不可能这样做．因为即令 $X, Y \in T(M)$ 是 M 的切向量场，$D_X(Y)$ 则一般不在 $T(M)$ 中．但这个问题并不严重，可以取其切向分量．于是我们将 $D_X(Y)$ 分成切向与法向部分如下：

$$D_X(Y) = D_X(Y) - \langle D_X(Y), N\rangle N + \langle D_X(Y), N\rangle N,$$

然后再定义一个新导数

$$\overline{D}_X(Y) = D_X(Y) - \langle D_X(Y), N\rangle N = D_X(Y) + \langle Y, L(X)\rangle N. \quad (1)$$

新算子 $\overline{D}$ 与 D 性质类似，特别是遵从 Leibnitz 法则：

$$\overline{D}_X(fY) = X(f)Y + f\overline{D}_X(Y).$$

所以 $\overline{D}$ 确实可以看作导数，用现代语言来说，即一个联络．它是 $\mathbf{R}^3$ 中的自然联络 D 在 M 上诱导的联络．但是它的性态和 D 不完全相同特别是在高阶导数方面．记住，在 $\mathbf{R}^3$ 中有

$$[X, Y] = XY - YX.$$

因为 $D_X(Y)$ 本质上就是 $(X(Y_1), X(Y_2), X(Y_3))$，这可以推广为

$$D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X,Y]} = 0. \quad (2)$$

将此式用于向量场 Z，并且注意到(1)，有

$$D_X[\overline{D}_Y(Z) - \langle L(Y), Z\rangle N] - D_Y[\overline{D}_X(X) - \langle L(X), Z\rangle N]$$
$$- [\overline{D}_{[X,Y]}(Z) - \langle L[X,Y], Z\rangle N] = 0.$$

把此式详细展开，例如

$$D_X(\overline{D}_Y(Z)) = \overline{D}_X\overline{D}_Y(Z) - \langle L(X), \overline{D}_Y(Z)\rangle N,$$

$$D_X[\langle L(Y),Z\rangle N] = (X\langle L(Y),Z\rangle)N + \langle L(Y),Z\rangle L(X),$$

等等，将会得到一个很大的式子，既含切向的又含法向的部分. 令这两部分分别为零就给出

$$\begin{aligned} &\overline{D}_X\overline{D}_Y(Z) - \overline{D}_Y\overline{D}_X(Z) - \overline{D}_{[X,Y]}(Z) \\ &\quad = \langle L(Y),Z\rangle L(X) - \langle L(X),Z\rangle L(Y), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &\langle L(X),\overline{D}_Y(Z)\rangle - \langle L(Y),\overline{D}_X(Z)\rangle + X\langle L(Y),Z\rangle \\ &\quad - Y\langle L(X),Z\rangle - \langle L[X,Y],Z\rangle = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

方程(4)可以进一步化简. 例如，若 X,Y,Z 都是 $T(M)$ 中的切向量场. 则

$$\begin{aligned} X\langle Y,Z\rangle &= \langle D_XY,Z\rangle + \langle Y,D_XZ\rangle \\ &= \langle \overline{D}_XY,Z\rangle + \langle Y,\overline{D}_XZ\rangle. \end{aligned} \tag{5}$$

这是因为 $D_XY=\overline{D}_XY+$ 法向部分，而 Z 是切向量. 故

$$\langle L(X),\overline{D}_YZ\rangle - Y\langle L(X),Z\rangle = -\langle \overline{D}_YL(X),Z\rangle$$

等等，而我们得到

$$\overline{D}_X(L(Y)) - \overline{D}_Y(L(X)) - L[X,Y] = 0. \tag{6}$$

方程(3)和(6)分别称为 Gauss 方程和 Codazzi-Mainardi 方程. 这样，M 上的联络 $\overline{D}$ 不再适合(2)式，而最好另给它一个名字：

$$R(X,Y)Z = \overline{D}_X\overline{D}_Y(Z) - \overline{D}_Y\overline{D}_X(Z) - \overline{D}_{[X,Y]}(Z), \tag{7}$$

$R(X,Y)$ 称为 Riemann 曲率张量. 由 Gauss 方程可得

$$\begin{aligned} &\frac{\langle R(X,Y)Y,X\rangle}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2} \\ &= \frac{\langle L(Y),Y\rangle\langle L(X),X\rangle - \langle L(X),L(Y)\rangle^2}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2} \\ &= \det L = \text{Gauss 曲率 } K. \end{aligned} \tag{8}$$

这是绝妙定理的另一种表述. 在第十六章中我们已经看到，对一个给定的 Riemann 度量〈 , 〉，有唯一地与之相容的联络. 方程(5)表示，M 上的诱导联络 $\overline{D}$ 就是与诱导度量相容的唯一联络. 这样，第十六章的证明表明了 R 从而还有 K 完全由 M 上的度量〈 , 〉确定.

现在我们知道怎样抽象地来研究几何了. 令 M 为一光滑流形

而 $\bar{D}$ 是 M 上的一个联络. 然后由(7)定义 Riemann 张量 R. R 是一个函数,它对 M 上切向量场的三元组(X,Y,Z)给出一个新向量场 $R(X,Y)Z$(我们以后再解释为什么要把 Z 分开来写). 注意这里并不需要 Riemann 度量$\langle\ ,\ \rangle$而只需要一个联络 $\bar{D}$. 而若确有一个度量,且 D 是它的唯一的不变联络,则有一数值不变量

$$\frac{\langle R(X,Y)Y,X\rangle}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle-\langle X,Y\rangle^2}=\frac{\langle R(X,Y)Y,X\rangle}{|X\wedge Y|^2}.$$

不难看到,它只依赖于 X,Y 在切空间 $T_P(M)$中所张的子空间 H. 所以称为平面 H 的截面曲率,记为 $K(H)$.

§2. 曲面的 Gauss-Bonnet 定理

现在回到嵌入于 $\mathbf{R}^3$ 内的曲面 $M\subset\mathbf{R}^3$. 上节中,我们通过考虑 M 上的单位法向量场 N 方向导数来定义曲率. 这虽然很自然而富于几何直观,Gauss 的原定义却不是这样. 为解释这定义,我们从 Gauss 映射的定义开始. 对一点 $P\in M$,单位法向量 $N_P\in T_P(\mathbf{R}^3)$. 但我们可以通过平行移动将两点 $P,Q\in\mathbf{R}^3$ 上的切空间 $T_P(\mathbf{R}^3)$和 $T_Q(\mathbf{R}^3)$等同起来. 所以可以把 N_P 看作 $T_0(\mathbf{R}^3)=\mathbf{R}^3$ 中的向量. 因为 N_P 是单位向量,故令 $P\longmapsto N_P$ 定义了一个映射

$$\varphi: M\longrightarrow S^2,$$

称为 Gauss 映射或球面映射. Gauss 映射和上面讨论过的线性映射 $L: T_P(M)\longrightarrow T_P(M)$, $L(X)=D_X(N)_P$(称为 Weingarten 映射)的关系很简单. 首先注意到,由 φ 的作法,可以通过平行移动把切空间 $T_P(M)$与切空间 $T_{\varphi(P)}(S^2)$等同起来,这样就有

引理 对任意 $P\in M$,微分

$$d\varphi: T_P(M)\longrightarrow T_{\varphi(P)}(S^2)\simeq T_P(M)$$

即 Weingarten 映射 L.

证明是完全不足道的. 令 $X\in T_P(M)$而 $\sigma(t)$是 M 上一曲线使 $\sigma(0)=P$, $\sigma'(0)=X$. 由定义,

$$d\varphi(X) = (\varphi \circ \sigma)'(0) = \frac{d}{dt}(N_{\sigma(t)})_{t=0} = D_X(N)_p.$$

因为 Gauss 曲率 $K=\det L=\det(d\varphi)$，这可能与微分形式和积分有关. 确切些说，令 $dv=dx\wedge dy\wedge dz$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中通常的体积形式，则在每个可定向曲面 $M\subset\mathbf{R}^3$ 上，dv 诱导出一个面积形式 dA_M（二次形式）如下：

$$dA_M(X,Y) = dv(X,Y,N).$$

N 是前面定义的 M 上的单位外法向量. 例如，若在单位球面 S^2 上应用球面坐标，则有

$$\begin{aligned} dv(X,Y,N) &= r^2\sin\varphi\, dr \wedge d\varphi \wedge d\theta(X,Y,N) \\ &= r^2\sin\varphi\, d\varphi \wedge d\theta(X,Y), \end{aligned}$$

这是因为 $dr(X)=dr(Y)=0$ 而 $dr(N)=1$，故 $dA_{S^2}=r^2\sin\varphi\, d\varphi\wedge d\theta|_{r=1}$即 S^2 上通常的面积元，而 S^2 的总面积是

$$\int_{S^2} dA_{S^2} = 4\pi.$$

既有映射 $\varphi: M \longrightarrow S^2$，可考虑拉回 $\varphi^*(dA_{S^2})$. 于是对 $X,Y\in T_p(M)$有

$$\begin{aligned} \varphi^*(dA_{S^2})(X,Y) &= dA_{S^2}(d\varphi(X),d\varphi(Y)) \\ &= dA_{S^2}(L(X),L(Y)) \\ &= \det L\; dA_{S^2}(X,Y) = K dv(X,Y,N) \\ &= K dA_M(X,Y). \end{aligned}$$

所以我们有

$$\varphi^*(dA_{S^2}) = K dA_M.$$

这就是 Gauss 给出的曲率定义，它度量了 $\varphi^*(dA_{S^2})$与 dA_M 偏离的程度. 这是很合理的. 因为不管怎么定义曲率. 单位球面 S^2 之曲率应为 1. 所以一切其它东西的曲率都应以 S^2 为模型而通过 φ 与它作比较而定义. 这定义以 Gauss 曲率而不以主固有值 λ_1,λ_2 为基本对象. 它也说明了为什么可能有绝妙定理. 因为 φ^* 是 N 的无穷小变形而不是 N 本身.

这里作以上讨论的目的是回忆起第七章中关于积分的一个结果，即

$$\int_M K dA_M \Big/ \int_{S^2} dA_{S^2} = \deg(\varphi)$$

必为一整数，故有以下形状的定理

$$\int_M K dA_M = 4\pi \deg(\varphi).$$

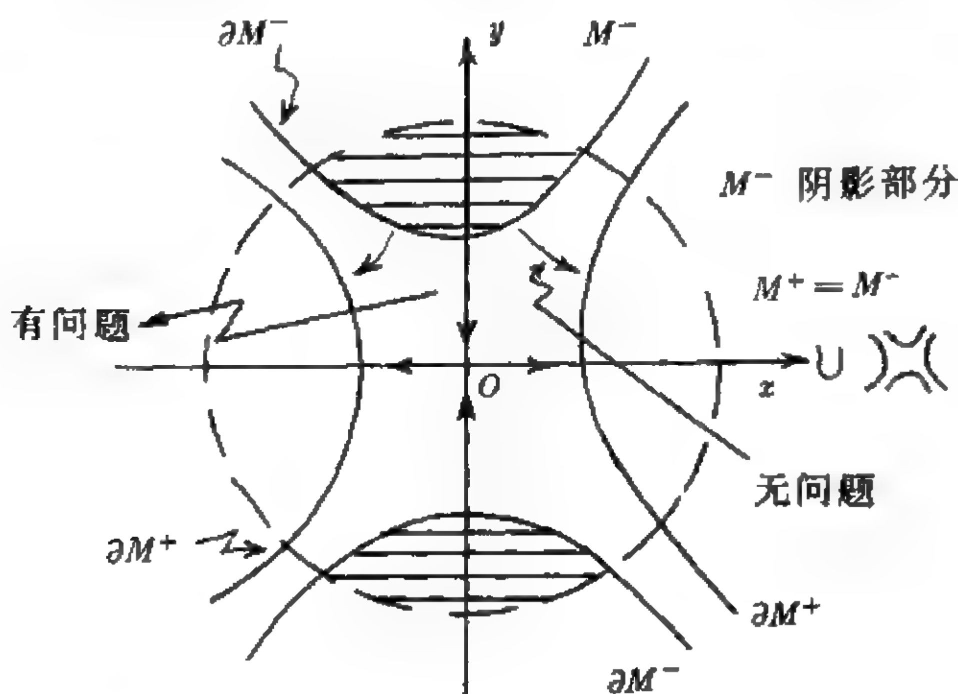
显示地算出 $\deg(\varphi)$ 即 Gauss-Bonnet 定理的内容. 我们将用两个方法做这件事. 其一是以临界点的 Morse 理论为依据. 我们迄今还没有机会详细讨论这个重要的主题，所以这里用这个方法很好. 记住计算 $\deg(\varphi)$，$\varphi: M \longrightarrow S^2$ 的一个方法是取一个正则值 $q \in S^2$，于是 $\varphi^{-1}(q) = \{p_1, \cdots, p_k\}$ 是一有限集. 对每个 p_i 可以指定一个局部指标 $\mathrm{Ind}(p_i) = \pm 1$，视 $d\varphi: T_{p_i}M \longrightarrow T_q(S^2)$ 是否保持定向而定（这两个切空间都是可定向的）. 在我们的情况下，若有必要则作一旋转，可以设 $q \in S^2$ 是北极，于是在 p_i 处切平面 $T_{p_i}(M)$ 是水平的. 这件事可以改述如下：令 $Z: M \longrightarrow \mathbf{R}$ 为 z 坐标函数，于是 $p_i \in M$ 是 Z 的临界点，即 $dZ(p_i) = 0$. 事实上若 M 为闭曲面，函数 Z 的一切临界点集 $\{p_i\}$ 并非 $\varphi^{-1}(q)$ 而是 $\varphi^{-1}(q) \cup \varphi^{-1}(-q)$，可以证明 $\varphi^{-1}(q)$ 只是其一半. q 为正则值意味着这些临界点是非蜕化的，即或为极值或为鞍点，视 d^2Z 之固有值 λ_1, λ_2 同号或异号而定. Morse 理论处理的正是类似的情况. 设 $f: M \longrightarrow \mathbf{R}$ 是一光滑函数. 对任一正则值 $t \in \mathbf{R}$，$f^{-1}(t)$ 是 M 的子流形，而 $M_t = \{p \in M \mid f(p) \leqslant t\}$ 是一有边子流形，$\partial M_t = f^{-1}(t)$. 设取 $t_1 < t_2$，则 $M_{t_1} \subset M_{t_2}$. 临界点的拓扑理论讲的正是如何在 M_{t_1} 上贴附一 CW 复形以得出 M_{t_2}.

最简单的情况是：$[t_1, t_2]$ 全是正则值，即对一切 p，只要 $t_1 \leqslant f(p) \leqslant t_2$，必有 $df(p) \neq 0$. 记住 M 有一 Riemann 度量 $\langle\ ,\ \rangle$，所以有一矢量场 $X = \mathrm{grad} f$（定义为 $\langle X, Y\rangle = Y(f)$）. 于是 $df \neq 0$ 就变成为在 $M_{t_2} - M_{t_1}$ 上 $X \neq 0$. 令 $\alpha(s, p)$ 是 X 的流. 若设 M 为紧，$\alpha(s, p)$ 可以对一切 $s \in \mathbf{R}$ 有定义，且可使对于 $p \in M_{t_1}$，$\alpha(1, p) \in M_{t_2}$. 因此

$$H_s(p) = \alpha(1 - s, p)$$

是一个同伦.且将 M_{t_2} 也收缩为 M_{t_1}(即 $M_{t_1} \subset M_{t_2}$ 是一形变收缩核).换言之,从 M_{t_1} 变到 M_{t_2} 时伦型不变.特别是,相对同调群 $H_*(M_{t_2}, M_{t_1})$ 为零.

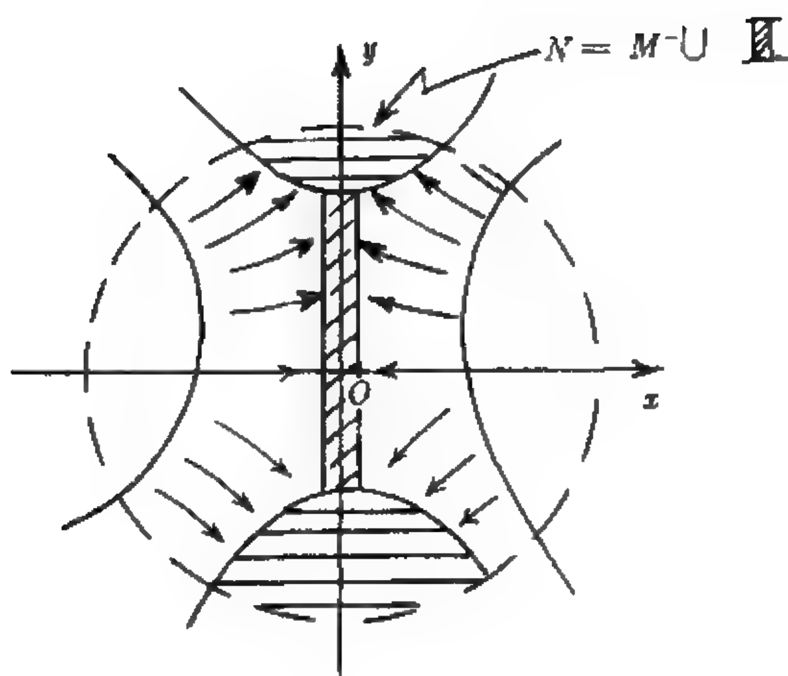
若当 $t_1 \leqslant f(p) \leqslant t_2$ 时有一个临界点 p,情况就不同了.鞍面 $z = x^2 - y^2$ 是最有趣的.若 (x, y) 是临界点 $p = 0$ 附近的局部坐标,则对某个 $\varepsilon > 0$、流形 $M_{t_1} = M_{-\varepsilon} = M^-$ 和 $M_{t_2} = M_\varepsilon = M^+$ 之形如图.



若再跟踪 $\operatorname{grad} z = (x, -y)$ 的积分曲线,就发现不行了;因为有一些积分曲线会停止于 O 而不会到达 M^+.但若考虑 $N = M^- \cup$ 铅直线段,则临界点 O 也被包含了,前面的方法又可以用来证明 $N \subset M^+$ 是 M^+ 的形变收缩核.

从技术上说,$M = M^- \bigcup_{\partial I} I$ 即对 M^- 附加一个一维胞腔.故这时有

$$H_i(M^+, M^-) = H_i(N, M^-) = H_i(N/M^-)$$
$$= H_i(I/\partial I) = \begin{cases} Q, & i = 1, \\ 0, & i \neq 1. \end{cases}$$



这里以 Q 为系数. 于是 Euler 示性数 $\chi(M^+, M^-) = -1$. 幸运的是，对于鞍点，$\lambda_1\lambda_2 < 0$，故局部指标 $\mathrm{Ind}(p_i) = -1$.

以上情况是普遍适用的. 在 f 的每一个鞍点临界点附近，可以找到局部坐标(x, y)使 $f(x, y) = x^2 - y^2$ $(f(p) = f(0) = 0)$. 局部指标 $\mathrm{Ind}(p)$反映了以下事实：需要添加一个一维胞腔才能由 M^-(同伦地)进到 M^+. 作类似分析表明，在 $\lambda_1\lambda_2 > 0$ 时对 M^- 要添加一个二维胞腔才能同伦地得到 M^+，故

$$1 = \mathrm{Ind}(p) = \chi(M^+, M^-),$$

因为这时仅当 $i = 2$ 时才有 $H_i(M^+, M^-) \neq 0$.

现在就很容易理解了. 从 $M_0 = \varnothing$ 开始，可以作出一串子集

$$\varnothing = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_s = M$$

使(M_i, M_{i-1})即相应于临界点 p_i 添加一个相应的胞腔. 由我们上面所作的，再注意到在 $\varphi^{-1}(q)$中$\{p_i\}$要计算两次，我们有

$$2 \cdot \deg(\varphi) = \sum_i \chi(M_i, M_{i-1}).$$

另一方面还要记住一件最简单而又至关重要的事实，即 Euler 示性数 χ 在由(M_i, M_{i-1}, M_{i-2})形成的正合序列

$$\cdots \longrightarrow H_l(M_{i-1}, M_{i-2}) \longrightarrow H_l(M_i, M_{i-2}) \longrightarrow H_l(M_i, M_{i-1}) \longrightarrow \cdots$$

中是可加的. 这样

$$\chi(M)=\chi(M,M_0)=\sum_i\chi(M_i,M_{i-1})=2\deg(\varphi).$$

所以我们得到以下形式的 Gauss-Bonnet 定理

$$\int_M KdA_M=2\pi\chi(M). \qquad (*)$$

特别可以看到,Gauss 曲率 K 不仅与联络及 Riemann 度量无关,甚至与 M 的光滑构造无关. 所以 Gauss-Bonnet 定理在精神上是一个指标类型的定理. 事实上,它可以形式地陈述为一个指标定理. 但是我们不来详谈了.

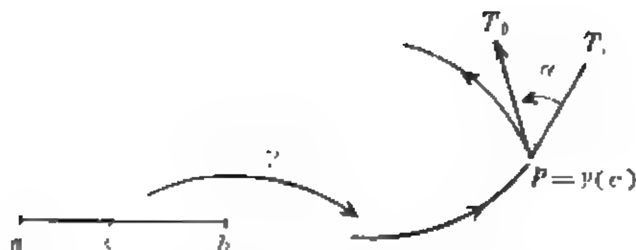
上面的证明尽管很漂亮,却并不很对. 其实我们证的还不是真正要证的. 因为 Gauss-Bonnet 定理是一个内蕴的定理,它应是 M 本身的结果,而与 M 是否位于 $\mathbb{R}^3$ 中无关. 对于函数 K 我们已知道它是这样了(绝妙定理). 但面积元素 dA_M 又如何? 它是由 $\mathbb{R}^3$ 中的体积元 dv 而来的. 然而容易看出 dA_M 可以由 M 的 Riemann 度量决定. 准确地说,若(X,Y)是一对有向的就范正交场,dA_M 即对偶于 $X\wedge Y$ 的 2-形式:

$$dA_M(X,Y)=1.$$

这样积分 $\int_M KdA_M$ 是内蕴地定义了的. 上面的论证只是帮助说明了它究竟是什么. 现在的问题是:$(*)$对任一二维 Riemann 流形 M 是否仍成立. 这才是 Gauss-Bonnet 定理的真意. 要找一个内蕴的证明就要回到关于测地三角形的 Gauss 定理. 大家知道,欧氏平面上三角形内角和为 π. 在球面 S^2 上,以测地线为边的三角形(后面解释)的内角和恒小于 2π. Gauss 定理即这些事实的推广. 设 M 是一有向二维 Riemann 流形,它不一定嵌在 $\mathbb{R}^3$ 中. 令 $\gamma:[a,b]\longrightarrow M$ 为 M 上的曲线而除在一点 c,$a<c<b$ 外为光滑. 现在考虑$T_P(M)$中的两个切向量,这里 $P=\gamma(c)$:

$$T_i=\gamma'(c^-) \qquad (入射切线),$$

$$T_0=\gamma'(c^+) \qquad (出射切线).$$

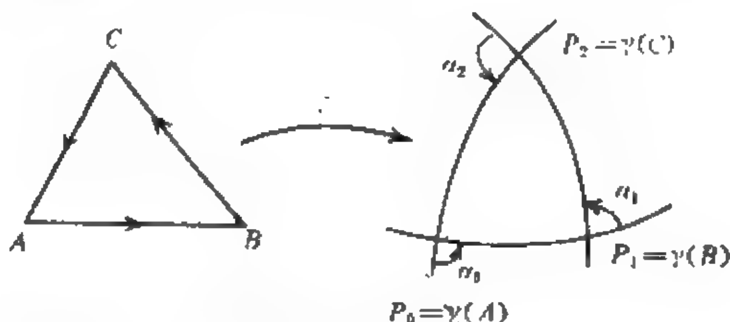


因为切空间 $T_P(M)$ 中有内积，所以这两个向量之间可以定义角度 $\alpha(P)$，而

$$\cos\alpha(P) = \langle T_1, T_0\rangle/(|T_1| \cdot |T_0|).$$

它还不全是适当定义的．要确定 $\alpha(P)$，要采用某些规定．我们约定，若 $\{T_1, T_0\}$ 是正向的，则 $0<\alpha(P)<\pi$，否则 $-\pi<\alpha(P)<0$（若 $T_1=T_0$，则 $\alpha(P)=0$；若 $T_1=-T_0$，则 $\alpha(P)=-\pi$）．换言之，$\alpha(P)=\cos^{-1}(\langle T_1, T_0\rangle/(|T_1| \cdot |T_0|))$，并按上述规则取值．$\alpha(P)$ 称为有向外角．

设 γ 的象是顶点为 P_0, P_1, P_2 的三角形．除在这些顶点外，γ 是光滑的，且是欧氏三角形 ABC 到其象的同胚．于是有三个外角 α_0，



α_1, α_2．在有真正的三角形的欧氏空间中，

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi.$$

但在 M 上它却不一定成立了．Gauss-Bonnet 定理试图把这与曲率 K 联系起来．为此，先回想一下第七章中讨论过的关于环绕数的拓扑事实．设 $\gamma: [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^2$ 是一闭曲线而 $P\in\mathbf{R}^2$ 是不在 γ 上的点．于是 $\widetilde{\gamma}(t)=\dfrac{\gamma(t)-P}{|\gamma(t)-P|}$ 是一曲线 $[a,b]\longrightarrow S^1$．因为 $\widetilde{\gamma}(a)=\widetilde{\gamma}(b)$，故

可认为 $\widetilde{\gamma}$ 是一映射 $\widetilde{\gamma}: S^1 \longrightarrow S^1$. γ 关于 P 的环绕数即是整数

$$n(\gamma,P) = \deg(\widetilde{\gamma}).$$

在第七章中我们已经看到怎样用积分去计算它. 但是用角函数是更直观的方法. 因为 $\widetilde{\gamma(t)} \in S^1$, 恒可把它写成

$$\widetilde{\gamma(t)} = e^{i\theta},$$

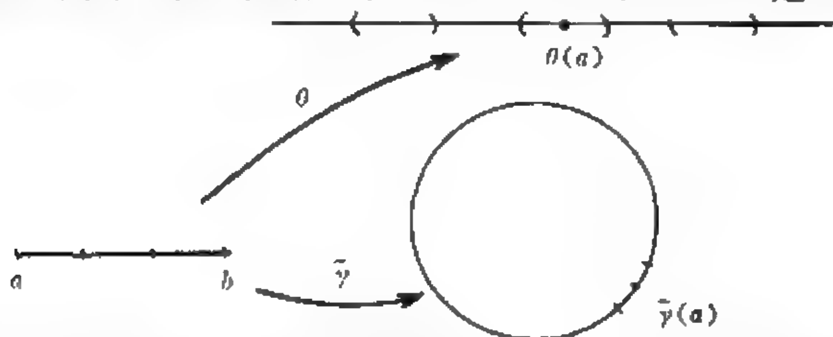
$\theta=\theta(t)$. 我们知道, $\theta(t)$ 并非唯一决定的. 问题是能否选择连续的 $\theta: [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$, 使得

$$\widetilde{\gamma(t)} = e^{i\theta(t)}$$

对所有的 $t\in[a,b]$ 成立. 我们知道, 这里有

引理 θ 恒存在且由初值 $\theta(a)$ 的选取完全决定.

证明很简单. 指数映射 $\exp: \mathbf{R} \longrightarrow S^1$, $\exp(s)=e^{is}$ 是一局部同



胚. 将 $[a,b]$ 分成小区间 I_i, 使对每个 I_i, $\exp^{-1}(I_i)$ 是 $\mathbf{R}$ 上一些离散区间之并. 任取一点 $\theta(a)$ 于 I_1 中使 $e^{i\theta}(a)=\gamma(a)$. 于是对 $t\in I_1$, $\theta(t)$ 之值即 exp 之局部逆. $\theta(t)$ 在 I_2 中的值则由 $\theta(t_1)$ ($t_1=I_1$ 之终点) 决定. 这样即可覆盖任意的有限区间 $[a,b]$. 当然, 尽管 $e^{2\pi i\theta(a)}=e^{2\pi i\theta(b)}$, 却不一定有 $\theta(a)=\theta(b)$. 事实上

$$\deg(\widetilde{\gamma}) = [\theta(b) - \theta(a)]/(2\pi).$$

因为用第七章中的记号, 我们取 S^1 上之体积元为

$$\mu = xdy - ydx.$$

于是有

$$\begin{aligned}\langle \gamma^*(\mu), \frac{d}{dt}\rangle &= \langle xdy - ydx, \gamma_* \frac{d}{dt}\rangle = xY - yX \\ &= \theta'(t)[\cos\theta(t)\cos\theta(t) + \sin\theta(t)\sin\theta(t)] = \theta'(t).\end{aligned}$$

于是

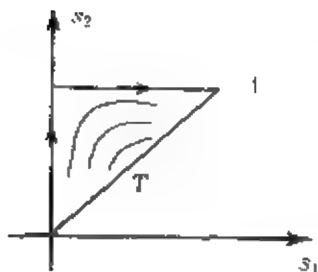
$$\deg\widetilde{\gamma}=\frac{1}{2\pi}\int_a^b\gamma^*(\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_a^b\theta'(t)dt=\frac{1}{2\pi}[\theta(b)-\theta(a)].$$

今设 γ 是一光滑闭曲线. 这不但是指 $\gamma(a)=\gamma(b)$，还有 $\gamma'(a)=\gamma'(b)$. 于是有切向量场 $\gamma'(t)$. 若对一切 t，$\gamma'(t)\neq0$. 则可考虑单位切向量场

$$T(t)=\gamma'(t)/|\gamma'(t)|.$$

$T(t)$ 也可看作是一映射 $T:S^1\longrightarrow S^1$，于是又可考虑其度数. 我们会看到，它与 γ 的曲率有关. 但我们需要的是一个拓扑结果的特例. 记住若 γ 是一对一的(除 $\gamma(a)=\gamma(b)$ 外)，则 γ 是一简单闭曲线. 我们有

Hopf **环绕定理**(Umlaufsatz)　若 γ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一光滑简单闭曲线，则 $\deg(T)=\pm1$(±号视定向而定).



证　若 γ 是简单闭曲线，则当 $s_1\neq s_2$ 时，

$$\varphi(s_1,s_2)=\frac{\gamma(s_2)-\gamma(s_1)}{|\gamma(s_2)-\gamma(s_1)|}\tag{1}$$

恒有定义. 当 $s_2\longrightarrow s_1$ 时，$\varphi(s_1,s_2)\longrightarrow T(s_1)$. 故在

$$\Delta=\{(s_1,s_2)\,|\,0\leqslant s_1\leqslant s_2\leqslant1\}$$

$$([a,b]=[0,1])$$

可定义 φ，即当 $s_1\neq s_2$ 时用(1)来定义，在 $s_1=s_2=s$ 时定义 $\varphi(s,s)=T(s)$. 余下不明确的是点(0,1). 但当 $s_1=0$，$s_2\longrightarrow1$ 时，$\gamma(s_2)-\gamma(s_1)=\gamma(s_2)-\gamma(0)=\gamma(s_2)-\gamma(1)$，所以 $\varphi(s_1,s_2)\longrightarrow-T(0)$. 于是

$$\varphi(s_1,s_2)=\begin{cases}\dfrac{\gamma(s_2)-\gamma(s_1)}{|\gamma(s_2)-\gamma(s_1)|}, & s_1<s_2,(s_1,s_2)\neq(0,1),\\ T(s), & s_1=s_2=s,\\ -T(0), & (s_1,s_2)=(0,1)\end{cases}$$

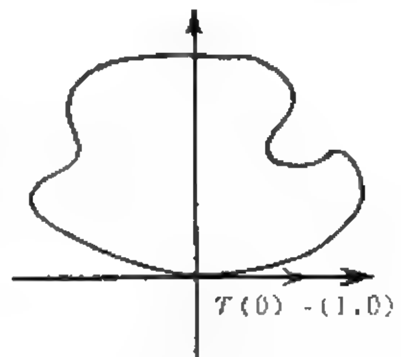
是一适当定义的连续映射 $\varphi:\Delta\longrightarrow S^1$. 若称 $\varphi|\Delta$ 的两个直边 $=\delta$，则 φ 是 δ 与 T 之间的同伦. 因为度数是同伦不变的(这是我们所需的拓扑)，所以可以考虑 $\deg(\delta)$. δ 可以认为由两段 $\delta_1,\delta_2:[0,1]$

$\longrightarrow S^1$ 构成，这里

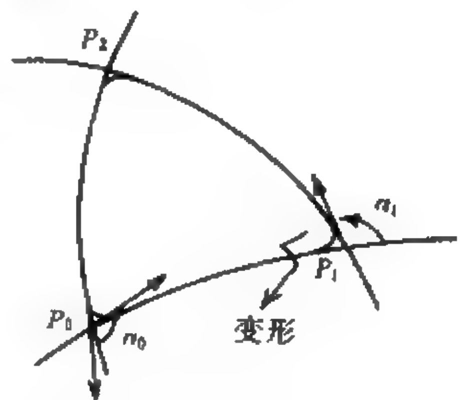
$$\delta_1(s)=\varphi(0,s)=\begin{cases}\gamma(s)/|\gamma(s)|, & s>0,\\ T(0), & s=0,\\ -T(0), & s=1;\end{cases}$$

$$\delta_2(s)=\varphi(s,0)=\begin{cases}-\gamma(s)/|\gamma(s)|, & s>0,\\ -T(0), & s=0,\\ T(0), & s=1.\end{cases}$$

用这些特定的公式，容易计算度数. $\deg(T)$ 显然在曲线 γ 的旋转和平移下不变. 所以不失一般性可以设 $\operatorname{Im}\delta_1$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的上半平面上，且 $T(0)=(1,0)$. 如果是这样，则当用局部提升来作 δ_1 的角函数 θ_1 时，若令 $\theta_1(0)=0$，则对一切 s，$\theta(s)$ 恒在 $[0,\pi]$ 中. 因为当 $s\longrightarrow 1$ 时 $\delta_1(s)\longrightarrow -T(0)$，我们应有 $\theta_1(1)=\pi$. 再作 δ_2，应有 $\operatorname{Im}\delta_2$ 在下半平面中. 现在我们从 $\theta_2(0)=\theta_1(1)=\pi$ 开始，所以 $\theta_2(s)$ 之值在 $[\pi,2\pi]$ 中. 因为 $\delta_2(1)=T(0)$，必有 $\theta_2(1)=2\pi$. 于是总变差是 $\theta_2(1)-\theta_1(0)=2\pi$.

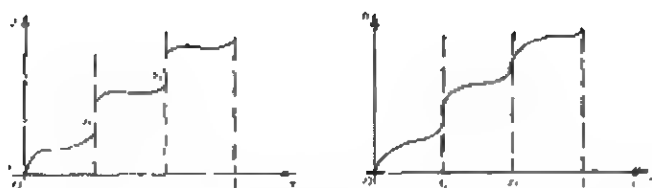


我们需从两个方面来推广这个结果. 首先，在曲线边三角形情况下，γ 并非光滑面只是分段光滑. 矢量场 T 的间断正是顶点 P_i 处的外角. 但我们可以在顶角处对 γ 稍作变形如右图，使 γ 成为光滑曲线. 用角函数 $\theta(s)$ 来表述就是这样：从 P_0 处的 θ_0 开始，例如取 $T_1(P_0)=T=(1,0)$，$\theta(0)=0$，先走到 $\theta(s_1^-)$. 然后考虑 P_1 处的外角面有 $\theta(s_1^+)=\theta(s_1^-)+\alpha_1$，所以在 $P_1=\gamma(s_1)$ 处的间断正是



$$\theta(s_1^+)-\theta(s_1^-)=\alpha_1.$$

这样，一直回到 P_0 为止. 从图形上看变形了的曲线只不过是磨光



了间断而不影响 $\theta(0)$ 和 $\theta(1)$. 对变形曲线应用 Hopf 环绕定理即有

$$\theta(1)-\theta(0)=2\pi-\alpha_0.$$

第二个推广更为本质. 就我们之所需,曲线并不在 $\mathbf{R}^2$ 中而在一个一般的二维 Riemann 流形 M 上. 切向量场 T 并非到 S^1 的映射,$T:[a,b]\longrightarrow S^1$ 因为对于不同的 t,$T(t)\in T_{\gamma(t)}(M)$ 是不同空间中的向量. 但若设 $\mathrm{Im}\gamma\subset U$,$U$ 是一个小开集使 $T(M)|U$ 为平凡的,则困难也可以克服. 例如取 U 为一坐标邻域,则可得 U 上的矢量场 X_1,X_2 使对每一点 $P\in U$,$\{X_{1P},X_{2P}\}$ 均为 $T_P(M)$ 的基底. 再用 Gram-Schmidt 手续可设 $\{X_{1P},X_{2P}\}$ 为**就范正交系**. 这样,每一个 $T(t)$ 都可写为

$$T(t)=\alpha(t)X_{1\gamma(t)}+\beta(t)X_{2\gamma(t)} \tag{1}$$

从而 $t\longmapsto(\alpha(t),\beta(t))$ 使我们仍可认为 T 是到 S^1 上的映射:$T:[a,b]\longrightarrow S^1$. 乍看起来这已解决了问题. 其实不然. 弄清这一点十分重要.

若取 U 为局部坐标 (x_1,x_2) 邻域,确可把 γ 看成 $\mathbf{R}^2$ 中的曲线. 切向量场

$$\gamma'(t)=(x_1'(t),x_2'(t))$$

确也可以写成

$$\gamma'(t)=x_1'(t)\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2'(t)\frac{\partial}{\partial x_2}. \tag{2}$$

但要说我们已把问题化成 $\mathbf{R}^2$ 中的问题,就应有

$$\alpha(t)=x_1'(t)/[x_1'(t)^2+x_2'(t)^2]^{1/2},$$
$$\beta(t)=x_2'(t)/[x_1'(t)^2+x_2'(t)^2]^{1/2}.$$

在 $\mathbf{R}^2$ 中 $\{X_1,X_2\}$ 是就范正交系,而在一般的 Riemann 流形 M 上,$\{\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2}\}$ 却不一定是. 用 Gram-Schmidt 手续在小邻域 U 中把 $\{X_1,X_2\}$ 化为就范正交系是一回事,但要找一个局部坐标 (x_1,x_2) 使

$\{\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2}\}$是就范正交系就完全是另一回事了. 这意味着有一个局部坐标 $\varphi: U \longrightarrow \mathbf{R}^2$ 使得 U 不但作为微分流形，而且作为 Riemann 流形，都与 $\mathbf{R}^2$ 是一样的. 要是做到了这一点，曲率函数 K 也就变成 0，这样就什么事也不必做了.

看来出了麻烦，但其实又不如此. 这里又可用拓扑学了. 我们讨论的是度数，它允许同伦变换. 在坐标邻域 U 中有 Riemann 度量 $\langle\ ,\ \rangle$ 而我们关心的是求(1)所定义的映射 T 之度数 $\deg(T)$. 在 U 中还有欧氏度量，记作$(\ ,\ )$. 在此度量下$\{\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2}\}$是就范正交的，这时(2)也定义一个切向量场，相应的也有一个映射，记之为 $\widetilde{T}$. 由 Hopf 环绕定理，$\deg(\widetilde{T})=1$. 现在对 $0\leqslant s\leqslant 1$ 引入一族新的 Riemann 度量

$$\langle\ ,\ \rangle_s = s\langle\ ,\ \rangle + (1-s)(\ ,\ ).$$

容易验证它确是 Riemann 度量. 也容易看到，可以作出$\langle\ ,\ \rangle_s$ 的一族就范正交系$\{X_{1s},X_{2s}\}$，它含系数 s，$s=1$ 时它就是$\{X_1,X_2\}$，$s=0$ 时它就是$\{\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2}\}$. 例如可以取

$$X_{1s} = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big/\left|\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_s \quad \left(\left|\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_s \text{是}\frac{\partial}{\partial x_1}\text{在}\langle\ ,\ \rangle_s\text{下之范数}\right)$$

然后再用 X_{1s}和定向规定来确定 X_{2s}. 令

$$T_s(t) = \alpha_s(t)X_{1s} + \beta_s(t)X_{2s}$$

为度量$\langle\ ,\ \rangle_s$ 下的单位切向量场. T_s, $0\leqslant s\leqslant 1$ 显然是 $T=T_1$ 和真正的欧氏场$\widetilde{T}=T_0$ 间的同伦. 所以我们还是有

$$\deg(T) = 1.$$

故为计算 $\deg(T)$，仍可用角函数 $\theta(t)$，且 $e^{i\theta(t)}=(\alpha_t,\beta_t)$，亦即 $\theta(t)=\cos^{-1}\langle T(t),X_{1\gamma(t)}\rangle$ 且适当取其值. θ 的跳跃间断仍是许可的.

我们需要的拓扑知识就这么多. 现在用我们选定的就范正交场$\{X_1,X_2\}$来刻画 U 上的几何. 因为要作积分. 最好把一切都化为 1-形式. 令$\{\omega_1,\omega_2\}$为对偶于$\{X_1,X_2\}$的 1-形式. 对任意场 X，有

$$D_X(X_j) = \sum_{i=1}^{2} a_{ij} X_i,$$

这里 $a_{ij} = a_{ij}(X)$ 是依赖于 X 的函数. 它定义了一个 1-形式 $\omega_{ij}(X) = a_{ij}(X)$. 因此联络完全由 2×2 矩阵 (ω_{ij}) 决定. 还有更多可说的. 因为 D 是此度量下的不变联络, 故由 $\langle X_1, X_1 \rangle = 1$ 有

$$0 = X\langle X_1, X_1 \rangle = \langle 2D_X(X_1), X_1 \rangle$$

从而

$$\omega_{11}(X) = \langle D_X(X_1), X_1 \rangle = 0.$$

类似地 $\omega_{22} = 0$, $\omega_{12} = -\omega_{21}$. 所以在 U 上联络 D 完全由 ω_1, ω_2 和 ω_{12} 决定. 现在用这些来计算曲率 K. 记住, 若用 Riemann 曲率张量 R 来表示, 有

$$K = \langle R(X_1, X_2) X_2, X_1 \rangle.$$

现在

$$R(X_1, X_2) X_2 = D_{X_1}(D_{X_2}(X_2)) - D_{X_2}(D_{X_1}(X_2)) - D_{[X_1, X_2]}(X_2),$$

又因为 $D_{X_2}(X_2) = \omega_{12}(X_2) X_1$, 所以

$$\begin{aligned} D_{X_1}(D_{X_2}(X_2)) &= D_{X_1}(\omega_{12}(X_2) X_1) \\ &= X_1(\omega_{12}(X_2) X_1) + \omega_{12}(X_2) \omega_{21}(X_1) X_2. \end{aligned}$$

类似于此,

$$D_{X_2}(D_{X_1}(X_2)) = X_2(\omega_{12}(X_1)) X_1 + \omega_{12}(X_1) \omega_{21}(X_2) X_2,$$

$$D_{[X_1, X_2]}(X_2) = \omega_{12}(X_1, X_2) X_1.$$

由此可得

$$\begin{aligned} K &= X_1(\omega_{12}(X_2)) - X_2(\omega_{12}(X_1)) - \omega_{12}[X_1, X_2] \\ &= d\omega_{12}(X_1, X_2). \end{aligned}$$

换一个表述方法即有

$$d\omega_{12} = K \omega_1 \wedge \omega_2.$$

现设 γ 是 U 中的光滑曲线而不一定为闭, T 是 γ 上的单位切向量场. 我们定义 γ 上的单位法向量场 N 使 $|N| = 1$, $\langle T, N \rangle = 0$ 且 $\{T, N\}$ 为正的定向(这个 N 与 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面之单位法向量场全无关系). 然后考虑向量场 $D_T(T)$. 因为 $\langle T, T \rangle = 1$, 故

$$0 = T\langle T, T\rangle = 2\langle D_T(T), T\rangle.$$

于是总可以写出

$$D_T(T) = kN,$$

k 是 γ 上的一个函数，称为 γ 的有符号的测地曲率. 它度量了 T 沿着 T 方向的变化，因此是描述 γ 在 M 中的弯曲的. 如果没有弯曲，γ 就称为测地线，也就是 M 中的"直"线.

今令 $\theta(t)$ 为 U 中三角形 γ 的角函数并用 X_1, X_2 表示，即

$$T(t) = \cos\theta(t)\ X_1 + \sin\theta(t)\ X_2,$$

从而有

$$N(T) = -\sin\theta(t)\ X_1 + \cos\theta(t)\ X_2.$$

我们有

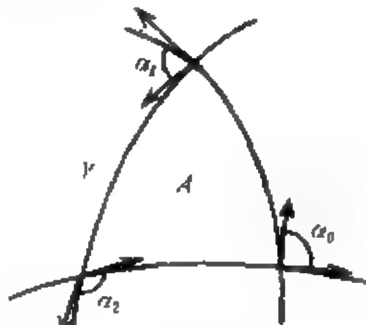
$$\begin{aligned} D_T(T) &= D_T(\cos\theta\ X_1 + \sin\theta\ X_2) \\ &= T(\cos\theta)X_1 + T(\sin\theta)X_2 + \cos\theta\ \omega_{21}(T)X_2 \\ &\quad + \sin\theta\ \omega_{12}(T)X_1. \end{aligned}$$

因为 $T(\cos\theta) = -\sin\theta\ T(\theta)$，$T(\sin\theta) = \cos\theta\ T(\theta)$，$\omega_{12} = -\omega_{21}$，故

$$D_T(T) = T(\theta)N - \omega_{12}(T)N.$$

由此可得

$$k = T(\theta) - \omega_{12}(T).$$



在三角形 γ 上积分即有

$$\begin{aligned} \int_\gamma k &= \int_\gamma T(\theta) - \int_{\gamma=\partial A} \omega_{12}(T) \\ &= \int \frac{d\theta}{dt}dt - \int_A d\omega_{12} \end{aligned}$$

(Stokes 定理).

第一个积分 $=\theta(1)-\theta(0)+$ 角点处的间断. 由 Hopf 环绕定理，它应为

$$2\pi - (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2).$$

由前面做过的计算知，第二个积分为

$$\int_A d\omega_{12} = \int_A K dA_M.$$

故得关于三角形 A 的 Gauss-Bonnet 公式

$$\int_{\partial A} k = 2\pi - (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) - \int_A K dA_M. \qquad (*)$$

当 γ 是由测地线段所成的三角形时，令 $\beta_i = \pi - \alpha_i$ 为内角，即得 Gauss 公式

$$\int_A K dA_M = (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) - \pi.$$

这就可以解释何以在球面上（这时 $K>0$），内角和大于 π.

上面得到的 Gauss-Bonnet 公式（ * ）还是局部的：A 必须含在集 U 中而切丛在 U 上是平凡的. 要得到整体的结果只需用简单的组合计数来证明. 令设 M 为一紧的有定向 Riemann 流形. 用三角形剖分 M 使每个三角形 A_i 都含在一坐标邻域中. 令 V, E, S 为剖分中的三角形之顶点数、边数与三角形数. 当然要用 M 的定向使各个三角形有定向. 对每个 A_i，令 $\{\alpha_0^i, \alpha_1^i, \alpha_2^i\}$ 和 $\{\beta_0^i, \beta_1^i, \beta_2^i\}$ 分别为外角和内角. 对每个三角形 A_i 应用 Gauss-Bonnet 公式并把结果相加. 首先，在 $\int_\gamma k$ 中每个边各按相反方向走了两次，这个积分全部相消了. 所以有

$$0 = 2\pi \cdot S - \sum_{i=1}^{S} (\alpha_0^i + \alpha_1^i + \alpha_2^i) - \int_M K,$$

我们又有 $\alpha_j^i = \pi - \beta_j^i$. 所以

$$\int_M K = 2\pi \cdot S - \sum_{i=1}^{S} \sum_{j=0}^{2} \pi + \sum_{i,j} \beta_j^i.$$

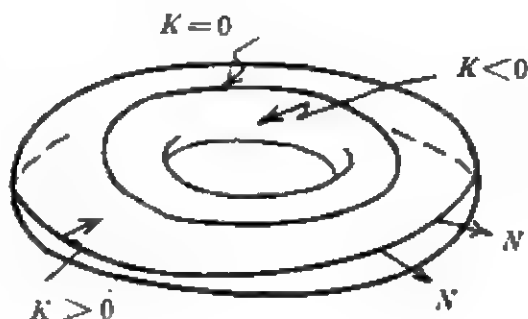
$\sum\limits_{i=1}^{S} \sum\limits_{j=0}^{2}$ = 边数但每边计算了两次，所以第二项是 $2\pi \cdot E$，最后一项是内角总和. 每个顶点处的内角加起来是 2π，所以这一项是 $2\pi \cdot V$. 于是得到**整体的** Gauss-Bonnet **定理**

$$\int_M K dA_M = 2\pi(V - E + S) = 2\pi\chi(M).$$

读者会看到，上面的论证是拓扑学（Hopf 环绕定理、Euler 示性数）和几何学的美妙结合. 所用的技巧并不特别难，但思路的表述

极有深度．主要之点在于看到它是一个内蕴的结果．这件事使它比之单纯的计算公式意义深远得多．举例说，我们已经看到由嵌入 $S^2\subset\mathbf{R}^3$ 而得到的 S^2 之几何为具有常 Gauss 曲率 $K>0$．这是合理的，因为 $\chi(S^2)=2$ 也是正的．

若取环面 $T=S^1\times S^1\subset\mathbf{R}^3$，则因 $\chi(T)=0$，故其曲率必须有时为正，有时为负，才能保证 $\int_T K=0$．看看附图也确实如此．但 Gauss-Bonnet 定理是说，不论 T 上取什么度量都有 $\int_T K=0$．显然最容易做的是说 $K\equiv0$．这确实是容易做的．记住 T 是 Lie 群，而任一 Lie 群 G 的切丛都是平凡的．但当 $T(M)=M\times\mathbf{R}^n$ 时，恒可在其上给以 $\mathbf{R}^n$ 的度量而 $\mathbf{R}^n$ 的曲率显然为 0．这种环面称为平坦环面．与此相对照，绝不会有平坦球面 S^2．我们也知道任意紧 Lie 群 G 必有 $\chi(G)=0$（其实由第九章 Lefschetz 不动点定理就可知道这一点了）．



在结束本节时还应提到，Gauss-Bonnet 定理也对 Hopf 环绕定理赋予了几何内容．因为若取 $M=\mathbf{R}^2$ 而 γ 为一光滑的简单闭曲线 $(a_0=a_1=a_2=0)$．Hopf 环绕定理指出 γ 的总曲率 $\int_\gamma k$ 为 2π，这里 $k=\langle D_TT,N\rangle$ 是 γ 的测地曲率，也就是在初等微分几何中按通常方式所定义的．例如，若 γ 有参数表示 $\gamma(t)=(x(t),y(t))$，容易导出熟知的公式

$$k=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}.$$

§ 3. 曲率和示性类

Gauss Bonnet 定理看来是一个更一般的定理的特例. 这不仅是自然的,甚至是不可避免的. 今天我们事后看来,那个定理的纲要也很清楚. Euler 示性数 $\chi(M)$是上同调类 $\chi(T(M))\in H^*(M)$即切丛 $T(M)$的 Euler 类,在基本同调类$[M]\in H_*(M)$上的值: $\langle\chi(T(M)),[M]\rangle$. 由 de Rham 定理知道,将 de Rham 上同调群与奇异上同调等同起来,则上同调类在同调类上的取值就是积分. 所以必定有一个方法将 de Rham 群中的 Euler 类 $\chi(T(M))$用曲率 K 表示出来. 事实是不但有一个一般的 Gauss-Bonnet 定理(这是陈省身的著名工作,所以现称 Gauss-Bonnet-陈定理),现在还有一个一般的理论用曲率研究所有的示性类. 现在就概述这个理论.

在实际做事之前,先建立一般的工具. 因为我们要讨论一般的示性类,就不能仅限于切丛. 所以取一矢量丛 $\pi: E\longrightarrow M$, M 是一光滑流形. 我们已经看到这里怎样引进联络的概念. 我们不取切向量场的方向导数而取 E 的截口的方向导数. 于是丛 E 上的联络即对一矢量场 X 与 E 的截口 s 指定 E 的一个新截口. 它对于 X 乘以函数,s 乘以常数应适合通常的双线性规则,而对 s 乘以函数系数应服从 Leibnitz 法则:

$$D_X(fs) = X(f)s + fD_X(s).$$

这些前面都讨论过了.

因为我们将要讨论形式,把联络用形式来讲更方便. 我们可以局部地做这件事如下:令 $U\subset M$ 为一小开集而 E 在其上是平凡的. 令$\{s_1,\cdots,s_k\}$, $k=\dim E$,为 U 上的局部标架,即截口,使对每一点 $P\in U$, $\{s_1(P),\cdots,s_k(P)\}$是向量空间 E_P 的基底. 对任一 X 与 j,有以下展开式

$$D_X(s_j) = \sum_{i=1}^{k}\omega_j^i(X)s_i. \tag{1}$$

$\omega_j^i(X)$是适当的系数，而联络 D 完全由这些系数决定．它们称为联络 1-形式(ω_j^i)．

上面的讨论中重要的是要知道什么是形式，或更一般地，什么是截口而什么不是．记住若 ω 是一个 1-形式，则对任一矢量场 X，$\omega(X)$是一函数，其定义如下：

$$\omega(X)(P) = \omega_P(X_P).$$

反之，若我们对于 X 指定一个函数 $\omega(X)$，并不能就说一定有了一个 1-形式 ω．一个自然的定义应该是，给出 $X_P \in T_P(M)$，求定义在 P 的某邻域 U 中的矢量场 X 使 $X(P) = X_P$ 并定义 $\omega_P(X_P) = [\omega(X)]_P$．但这就是通常的拓展 X 的问题．大家记得，当 ω 对于函数系数为线性时，这是没有问题的：

$$\omega(fX) = f\omega(X) \qquad (\text{作为函数相等}). \qquad (*)$$

因为这时可在 U 上取一局部坐标并将 X 写为

$$X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad a_i \text{ 是函数},$$

于是

$$X_P = \sum a_i(P) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_P.$$

若$(*)$成立，当有

$$\omega(X) = \omega\left(\sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_i a_i \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right),$$

所以

$$\omega(X)(P) = \sum a_i(P)\left[\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right]_P$$

是由 a_i 在 P 之值决定的．

注意到这一点以后即知(1)中的系数 ω_j^i 确实是 1-形式，因为我们有

$$D_{fX}(s_j) = \sum \omega_j^i(fX)s_i,$$

但 D 对 X 的函数系数是线性的，所以

$$D_{fX}(s_j) = fD_X(s_j) = \sum_i f\omega_j^i(X)s_i.$$

$$\omega_j^i(fX) = f\omega_j^i(X).$$

所以把(ω_j^i)称为联络 1-形式 $k\times k$ 矩阵是合理的. 另一方面,可以考虑丛 Hom(E,E). 它在点 $P\in M$ 处的纤维是Hom$(E,E)_P=$ Hom(E_P,E_P),它的截口是一函数 $P\longmapsto f(P)\in$ Hom(E_P,E_P). 我们想把 D 解释为一个值在 Hom(E,E)中的 1-形式,即

$$X\longrightarrow D_X,$$

截口 D_X 定义如下:已给 $u\in E_P$,求 E 的一个局部截口 s 使 $s(P)=u$. 于是$[D_X(P)]u=[D_X(s)]_P$. 和在形式的情况完全一样,这个定义当 D_X 对 s 之函数系数为线性时是合理的,即要求

$$D_X(fs) = fD_X(s).$$

但 Leibnitz 规则告诉我们,联络恰好不能是这样,所以联络 D 不能是值在 Hom(E,E)中的 1-形式. 这件事的含义后面将会看到. 目前只需记住一个一般规则:要想成为一个形式或(某一适当丛的)截口,就必须对函数系数为线性的,即为 $A^0(M)$-模.

再回到联络形式 ω_j^i. 它虽是实实在在的形式,但记住它只是局部定义于 U 上而且依赖于所选的标架$\{s_1,\cdots,s_k\}$是很重要的. 问题自然在于,当标架改变时它怎样变化. 计算并不难. 但我们先把条理弄清. 用 ω 记矩阵(ω_j^i)并把它看作是值在 $k\times k$ 矩阵空间 $GL(k)$所对应的 Lie 代数 $gl(k)$中的 1-形式. 用 s 表示标架$\{s_1,\cdots,s_k\}$. 标架的变化通过右乘一个矩阵 g 来实现:$sg=s'$,这与前面规定的主丛上的群作用为右乘相一致. 这样,我们把 s 看成行向量,面变换规则为

$$s_i' = \sum_j s_j g_{ji} = \sum_j g_{ji} s_j = \sum_j g_i^j s_j.$$

g_i^j 自然是从 E 的迁移函数. 现在我们有

$$D_X(s_i') = \sum_j \omega'^j_i(X)s_j' = \sum_{j,l} \omega'^j_i(X)g_j^l s_l.$$

它又等于

$$D_X(s'_k) = D_X(\sum_p g^p_k s_p) = \sum X(g^p_k) s_p + \sum_{p,q} g^p_k \omega^q_p(X) s_q$$
$$= \sum_l dg^l_k(X) s_l + \sum_{j,l} g^j_k \omega^l_j(X) s_l.$$

于是

$$\sum_j \omega'^j_k(X) g^l_j = dg^l_k(X) + \sum_j g^j_k \omega^l_j(X).$$

若用 $g=(g^i_k)$，$dg=(dg^i_k)$表示矩阵，上式可以写为

$$g\omega' = dg + \omega g, \quad \text{而 } s' = sg. \qquad (*)$$

这个式子的含义与 D 不是截口的含义相同．如果(＊)右方没有 dg 一项，就会有 $\omega' = g^{-1}\omega g$，这是线性变换的矩阵表示的通常的规则，即 Hom(E,E)的截口的通常的变换规则．我们不会有一个整体截口 ω．事实上，在 Gauss-Bonnet 公式的证明中，我们得到了一个关系式 $K\omega_1\wedge\omega_2 = d\omega_{12}$（那里的 $\omega=\omega_{12}$，因为 $\omega_{11}=\omega_{22}=0$）．如果 ω 是整体截口，它在 M 上的积分就应该为 0！

现在可以讨论曲率 R 了，记住现在 R 可定义为

$$R(X,Y)s = D_XD_Y(s) - D_YD_X(s) - D_{[X,Y]}(s).$$

前面已看到，R 对其一切变元当以函数为系数时均为线性的(也容易直接验证！)所以 R 是一个形式．对于每一对(X,Y)，$R(X,Y)$是 Hom(E,E)的一个截口．所以 R 是值在 Hom(E,E)中的 2-形式．这样，R 可以局部地表为一个矩阵值 2-形式．矩阵元自然就是下面的展开式中的系数

$$R(X,Y)s_j = \sum_i R^i_j(X,Y)s_i.$$

我们有

$$D_XD_Y(s_j) = D_X(\sum_i \omega^i_j(Y)s_i)$$
$$= \sum_i X(\omega^i_j(Y))s_i + \sum_{i,k} \omega^i_j(Y)\omega^k_i(X)s_k$$
$$= \sum_i \{X(\omega^i_j(Y)) + \sum_k \omega^i_k(X)\omega^k_j(Y)\}s_i.$$

这样，

$$R^i_j(X,Y) = X(\omega^i_j(Y)) - Y(\omega^i_j(X)) - \omega^i_j([X,Y])$$

$$+\sum_{i}[\omega_i^i(X)\omega_j^t(Y)-\omega_i^i(Y)\omega_j^t(X)]$$

$$=\{d\omega_j^i+\sum_t\omega_t^i\wedge\omega_j^t\}(X,Y).$$

对于矩阵值形式，定义其外积∧为

$$(\mu\wedge\sigma)_j^i=\sum_k\mu_k^i\wedge\sigma_j^k,$$

我们就有

$$R=d\omega+\omega\wedge\omega.$$

因为我们已经知道 R 是一个 Hom(E,E)值的 2-形式，故有，在标架的变换 $s'=sg$ 下必有

$$R'=g^{-1}Rg.$$

用直接计算也可知道它. 对(*)求微分可得

$$d(g\omega')=d(\omega g).$$

记住 g 是一个 0-形式，ω 是一个 1-形式，故在微分中应注意符号规则，于是有

$$dg\wedge\omega'+gd\omega'=d\omega\wedge g-\omega\wedge dg,$$

或者由(*)式 $dg=g\omega'-\omega g$，而有

$$(g\omega'-\omega g)\wedge\omega'+gd\omega'=d\omega\wedge g-\omega\wedge(g\omega'-\omega g).$$

但这正是

$$g(d\omega'+\omega'\wedge\omega')=(d\omega+\omega\wedge\omega)g.$$

再由前面 R 的表达式 $R=d\omega+\omega\wedge\omega$，有

$$R'=g^{-1}Rg.$$

再总结一下. 令 D 为矢量从 $E\longrightarrow M$ 上的联络，则任给一个定义在 $U\subset M$ 上的标架 $s=(s_1,\cdots,s_k)$，联络 D 可以用矩阵值 1-形式 $\omega_s=(\omega_j^i)$来描述如下：

$$D_X(s_j)=\sum_i\omega_j^i(X)s_i.$$

曲率张量 R 可以用一个矩阵值 2-形式来表示：

$$R_s=d\omega_s+\omega_s\wedge\omega_s.$$

若用式 $s'=sg$ 来改变标架，将有变换规则

$$\omega_{sg}=g^{-1}dg+g^{-1}\omega_s g,$$

$$R_{sg}=g^{-1}R_s g.$$

由后一式，R 可以看作一个整体的 Hom(E,E)值的 2-形式.

尽管到了这一步，仍未到达 de Rham 群 $H^*(M)$. 为此，我们需要整体的实或复值形式. 然而它们可由 R 得出. 例如 det(R)就是一个，其理由自然是因为 $\det(g^{-1}Rg)=\det(R)$即在共轭变换 I_g 下不变. 从而是一个适当定义的整体实形式. 更一般地，考虑展开式

$$\det(t+R)=\sum_i c_i(R)t^{n-i}.$$

每一个 $c_i(R)$都是一个实值 $2i$-形式. 现在的想法是证明它们都是闭形式，它们的上同调类$[c_i(R)]\in H^{2i}(M)$是 E(设为复丛)的陈类. 这并不难证，而依赖于关于不变多项式的一些一般事实. 现在就来讨论它. $c_i(R)$自然是 R 的元的 i 次齐次多项式，R 的元是 2-形式，且有外积 $\wedge$，巧的是，这时乘积是可换的！生成这些东西的一般途径如下. 令 V 为一矢量空间且

$$F: V\times\cdots\times V\longrightarrow K=\text{基域},$$

$$(x_1,\cdots,x_p)\longmapsto F(x_1,\cdots,x_p)$$

是 p-线性映射. 于是映射

$$f: V\longrightarrow K,\quad x\longmapsto f(x)=F(x,\cdots,x)$$

显然是 $x=\sum x^i e_i$（$(e_1,\cdots,e_m)$ 是 V 的基底）的分量的 k 次齐次多项式. 现设 V 是一个 G-模，而 G 是一群. 我们可以要求 F 对 G 不变，即对任一 $g\in G$，$F(gx_1,\cdots,gx_p)=F(x_1,\cdots,x_p)$. 当然，$f$ 也是不变的，即 $f(gx)=f(x)$. 最后，我们要求 F 是对称的，即在变元$(x_1,\cdots,x_p)$的置换群 S_p 下不变. 所有这样得出的 $f(x)$都称为不变多项式，其集记为 $I(G)$. 函数 $c_i(R)$也是这类函数. 为了证明此事，取矢量空间 W，并令 $V=\mathrm{Hom}(W,W)$是 W 上的线性变换之空间，亦即 $k\times k$ 矩阵的空间，$k=\dim W$. W 上的一般线性群为 $G=GL(W)$. G 在 V 上的作用即共轭$(g,A)\longmapsto gAg^{-1}$，$g\in G$，$A\in V$. 我们要找一个不变的重线性函数 $c_i(A_1,\cdots,A_i)$使 $c_i(A,\cdots,A)=c_i(A)$. 对于线性变换 $\dot{A}$ 和

B，定义 $A\wedge B$ 为 $W\wedge W$ 上的线性变换如下：

$$(A\wedge B)(x\wedge y)=A(x)\wedge B(y)-A(y)\wedge B(x).$$

不要把它和 W^* 中的线性泛函的外积混淆(尽管用了相同的符号). 事实上 A、B 是 V 中之元，而 $A\wedge B\in\mathrm{Hom}(\Lambda^2W,\Lambda^2W)$，而且 $A\wedge B$ 是可交换的，因为

$$\begin{aligned}(B\wedge A)(x\wedge y)&=B(x)\wedge A(y)-B(y)\wedge A(x)\\&=A(x)\wedge B(y)-A(y)\wedge B(x)\\&=(A\wedge B)(x\wedge y).\end{aligned}$$

因为两次用了反交换性，一次用于交换 x 和 y，另一次用于交换 A 和 B，结果符号反而对了. 更一般地说，设已知 V 中的 $A_1,\cdots,A_p$，定义 $A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_p$ 为 $\mathrm{Hom}(\Lambda^pW,\Lambda^pW)$中之元如下：

$$\begin{aligned}&(A_1\wedge\cdots\wedge A_p)(x_1\wedge\cdots\wedge x_p)\\&\quad=\sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sgn}(\sigma)A_1(x_{\sigma(1)})\wedge\cdots\wedge A_p(x_{\sigma(p)}).\end{aligned}$$

例如，设$(e_1,\cdots,e_k)$是 W 的一个基底，则

$$\begin{aligned}(A\wedge\cdots\wedge A)(e_1\wedge\cdots\wedge e_k)&=\sum_{\sigma\in S_k}\mathrm{sgn}(\sigma)Ae_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge Ae_{\sigma(k)}\\&=(\det A)e_1\wedge\cdots\wedge e_k\end{aligned}$$

即为 A 的行列式. 因为 $\dim\Lambda^kW=1$，所以上式可以重新表述为

$$\det A=\mathrm{tr}(A\wedge\cdots\wedge A).$$

更一般地，如果我们定义

$$c_i(A_1,\cdots,A_i)=\mathrm{Tr}(A_1\wedge\cdots\wedge A_i),$$

则有

$$\det(t+A)=\sum\mathrm{Tr}\underbrace{(A\wedge\cdots\wedge A)}_{i\text{个}A}t^{n-i},$$

我们已经看到 $c_i(A_1,\cdots,A_i)$是对称的，又熟知迹函数是不变的，故得上述结果.

找一个重线性函数 $F(A_1,\cdots,A_p)$使其“对角值”$F(A,\cdots,A)=f(A)$为我们真正关心的函数(F 称为 f 的“极化”)，其理由如下：若

A 为一形式的矩阵 $A=(A_{ij})$，可以定义 $dA=(dA_{ij})$. 由重线性显然可得

$$dF(A_1,\cdots,A_p) = \sum_{i=1}^{p} F(A_1,\cdots,dA_i,\cdots,A_p). \tag{1}$$

另一方面，由 F 的不变性质有以下推论. 记住 $G=GL(W)$ 在 $V=\mathrm{Hom}(W,W)=gl(W)=(G$ 的李代数$)$上的伴随表示即$(g,A)\longmapsto gAg^{-1}$. 若 $X\in V$ 是一切向量而 $g(t)$是 G 中的曲线且$g(0)=I$, $g'(0)=X$, 我们在第五章中已见到

$$\frac{d}{dt}[g(t)Ag(t)^{-1}]\bigg|_{t=0} = [X,A]$$

即括弧运算. 容易看到同样的格式可以用于 X, A 为矩阵值形式而乘法理解为上面定义的 $\wedge$ 的情况. 不变性意味着

$$F[g(t)A_1g(t)^{-1},\cdots,g(t)A_pg(t)^{-1}]=F(A_1,\cdots,A_p)$$

即为与 t 无关的常值函数. 双方取$\frac{d}{dt}$并令 $t=0$, 则按重线性规则应有

$$\sum_{i=1}^{p} F(A_1,\cdots,[X,A_i],\cdots,A_p) = 0, \tag{2}$$

X 可以是任意的矩阵值形式.

如果把(1)和(2)同时应用于曲率形式 R, 就会出现奇迹. 令 ω 为局部联络形式，使得

$$R = d\omega + \omega\wedge\omega.$$

双方求导就有

$$\begin{aligned} dR &= d\omega\wedge\omega-\omega\wedge d\omega=(R-\omega\wedge\omega)\wedge\omega-\omega\wedge(R-\omega\wedge\omega)\\ &=R\wedge\omega-\omega\wedge R=[R,\omega]. \end{aligned}$$

此式称为 Bianchi 恒等式，由它即有

$$\begin{aligned} dF(R,\cdots,R) &= \sum_i F(R,\cdots,dR,\cdots,R)\\ &= \sum_i F(R,\cdots,[R,\omega],\cdots,R) = 0. \end{aligned}$$

我们所谓非常一般的性质就是指此. Bianchi 恒等式意味着，所有

不变多项式若以曲率张量 R 代入必给出一闭形式. 我们还要提醒, ω 虽非整体形式, $dF=0$ 却是一个使以上所述在一局部坐标邻域 U 中成立的局部条件.

现在又走近了一步, 但还有一个在概念上很重要的障碍. 一个类要是丛的示性类, 它必须是函子的, 即必需自然地依赖于丛的拓扑. 因为我们的类来自联络, 其中已有相当的任意性, 这一点必须除去. 令 D_1 和 D_0 是 E 上的两个联络. 考虑它们作为算子的差 $A=D_1-D_0$. 现在重要的是要看到, A 并不是一个联络, 因为 Leibnitz 法则不成立:

$$A_X(fs)=D_{1X}(fs)-D_{0X}(fs)$$
$$=X(f)s+fD_{1X}(s)-X(f)s-fD_{0X}(s)=fA_X(s).$$

但从形式角度来看, 它不成立反而更好. A 对于函数系数是线性的, 所以作为一个形式是合格的, 它是一个 Hom(E,E)-值的 1-形式. 换一个说法, A 的局部表示

$$a=\omega_1-\omega_0$$

变换如下:

$$ga'=g\omega_1'-g\omega_0'=dg+\omega_1 g-dg-\omega_0 g=ag,$$

所以 a 可以代入任意不变多项式 f 之中而得出一个整体形式 $f(a)$. 令 t 为一实变量并考虑同伦

$$D_t=D_0+ta.$$

易知 D_t 确为联络. 它的局部联络形式是

$$\omega_t=\omega_0+ta,$$

而它的曲率形式是

$$R_t=d\omega_t+\omega_t\wedge\omega_t=d\omega_0+tda+(\omega_0+ta)\wedge(\omega_0+ta)$$
$$=R_0+t\{da+a\wedge\omega_0+\omega_0\wedge a\}+t^2a\wedge a.$$

所以

$$\frac{dR_t}{dt}=da+a\wedge\omega_0+\omega_0\wedge a+2ta\wedge a.$$

设已知一重线性对称函数 $F(A_1,\cdots,A_r)$, 考虑 $F(da,R_t,\cdots,R_t)$. 和

前面一样，我们有

$$dF(\alpha,R_t,\cdots,R_t)=F(d\alpha,R_t,\cdots,R_t)+(p-1)$$

$$F(\alpha,[R_t,\omega_t],R_t,\cdots,R_t).$$

对于不变性则要小心一点，因为 α 现在是一个 1-形式. 所以例如求导以后会有

$$\frac{d}{ds}(g(s)\alpha g(s)^{-1})\Big|_{s=0}=\frac{dg(s)}{ds}\Big|_0\wedge\alpha-\alpha\frac{d}{ds}(g(s)^{-1})\Big|_{s=0}$$

$$=g'(0)\wedge\alpha-\alpha\wedge(-g'(0))=g'(0)\wedge\alpha+\alpha\wedge g'(0).$$

它意味着，不变性质现在成为：对任意矩阵 1-形式 $A(=g'(0))$，

$$F(A\wedge\alpha+\alpha\wedge A,R_t,\cdots,R_t)+(p-1)$$

$$F(\alpha,[A,R_t],R_t,\cdots,R_t)=0.$$

对 $A=\omega_0$ 和 $A=t\alpha$ 分别应用上式，即有

$$F(\alpha\wedge\omega_0+\omega_0\wedge\alpha+2t\alpha\wedge\alpha,R_t,\cdots,R_t)$$

$$=-(p-1)F(\alpha,[\omega_t,R_t],\cdots,R_t)$$

$$=dF(\alpha,R_t,\cdots,R_t)-F(d\alpha,R_t,\cdots,R_t)$$

亦即

$$F\left(\frac{dR_t}{dt},R_t,\cdots,R_t\right)=dF(\alpha,R_t,\cdots,R_t).$$

另一方面，由重线性知，

$$\frac{d}{dt}F(R_t,\cdots,R_t)=pF\left(\frac{dR_t}{dt},R_t,\cdots,R_t\right).$$

双方积分，有

$$F(R_1,\cdots,R_1)-F(R_0,\cdots,R_0)$$

$$=\int_0^1\frac{d}{dt}F(R_t,\cdots,R_t)dt$$

$$=d\left\{\int_0^1 pF(\alpha,R_t,\cdots,R_t)dt\right\}.$$

所以，上同调类 $[f(R)]$ 实与联络无关而可以记为 $[f(E)]$（E 为矢量丛）. 再证明对应关系 $E\longmapsto[f(E)]$（f 是固定多项式）是函子的. 令下图为一丛映射

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{E} & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \widetilde{M} & \xrightarrow[\varphi]{} & M \end{array}$$

而 D 为 E 上的联络，可以定义 $\widetilde{E}$ 上的拉回联络 $\widetilde{D}=\varphi^*(D)$ 如下．令 $s=(s_1,\cdots,s_t)$ 是 E 在 $U\subset M$ 上的局部标架，$\omega=(\omega_j^i)$ 是 D 的局部联络形式．记住 $\widetilde{E}$ 可以看作是 E 的拉回

$$\begin{aligned} \widetilde{E} &= \varphi^*(E) \\ &= \left\{ (\tilde{x},e) \,\middle|\, \varphi(\tilde{x}) = \pi(e) \right\} \subset \widetilde{M} \times E, \end{aligned}$$

即可定义 $\widetilde{U}=\varphi^{-1}(U)$ 上的截口 $\tilde{s}_i$ 为

$$\tilde{s}_i(\tilde{x}) = (\tilde{x}, s_i(\varphi(\tilde{x}))).$$

于是 $\tilde{s}=(\tilde{s}_1,\cdots,\tilde{s}_t)$ 是 $\widetilde{E}$ 在 $\widetilde{U}$ 上的局部标架．我们定义 $\widetilde{D}$ 为下式

$$\widetilde{D}_X(\tilde{s}_j) = \sum_i (\varphi^*\omega_j^i)(X)\tilde{s}_i,$$

于是 $\widetilde{D}$ 之联络形式为 $\tilde{\omega}=(\tilde{\omega}_j^i)=(\varphi^*\omega_j^i)$．显然，对任意不变多项式 f 有 $f(\widetilde{R}) = \varphi^* f(R)$．

现在已完全准备好了可以证明$[c_i(R)]$即为陈类了．回想一下陈类是怎样构造出来的．先考虑万有线丛 $\gamma\longrightarrow \mathbf{CP}^n$，对于 γ，$c(\gamma)=c_1(\gamma)\in H^2(\mathbf{CP}^n)$是典则的生成元．这就是说 $\mathbf{CP}^1=S^2$ 有一典则定向．$[S^2]\in H_2(S^2)$因为 S^2 是一复形．嵌入 $i:\mathbf{CP}^1\longrightarrow\mathbf{CP}^n$ 给出一个同调类 $i_*[S^2]\in H_2(\mathbf{CP}^n)$．$c_1(\gamma)$的特性是

$$\left\langle c_1(\gamma), i_*[S^2] \right\rangle = 1.$$

现在证明一个一般命题

$$c(E_1 \oplus E_2) = c(E_1)c(E_2).$$

由此可知任一个可以分裂为线丛的丛 $E=E_1\oplus\cdots\oplus E_k$ 都有完全确定的 $c(E)$．最后，我们知道丛 $E\longrightarrow BU(n)$在通过 π 提升到 BT 上以后恒可分裂：

$$\begin{array}{ccc} EU(n) & & \\ & \searrow & \\ \downarrow & & BT. \\ & \swarrow_{\pi} & \\ BU(n) & & \end{array}$$

所以 $c(\pi^* E)=\pi^* c(E)$ 也是完全确定的. 由 Borel 定理, π^* 是单射(这是一个独立的同调定理), 所以 $c(E)$ 也是完全确定的. 总结一下: 任一个函子的对应关系 $E \longmapsto c(E)$, 若满足乘积规则并且对万有线丛 γ 给出正确的上同调类, 则必为陈类. 这当然就是陈类的公理化的描述. 现在, 关于

$$\det(t+A)=c(A)=\sum_{i=1}^{k} c_i(A)t^{k-i}$$

一件完全清楚的事是, 对于 $A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, 确有

$$c(A)=c(A_1)c(A_2).$$

所以余下要做的就只有: 得出在 $\gamma \longrightarrow \mathbf{CP}^n$ 上的一个联络 D 使得

$$\det(t+R)=\det R=R \quad (\dim\gamma=k=1)$$

给出正确的类. 按 de Rham 群来说, 这意味着, 2-形式 R 应适合

$$\int_{S^2} R=1.$$

然而在第八章中已证明了这一点. 用第八章中的记号, 在 $U_i=\left\{[z_0,\cdots,z_n] \,\middle|\, z_i\neq 0\right\}$ 上用

$$\omega_i=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\left[\log(1+\sum_{j\neq i}\omega_j\bar{\omega}_j)\right], \omega_j=z_j/z_i$$

来定义的 2-形式 R 确是一个适当定义的整体形式, 使得 $\int_{S^2} R=1$. 现在要做的仅是证明 ω 是某个联络形式 D 的曲率形式. 在 U_i 上定义

$$\omega_i=\partial\left\{\log(1+\sum_{j\neq i}\omega_j\bar{\omega}_j)\right\}$$

要证明它确是一个联络, 只要证明在 $U_i\cap U_k$ 上有变换规则

$$g\omega_k = dg + \omega_i g$$

即可. 现在 g 是一个 1×1 矩阵, 这意味着

$$\omega_k = \frac{dg}{g} + \omega_i.$$

但我们在第八章中已经证明了

$$1 + \sum_{j\neq k}\omega_j'\overline{\omega}_j' = |z|^2\left(1 + \sum_{j\neq i}\omega_j\overline{\omega}_j\right),$$

这里 $z = z_i/z_k$ 正是万有线丛 γ 的迁移函数. 故

$$\omega_k = \partial\log|z|^2 + \omega_i = \frac{\partial(z\bar{z})}{|z|^2} + \omega_i$$

$$= \frac{\bar{z}\partial z}{|z|^2} + \omega_i = \frac{\partial z}{z} + \omega_i = \frac{dg}{g} + \omega_i.$$

恰好是对的. 还要作最后的调整. 要乘上一个因子$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}$. 但是我们不能用一常数 λ 去乘一个联络 D, 因为 λD 不再是联络了. 我们能做的只是调整一下定义. 对一个复矢量丛 E, 令 D 为 E 上的一个联络而 R 是它的曲率形式. 于是陈类可以由

$$\det\left(t + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R\right) = \sum_{i=0}^{k} c_i(R)t^{k-i}$$

来计算.

回头来看, 这个定义与老的并没有真正的不同. 如果我们设矩阵 R 是对角的(即丛 E 可以分裂为线丛), 则 $c_i(R)$ 正是 $R=(R_1, \cdots, R_k)$ 的初等对称函数, $c(E)$ 在 Borel 格式中就是这样定义的. 但是有一点重要的说明. 由定义, $c_i(R)$ 是复值形式, 所以现在的定义使 $c_i(R)$ 在 $H^*(M;\mathbf{C})$ 中而有复系数(但实际上, 可以使 $c_i(R)$ 是在实的 $H^*(M;\mathbf{R})$ 中). Borel 格式把 $c(E)$ 定义在整数上同调 $H^*(M,\mathbf{Z})$ 中. 当然可以把 $\mathbf{Z}$ 嵌入到 $\mathbf{C}$ 中, 这诱导出一个映射 $i_*: H^*(M;\mathbf{Z}) \longrightarrow H^*(M;\mathbf{C})$. 但 i_* 不一定是一对一的. 例如, 所有的扭元素都被 i_* 消除. 所以使用曲率的结果是比示性类更弱的说法.

再继续下去, 也可以这样得出 Pontrjagin 类, 因为它们正是复化丛的陈类. 如果把这做出来, 就会看到, 对一个实矢量丛 E, 若 D

是一联络，R 是其曲率，E 之 Pontrjagin 类 $p(E)$ 可以从以下展式中得到

$$\det(t-\frac{1}{2\pi}R)=\sum_{i=0}^{k}E_i(R)t^{k-i}\quad(k=\dim E).$$

在 $[E_i(R)]\in H^{2i}(M;R)$ 中，i 为奇时 $[E_i(R)]=0$，而 $[E_{2i}(R)]=p_i(E)\in H^{4i}(M;R)$ 是实系数 Pontrjagin 类.

由第十五章的讨论可知，陈类生成 $H^*(BU(n);R)$，而 Pontrjagin 类生成 $H^*(BSO(2n+1);R)$. 再有一个新类就可以把事情弄完全了，这就是 $H^*(BSO(2n);R)$ 的 Euler 类 χ. 这就是我们想要找的推广的 Gauss-Bonnet 定理. 结果如下：令 E 为偶数维 ($\dim E=2k$) 可定向的实矢量丛，D 是 E 上一个联络而 R 是其曲率形式. 定义其 Pfaff 形式 $\mathrm{Pf}(R)$ 为

$$\mathrm{Pf}(R)=\sum_{\sigma\in S_{2k}}\mathrm{sgn}(\sigma)R_{\sigma(1)\sigma(2)}\wedge R_{\sigma(3)\sigma(4)}\wedge\cdots\wedge R_{\sigma(2k-1)\sigma(2k)}.$$

于是我们有

推广的 Gauss-Bonnet-陈定理 E 的 Euler 类 $\chi(E)\in H^{2k}(M;R)$ 是

$$\frac{1}{2^{2k}\pi^k k!}[\mathrm{Pf}(R)]$$

注意对于 $k=1$，

$$\mathrm{Pf}(R)=R_{12}-R_{21}=2R_{12}=2K\mu(M),$$

$\mu(M)$ 是 M 的体积元素. 于是

$$\frac{\mathrm{Pf}(R)}{4\pi}=\frac{K}{2\pi}\mu(M),$$

这就是曲面的 Gauss-Bonnet 定理.

§4. 主丛上的联络

因为根据曲率可得向量丛的示性类，自然问及同样的模式是否可推广至一般情形，这就是说，由于向量丛是以一般线性群

$GL(n)$作构造群的丛，而我们前面提到过，向量丛经常可以从具有构造群 G 的一般主丛 P 与 G-空间 V 的扭积 $E=P\times_G V$ 而得到. 似乎可以对丛 P 给以联络的概念然后将其转移到向量丛上. 初一看，这个想法似乎不大自然，因为方向导数的每一种观念都意味着我们需要线性结构（方向），然而注意 $D_X(s)$ 中的线性结构是表现在 X 中，即 M 的切丛 $T(M)$ 中，而不是在截口 s 上. 事实上考察一下上一节所展开的形式体系（顺便提一下，这是始自 E. Cartan 的工作），可以看出，我们早就开始从线性丛 E 向与之相关的主丛 P 转换. 回忆一下，点 $p\in M$ 上的主丛 P 上的一个点其实就是 E_p 上的标架 $s(p)=\{s_1(p),\cdots,s_k(p)\}$，所以定义在 $U\subset M$ 上的局部标架 s 无非就是丛 P 定义在 U 上的截口. 结合到 s 的局部联络形 $\omega_s=(\omega_j^i)$ 是一个矩阵值形式，即取值在 $GL(n)$ 的 Lie 代数$\mathscr{G}l(n)$中的 1-形式. 因此若设一般主丛 P 的构造群为 Lie 群 G，而 $\mathscr{G}$ 为 G 对应的 Lie 代数. 若能在 P 上定义联络，则其对应的局部联络形式 ω_s 应该是在 $\mathscr{G}$ 中取值的 1-形式. 当然不是任意的 $\mathscr{G}$ 值 1-形式均可作为局部联络形式. 由上节知，若 $U'\subset M$，且 $s'=sg(g\in GL(n))$在 U' 上的局部联络形式为 $\omega_s{}'=\omega_{sg}$，则在 $W=U\cap U'$ 上二者应满足联络的变换公式 $g\omega_{sg}=dg+\omega_s g$，或者等价地写成

$$\omega_{sg}=g^{-1}\cdot dg+g^{-1}\omega_s g, \tag{$*$}$$

因此我们预期若要在一般主丛 P 上定义联络，它的局部联络形式也应该满足类似的式子（ * ）. 但是我们通过以下的分析会知道，不能直接用（ * ）式，还要加以适当变形.

先看第二项，当 $G=GL(n)$时，有 $\mathscr{G}=\mathscr{G}l(n)$，则上节已提到过 $g^{-1}\omega_s g$ 涉及的是通常的矩阵运算. 但在一般情形，$g,g^{-1}\in G$，而 ω_s 是$\mathscr{G}$值 1-形式，g,g^{-1}与 ω_s 就无法相乘，所以需要稍加处理，设 g : $W\longrightarrow G$，则 $L_{g^{-1}}\circ R_g: h\longmapsto g^{-1}hg(h\in G)$定义了一个内自同构 $L_{g^{-1}}\circ R_g: G\longrightarrow G$. 在 $e\in G$ 处的微分

$$d(L_{g^{-1}}\circ R_g)_e: T_e(G)\longrightarrow T_e(G)$$

即 $dL_{g^{-1}}\circ dR_g: \mathscr{G}\longrightarrow\mathscr{G}$，而在线性群情形 $L_{g^{-1}}\circ R_g=dL_{g^{-1}}\circ dR_g$，所

以 $g^{-1}\omega_s g = L_{g^{-1}} \circ R_g(\omega_s) = dL_{g^{-1}} \circ dR_g(\omega_s)$. 记 $\mathrm{Ad}(g^{-1}) = dL_{g^{-1}} \circ dR_g$，映射 $\mathrm{Ad}: g \longmapsto \mathrm{Ad}(g)$ 称为 G 在 $\mathscr{G}$ 中之伴随表示. 由此可知 $(*)$式第二项可以改写成 $\mathrm{Ad}(g^{-1})\omega_s$.

第一项更麻烦一些，在线性群 $GL(n)$ 的情形，$g: W \longrightarrow GL(n)$ 是一个矩阵值函数，所以 $dg: W \longrightarrow \mathscr{G}$ 也是一个矩阵值函数，并且 $g^{-1}dg: W \longrightarrow \mathscr{G}$ 就是矩阵值函数的乘积，在一般情形，dg 取值在 $\mathscr{G}$ 中，g^{-1} 取值在 G 中，并且我们在 G 与 $\mathscr{G}$ 之间没有定义乘法. 用下述方法来对待这一点. 对于点 $p \in W$ 和向量 $X_p \in T_p(M)$，$dg(X_p) \in T_{g(p)}(G)$，这不是 Lie 代数 $\mathscr{G} = T_e(G)$，当然我们可以对它作平移，我们将利用右平移 $dR_{g(p)^{-1}}$，由此可得一 $\mathscr{G}$ 值 1-形式

$$X_p \in T_p(M) \longmapsto dR_{g(p)^{-1}}(dg(X_p))$$

用 $\hat{dg}$ 来表示此对应. 选取右平移的原因在于 $g^{-1}dg$ 现在可以写成

$$g(p)^{-1}dR_{g(p)} \cdot dR_{g(p)^{-1}}dg(X_p) = (g(p)^{-1}dR_{g(p)})\hat{dg}(X_p),$$

记得在线性情形 $g(p)^{-1} = L_{g(p)^{-1}} = dL_{g(p)^{-1}}$，所以 $g(p)^{-1}dR_{g(p)} = dL_{g(p)^{-1}}dR_{g(p)} = \mathrm{Ad}(g(p)^{-1})$. 因此我们可以将公式$(*)$改写成

$$\omega_{sg} = \mathrm{Ad}(g^{-1})[\hat{dg} + \omega_s]. \qquad (**)$$

它完全是用一般的 Lie 群 G 及其 Lie 代数 $\mathscr{G}$ 来表示的. 所以，流形 M 上的一般的主 G-丛 $P \longrightarrow M$ 上的联络就是对 P 的每个局部截口 $s: U \longrightarrow P$ 给出一族 $\mathscr{G}$ 值形式$\{\omega_s\}$，使当截口变换时$(**)$式成立.

上面的定义是完全足够了，即若 D 是一个主 G-丛上的联络，则对 G 的任一表示 V，D 自然地在与 P，V 相关的矢量丛 $E = P \times_G V$ 上诱导出一个联络. 然而即可通过 D 的曲率重复示性类 $H^*(BG)$ 的 Borel-Hirzebruch 程序. 但在这样做以前，我们想把这一推广再向前推进一步. 这在技术上并非那么必要，但从观念上说，它是方便的面且简单. 由于它既简单又一般，所以许多书上以它为定义，而我们最好也提一下. 这个程序是 Ehresmann 的.

Cartan 的程序的主要缺点在于它不是不变的，联络是用一组局部的数据$\{\omega_s\}$来表示的而有变换公式$(**)$. 这个变换公式反

映了一件事实,即不存在定义于整个 M 上的整体 $\mathscr{G}$ 值形式 ω 以表示联络. 有整体形式并不是说就没有变换公式,而只是说这变换公式即已包含在一般理论之中,因此不必去提它. Ehresmann 的想法则是,虽然在 M 上找不到整体形式以描述联络,但在全空间 P 上却可找到描述联络的整体形式.

回忆一下,每一个截口 $s: U \longrightarrow P$ 都给出从

$$\tilde{s}: U \times G \longrightarrow P, \quad (p,g) \longmapsto s(p)g$$

的一个局部坐标. 故对点 $x=s(p)g\in P$,每个切向量 $z\in T_x(P)$都可用唯一的 $X\in T_p(M)$和 $Y\in T_g(G)$写为

$$Z = \tilde{s}_*(X,Y).$$

我们在 $\tilde{U}=\mathrm{Im}\tilde{s}$ 上定义一个 $\mathscr{G}$ 值形式 ω 如下:

$$\omega(Z) = \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega_s(X) + dL_{g^{-1}}(Y). \tag{1}$$

这里 $X\in T_p(M)$,故由定义 $\omega_s(X)\in\mathscr{G}$,用 $\mathrm{Ad}(g^{-1})$作用后仍在 $\mathscr{G}$ 中. $Y\in T_g(G)$,所以 $dL_{g^{-1}}(Y)\in T_e(G)=\mathscr{G}$. 这样(1)是合理的. 我们说,它是适当定义的,即与表示 $Z=\tilde{s}_*(X,Y)$无关(顺便说一下,我们兼用 f_* 与 df 代表导算子,视方便而定). 故当有另一截口 $s_1: V \longrightarrow P$ 使

$$Z = \tilde{s}_{1*}(X_1,Y_1),$$

(但取 $V=U$),故有迁移函数 φ,而得

$$(\tilde{s}_1^{-1}\tilde{s}_*)(X,Y) = (X, dL_{\varphi(p)^{-1}}(Y) + dR_g(\varphi^{-1}(X))),$$

因 $x=s_1(p)g_1$,故用 $\tilde{s}_1$ 表示时当有

$$\omega(Z) = \mathrm{Ad}(g_1^{-1})\omega_{s_1}(X_1) + dL_{g_1^{-1}}(Y_1). \tag{2}$$

按变换公式(* *)则有

$$\omega_{s_1} = \mathrm{Ad}(\varphi^{-1})[\omega_s + d\varphi].$$

由定义

$$(\mathrm{Ad}(\varphi^{-1})\omega_s)(X) = \mathrm{Ad}(\varphi(p)^{-1})\omega_s(X).$$

故

$$\mathrm{Ad}(g_1^{-1})\mathrm{Ad}(\varphi^{-1})\omega_s(X) = \mathrm{Ad}(g_1^{-1})\mathrm{Ad}(g_1g^{-1})\omega_s(X)$$

$$= \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega_e(X).$$

又由定义有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ad}(g_1^{-1})[\mathrm{Ad}(\varphi^{-1})d\varphi(X)] \\
&= \mathrm{Ad}(g_1^{-1})\mathrm{Ad}(\varphi^{-1})dR_{\varphi(p)^{-1}}(\varphi_*(X)) \\
&= \mathrm{Ad}(g^{-1})dR_{\varphi(p)^{-1}}(\varphi_*(X)),
\end{aligned}$$

还有

$$dL_{g_1^{-1}} \circ dL_{\varphi(p)^{-1}}(Y) = dL_{g^{-1}}(Y).$$

比较(1)与(2)可见，为使二者相等，应有

$$\mathrm{Ad}(g_1^{-1})dR_{\varphi(p)^{-1}}(\varphi_*(X)) + dL_{g_1^{-1}}dR_g\varphi_*^{-1}(X) = 0. \qquad (3)$$

令 $j: G \longrightarrow G$ 为求逆映射，即 $j(x)=x^{-1}$. 我们知道，在 $x=e$ 处，$dj(X)=-X$. 但现在 $\varphi_*(X)\in T_{\varphi(p)}(G)$，$\varphi^{-1}=j\varphi$，故需在 $\varphi(p)=h$ 处计算 dj. 这并不太难. 考虑

$$\begin{array}{ccccc}
x & G & \xrightarrow{j} & G & x^{-1} \\
\downarrow & \downarrow dL_{h^{-1}} & & & \downarrow \\
 & G & \xrightarrow{j} & G & \\
h^{-1}x & & \longrightarrow & & x^{-1}h,
\end{array}$$

知在 $x=h$ 处

$$(dj)_h = dR_{h^{-1}}(dj)_e dL_{h^{-1}} = -dR_{h^{-1}}dL_{h^{-1}}.$$

由此式即得

$$\varphi_*^{-1}(X) = -dR_{\varphi(p)^{-1}}dL_{\varphi(p)^{-1}}(\varphi_*(X)).$$

从而

$$dL_{g^{-1}}dR_g\varphi_*^{-1}(X) = -dL_{g^{-1}}dR_g dR_{\varphi(p)^{-1}}dL_{\varphi(p)^{-1}}(\varphi_*(X)).$$

注意

$$dL_{g_1^{-1}}dL_{\varphi(p)^{-1}} = dL_{g_1^{-1}\varphi(p)^{-1}} = dL_{g^{-1}},$$

我们有

$$\begin{aligned}
dL_{g_1^{-1}}dR_g\varphi_*^{-1}(X) &= -dL_{g^{-1}}dR_g dR_{\varphi(p)^{-1}}(\varphi_*(X)) \\
&= -\mathrm{Ad}(g^{-1})dR_{\varphi(p)^{-1}}(\varphi_*(X)).
\end{aligned}$$

这正说明(3)式成立.

这些细节完成以后还有一点关键. 在由 ω_s 转到 ω_{s_1} 时"多出"了一项 $\mathrm{Ad}(\varphi^{-1})d\varphi$. 所幸在变换 z 之表示时也会多出一项 $P_2\tilde{s}_1{}_*\tilde{s}_*(X)$ 而二者相消.

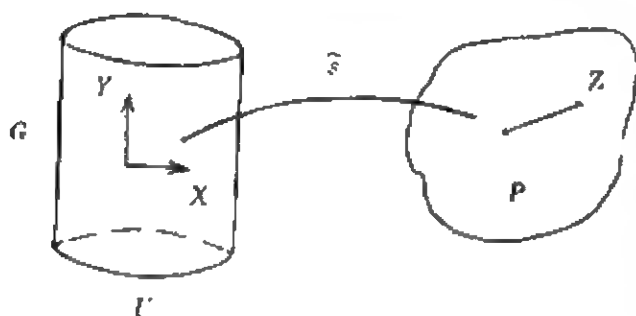
由 ω 自可得出 $\{\omega_s\}$, 这就是:

$$\omega_s = s^*(\omega),\quad s: U \longrightarrow P \text{ 为一截口}. \tag{4}$$

要想用 ω 作为联络定义的基础, 就需知道它有何性质, 使得当用(4)式在 M 上得出 Cartan 的数据 $\{\omega_s\}$ 时, (* *)成立.

使用现在的程序有一困难, 即不易看出 P 之切丛 $T(P)$, 它本身也是 M 上的一个丛. 从逻辑上说, P 既为一流形, 则想象 $T(P)$ 并不比想象其它流形的切丛更难或更易. 然而应该指出, 我们的基本几何对象是流形 M, 而我们感到 $T(M)$ 是某个看得见的东西. 但切丛 $T(P)$ 说到底只是一种记载东西的方式其目的在于使我们可以用不变的方式处理问题. 对付 $T(P)$ 的最好的方式也许是用局部坐标, 而我们总是这样做的. 若 $s: U \longrightarrow P$ 是一局部截口, $\tilde{s}: U\times G \longrightarrow P$, $(p,g)\longmapsto pg$ 就是一局部坐标, 故一个切向量 $Z\in T_x(P)$, $x=pg$, 就应为

$$Z = \tilde{s}_*(X,Y),$$



$X\in T_p(M)$, $Y\in T_g(G)$. 这样, 我们总想把来自底空间的 X 称为"水平"部分, 而把来自群 G 的 Y 称为"铅直"部分. 但是易见水平部分没有内蕴的意义, 经计算得

$$\tilde{s}_1^{-1}{}_*\tilde{s}_*(X) = (X + dR_g\varphi_*^{-1}(X))$$

正反映了这一点: $dR_g\varphi_*^{-1}(X)$ 是来自坐标变换的铅直向量. 这并不奇怪. 对于一个丛, "扭"自然会毁掉平行于底的概念. 但铅直部分则是很好的想法. 令 $\pi: P \longrightarrow M$ 为投影, 我们有其导算子

$$\pi_* : T(P) \longrightarrow T(M).$$

于是对任意 $x \in P$，铅直切空间即子空间

$$V_x(P) = \ker \pi_* \subset T_x(P).$$

若记 $Z = \tilde{s}_*(X, Y)$，则 $\pi_*(Z) = X$，因子

$$V_x(P) = \{\tilde{s}_*(0, Y), Y \in T_g(G)\}.$$

可以验证，我们前面所作的计算，即

$$\tilde{s}_1^{-1} s_*(Y) = dL_{\varphi(g)^{-1}}(Y)$$

也表明 $V_x(P)$ 是适当定义的.

所以，考虑 P 上的铅直向量场是自然的. 它应与纤维 G 有关. 以下是作这样一个场的自然的方法. 对任意点 $x \in P$，考虑映射

$$\sigma_x : \quad G \longrightarrow P, g \longmapsto xg.$$

因为 $\sigma_x(e) = x$，我们有由 Lie 代数 $\mathscr{G}$ 到 $T_x(P)$ 之线性映射：

$$d\sigma_x : \mathscr{G} \longrightarrow T_x(P).$$

故对固定的 $Y \in \mathscr{G}$，映射

$$x \longmapsto d\sigma_x(Y) \in T_x(P)$$

定义了 P 上一个矢量场，记作 $\sigma(Y)$，称为由 $Y \in \mathscr{G}$ 生成的铅直向量场. 它确实是铅直的，因为对任意 $x \in P$，

$$\pi\sigma_x : \quad G \longrightarrow M, \quad g \longmapsto \pi(xg) = \pi(x)$$

是常值映射，因此

$$\pi_*(\sigma(Y)_x) = \pi_* d\sigma_x(Y) = d\pi \cdot d\sigma_x(Y) = 0.$$

关于 ω 我们要指出的第一点是，它在 $\sigma(Y)$ 上之值很简单，即有，对任意 $Y \in \mathscr{G}$，

$$\omega(\sigma(Y)) = Y. \qquad (***,1)$$

这一点很容易证明. 对 $x_0 = s(p_0)g_0 = \tilde{s}(p_0, g_0)$，考虑

$$G \xrightarrow{a} U \times G \xrightarrow{\tilde{s}} P,$$

$$g \longmapsto (p_0, g_0 g) \longmapsto s(p_0) g_0 g = \sigma_{x_0}(g).$$

故

$$\sigma(Y)_{x_0} = d\sigma_{x_0}(Y) = \tilde{s}_*(da(Y)).$$

但对于 $Y\in\mathscr{G}$,我们有

$$da(Y)=(0,dL_{g_0}(Y)).$$

于是 $\sigma(Y)_{x_0}=\tilde{s}_*(0,dL_{g_0}(Y))$,而由 ω 之定义,有

$$\omega(\sigma(Y))=dL_{g_0^{-1}}(dL_{g_0}(Y))=Y,$$

记住,对于主 G-丛 P,我们把群 G 在 P 上的作用表为右乘,故对每一点 $g\in G$,有右作用

$$R_g:\quad P\longrightarrow P,\quad x\longmapsto xg.$$

自然要问拉回 $R_g^*\omega$ 是什么? 为了算它,再看 $x=s(p_0)g_0\in P,Z=\tilde{s}_*(X,Y)\in T_x(P)$,则由定义有

$$(R_g\omega)(Z)=\omega(dR_g(Z)).$$

但 $dR_g(Z)\in T_{xg}(P)$,所以我们转到新截口 $s_1=sg$. 图式

$$\begin{array}{ccc} U\times G & \xrightarrow{\ \tilde{s}\ } & P, \\ (p,h) & \longmapsto & s(p)h \\ \Big\downarrow 1\times l_{g^{-1}} & & \Big\downarrow R_g \\ U\times G & \xrightarrow[\ \tilde{s}_1\ ]{} & P, \end{array}$$

$$(p,g^{-1}hg)\longmapsto(p,hg)=s_1(p)g^{-1}hg$$

表明

$$\omega(dR_g(Z))=\omega(dR_g\tilde{s}_*(X,Y))=\omega(\tilde{s}_{1*}(X,\mathrm{Ad}(g^{-1})Y)).$$

由 ω 的定义,由于 $xg=s_1(p)g^{-1}g_0g$,我们有

$$\begin{aligned}&\omega(\tilde{s}_{1*}(X,\mathrm{Ad}(g^{-1})(Y)))\\ &\quad=\mathrm{Ad}(g^{-1}g_0^{-1}g)\omega_{s_1}(X)+dL_{g^{-1}g_0^{-1}g}(\mathrm{Ad}(g^{-1}))(Y).\end{aligned}$$

由变换公式(* *),我们有

$$\omega_{s_1}=\mathrm{Ad}(\varphi^{-1})[d\tilde{\varphi}+\omega_s].$$

但在我们的情况下,迁移函数 $\varphi:U\longrightarrow G$ 是常值函数 $\varphi(p)=g$,从而 $d\tilde{\varphi}=0$,而上式给出

$$\begin{aligned}&\omega(\tilde{s}_{1*}(X,\mathrm{Ad}(g^{-1})(Y)))\\ &=\mathrm{Ad}(g^{-1}g_0^{-1}g)\mathrm{Ad}(g^{-1})\omega_s(X)+dL_{g^{-1}g_0^{-1}g}(\mathrm{Ad}(g^{-1}(Y))\end{aligned}$$

$$= \mathrm{Ad}(g^{-1})[\mathrm{Ad}(g_0^{-1})\omega_s(X) + dL_{g_0^{-1}}(Y)] = \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega(Z).$$

所以，ω 的第二个性质可以写作

$$(R_g^* \omega) = \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega. \qquad (* * *, 2)$$

实际上，我们全部所需即此而已，即若 ω 是任意的定义于 P 上的 $\mathscr{G}$ 值 1-形式，且服从（* * *，1）和（* * *，2），则由 $\omega_s = s^*(\omega)$ 所定义的数据 $\{\omega_s\}$ 必适合变换公式（* *）. 所需的计算公式都已讲了所以证明留待读者. 总之，我们已经证明了，以下两个定义是等价的：令 $P \longrightarrow M$ 是一光滑主 G-丛，则 P 上的联络是

Cartan 的定义　一族 $\mathscr{G}$-值 1-形式 $\{\omega_s\}$，s 是定义在 U 上的局部截口 $s: U \longrightarrow P$，而对迁移函数 $\varphi: U \cap V \longrightarrow G$ 有

$$\omega_{s\varphi} = \mathrm{Ad}(\varphi^{-1})[\omega_s + d\tilde{\varphi}]. \qquad (* *)$$

Ehresmann 的定义　具有以下二性质的、定义于 P 上的 $\mathscr{G}$-值 1-形式 ω：

$$\omega(\sigma(Y)) = Y, \quad Y \in \mathscr{G}, \qquad (* * *, 1)$$

$$R_g^* \omega = \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega, \quad g \in G. \qquad (* * *, 2)$$

等式(1)和(4)说明这两个定义可以互换.

有了定义以后即可达到我们所需的最广泛的情况. 但只要有需要，仍然容易回到线性情况即矢量丛的情况. 例如，若 V 是一个 G-空间，把表示看作一个同态

$$a: G \longrightarrow GL(V),$$

则有诱导同态

$$da: \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{G}l(V).$$

故若 $\{\omega_s\}$ 是主丛 P 上的 Cartan 联络，$\{da \circ \omega_s\}$ 容易证明是相关的矢量丛 $P \times_G V$ 上的联络.

下一个问题自然就是在一般情况下如何定义曲率形式. 记住在矢量丛的线性情况下，R 局部地由下式给出：

$$R = d\omega_s + \omega_s \wedge \omega_s = d\omega + \omega \wedge \omega.$$

第一项即形式的外微分，只要 ω 在一线性空间中取值它就有意义，所以对 $\mathscr{G}$ 值形式没有问题. 第二项大家记得是矩阵型外积：

$$(\omega \wedge \omega)_{ij} = \sum_k \omega_k^i \wedge \omega_j^k.$$

因为一般的 Lie 代数并非矩阵，这一项不能推广. 我们应该采用 Lie 代数运算. 下面的作法似乎是自然的. 令 μ,ν 均为 Lie 代数 $\mathscr{G}$-值形式，其次数分别为 p 与 q，定义括弧$[\mu,\nu]$为一$(p+q)$次 $\mathscr{G}$-值形式如下：

$$[\mu,\nu](X_1,\cdots,X_{p+q}) = \sum_{\sigma\in S_{p+q}} \mathrm{sgn}(\sigma)[\mu(X_{\sigma(1)},\cdots,X_{\sigma(p)}),\\ \nu(X_{\sigma(p+1)},\cdots,X_{\sigma(p+q)})].$$

容易验证它是适当定义的，即$[\mu,\nu]$是斜对称的. 但因 μ,ν 是形式而不是 $\mathscr{G}$ 中之元，所以使用起来要多加小心. 例如，若 μ 是 1-形式，$[\mu,\mu]$不一定是零，因为

$$\begin{aligned}[\mu,\mu](X,Y) &= [\mu(X),\mu(Y)] - [\mu(Y),\mu(X)] \\ &= 2[\mu(X),\mu(Y)].\end{aligned}$$

取 $\mathscr{G}=\mathscr{G}l(V)$为矩阵 Lie 代数，我们有

$$[\mu(X),\mu(Y)] = \mu(X)\mu(Y) - \mu(Y)\mu(X).$$

另一方面，由定义

$$\begin{aligned}(\omega \wedge \omega)_{ij}(X,Y) &= \sum_k (\omega_k^i \wedge \omega_j^k)(X,Y) \\ &= \sum_k \omega_k^i(X)\omega_j^k(Y) - \omega_k^i(Y)\omega_j^k(X).\end{aligned}$$

用矩阵表示即为

$$(\omega \wedge \omega)(X,Y) = \omega(X)\omega(Y) - \omega(Y)\omega(X).$$

所以，用我们新定义的运算来写即有

$$\omega \wedge \omega = \frac{1}{2}[\omega,\omega].$$

因为右方对任何 $\mathscr{G}$-值形式均有意义，故可定义主 G-丛 P 上的 Cartan 联络$\{\omega_\alpha\}$的曲率形式 R 可以局部地表为

$$R_\alpha = d\omega_\alpha + \frac{1}{2}[\omega_\alpha,\omega_\alpha].$$

这个式子虽然看起来合理，要判断它是否“正确”的定义. 关键要看

在截口改变时它怎样变换. 记住,对于矢量丛(见前节),变换公式是

$$R_{s\varphi} = \varphi^{-1}R_s\varphi,$$

$\varphi: U\cap V \longrightarrow R$ 是迁移函数. 记住这是"正确"的变化方式(反之局部联络形式$\{\omega_s\}$的变换公式则是"不正确"的),因为它表明 R 可以看成是定义在整个 M 上而值在丛 Hom(E,E)中的整体形式. 这种考虑实为关键,所以不妨多费些力气讲一下细节. 令 $s=(s_1,\cdots,s_k)$ 为定义在 U 上的局部标架,则同态 $a\in$ Hom(E,E)局部地可以用矩阵表示,而有

$$(as)_j = \sum_i a_{ij}s_i.$$

即是说 $a\longmapsto(a_{ij})$是 Hom$(E,E)|U\simeq U\times\mathscr{G}l(n)$的一个局部坐标. 所以一个 Hom$(E,E)$-值形式 ω 可以用矩阵来表示,即若 X 为 M 上的矢量场,有

$$X\longmapsto(a_{ij}(X)).$$

若将 s 变为 $s'=s\varphi$,$\varphi: U\longrightarrow GL(n)$为迁移函数,

$$a\longmapsto(a'_{ij})$$

是一个新的表示,即有

$$(as)'_j = \sum_i a'_{ij}s'_i.$$

这就是说

$$a(\sum_k s_k\varphi_{kj}) = \sum_{i,l} a'_{ij}s_l\varphi_{li}.$$

但式左为 $\sum_{k,l} a_{lk}\varphi_{kj}s_l$, 故上式用矩阵表示即为

$$a\varphi = \varphi a',\text{或}\ a' = \varphi^{-1}a\varphi.$$

若 X 为一矢量场,则局部表示 $a'(X)$与 $a(X)$间有

$$a'(X) = \varphi^{-1}a(X)\varphi,$$

这表示,在点 $p\in M$ 处,其值之间有关系式

$$a'(X)_p = \varphi^{-1}(p)a(X)_p\varphi(p).$$

这是"正确"的变换公式.

但在一般的主 G-丛 P 上，即没有矢量丛 E 也没有丛 Hom(E, E). 但这不成问题，上述计算表明，对 $G=GL(n)$，Hom(E, E)即是相应于主丛 P 的丛，其纤维为 $\mathscr{G}l(n)=L(G)=\mathscr{G}$ 而 G 以伴随表示作用于 $\mathscr{G}$ 上，即有

$$\mathrm{Hom}(E,E) = P \times_G \mathscr{G}.$$

右方对一般的丛也是有意义的. 为了使 R 成为 M 上的 $P\times_G\mathscr{G}$-值形式，它应该可以局部地表为 $\mathscr{G}$-值形式 R_s，而且服从变换规则

$$R_{s\varphi} = \mathrm{Ad}(\varphi^{-1})R_s.$$

为证明此式确实成立，还要费一点劲，所以要花点时间把它做出来.

首先，记住在变换公式

$$\omega_{s\varphi} = \mathrm{Ad}(\varphi^{-1})[d\hat{\varphi} + \omega_s]$$

中，$\mathscr{G}$-值形式 $d\hat{\varphi}$定义如下：给定 $X\in T_p(M)$，有

$$d\hat{\varphi}(X) = dR_{\varphi(p)^{-1}}(d\varphi(X)), \quad \varphi: U \longrightarrow G.$$

这件事可以改述如下：在流形 G 上定义一 $\mathscr{G}$-值形式 α，使对 $X\in T_g(G)$有

$$\alpha(X) = dR_{g^{-1}}(X).$$

考虑拉回形式 $\varphi^*(\alpha)$. 由定义，给定 $X\in T_p(M)$，

$$[\varphi^*(\alpha)](X) = \alpha(d\varphi(X)).$$

因 $d\varphi(X)\in T_{\varphi(p)}(G)$，由定义

$$\alpha(d\varphi(X)) = dR_{\varphi(p)^{-1}}(d\varphi(X)) = d\hat{\varphi}(X).$$

故有

$$d\hat{\varphi} = \varphi^*(\alpha).$$

这是很好的，因为拉回运算与外微分 d 可交换.

G 上的形式 α 是右不变的，即对任意 $g_0\in G$，

$$R_{g_0}^*(\alpha) = \alpha.$$

这是因为，给定 $X\in T_g(G)$后，有

$$[R_{g_0}^*(\alpha)](X) = \alpha[dR_{g_0}(X)]$$

$$= dR_{(gg_0)^{-1}} dR_{g_0}(X) = dR_{g_0^{-1}g^{-1}} \circ dR_{g_0}(X)$$
$$= dR_{g^{-1}} \circ dR_{g_0^{-1}} \circ dR_{g_0}(X) = dR_{g^{-1}}(X) = \alpha(X).$$

所以还需要了解一点 Lie 群 G 上的右不变 $\mathscr{G}$-值 1-形式. 当处理 Lie 群时,我们习惯于左不变的对象,所以我们先看 α 的左不变对应场,即形式

$$\beta(X) = dL_{g^{-1}}(X), \quad X \in T_g(G).$$

β 称为 G 的 Maurer-Cartan 形式. 关于它我们有

Cartan 构造方程

$$d\beta = -\frac{1}{2}[\beta, \beta].$$

证 由定义,我们有,若 X,Y 为矢量场则

$$d\beta(X,Y) = X(\beta(Y)) - Y(\beta(X)) - \beta[X,Y].$$

今设 X,Y 均为左不变的,则 $\beta(Y)$,$\beta(X)$都是常值函数. 这是因为

$$\beta(Y)_g = \beta(Y_g) = \beta(dL_g Y_e) = dL_{g^{-1}} \circ dL_g \circ Y_e$$
$$= Y_e = \beta(Y)_e.$$

故 $d\beta(X,Y)$式右前两项均为 0 而我们有

$$d\beta(X,Y) = -\beta[X,Y].$$

令$(X_1,\cdots,X_n)$为 Lie 代数 $\mathscr{G}$ 的基底,我们知道可以把它们与以下的左不变矢量场 $\widetilde{X_i}$ 等同起来:

$$(\widetilde{X_i})_g = dL_g(X_i).$$

类似地,对偶空间 $\mathscr{G}^*$ 可以与左不变 1-形式(通常的实值形式). 令$(\omega_1,\cdots,\omega_n)$是与$(X_1,\cdots,X_n)$对偶的左不变 1-形式的基底. 则我们也有

$$d\omega_i(X,Y) = -\omega_i[X,Y],$$

X,Y 为左不变的. 另一方面,$d\omega_i$ 即是左不变 2-形式,$d\omega_i \in \Lambda^2\mathscr{G}^*$. 但我们知道 $\Lambda^2\mathscr{G}^*$ 有一组基底$\{\omega_i \wedge \omega_j, i<j\}$,故有

$$d\omega_i = \sum_{j,k} \lambda^i_{j,k}\omega_j \wedge \omega_k, \quad 且\ \lambda^i_{j,k} = -\lambda^i_{k,j}.$$

要想求出某一个 $\lambda^i_{j,k}$,将上式作用到(X_p,X_q)上,有

$$-\omega_i[X_p,X_q]=\lambda^i_{p,q}\omega_p(X_p)\omega_q(X_q)+\lambda^i_{q,p}[-\omega_p(X_q)\omega_q(X_p)]$$
$$=2\lambda^i_{p,q}.$$

另一方面我们又有展开式

$$[X_p,X_q]=\sum_i c^i_{p,q}X_i,$$

常数 $c^i_{p,q}$称为 $\mathscr{G}$ 的构造常数，因为它们描述了 Lie 代数 $\mathscr{G}$ 的构造. 由此知

$$2\lambda^i_{p,q}=-c^i_{p,q}$$

所以我们可以写出

$$d\omega_i=-\frac{1}{2}\sum_{p,q}c^i_{p,q}\omega_p\wedge\omega_q,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

此式也称为构造方程，因为 $\mathscr{G}$ 的构造即由它们决定. 我们现在用 Maurer-Cartan 形式 β 把这一切都简单地统一起来.

对任意的 $\mathscr{G}$-值 1-形式 τ 和矢量场 X，有展开式

$$\tau(X)=\sum_i\tau_i(X)X_i,$$

τ_i 是通常的实值 1-形式. 若 τ 为左不变的，则 τ_i 也是，而可将 τ_i 展开为

$$\tau_i=\sum_j\tau_{ij}\omega_j.$$

所以 τ 可以用常数值矩阵(τ_{ij})来表示. 由构造方程，对于左不变矢量场 X 与 Y 有

$$d\tau(X,Y)=\left[\left\{-\frac{1}{2}\tau_{ij}c^j_{p,q}\omega_p\wedge\omega_q\right\}(X,Y)\right]X_i$$
$$=-\sum_{i,j,p,q}\tau_{ij}c^j_{p,q}\omega_p(X)\omega_q(Y)X_i.$$

另一方面，由对于 $\mathscr{G}$-值形式上[,]运算之定义有

$$[\tau,\tau](X,Y)=[\tau(X),\tau(Y)]-[\tau(Y),\tau(X)]$$
$$=2[\tau(X),\tau(Y)]$$
$$=2[\sum_i\tau_i(X)X_i,\sum_j\tau_j(Y)X_j]$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\Big[\sum_{i,p}\tau_{i,p}\omega_p(X)X_i,\ \sum_{j,q}\tau_{j,q}\omega_q(Y)X_j\Big] \\
&= 2\sum_{i,j,p,q}\tau_{i,p}\tau_{j,q}\omega_p(X)\omega_q(Y)[X_i,X_j] \\
&= 2\sum_{i,j,p,q,l}\tau_{i,p}\tau_{j,q}\omega_p(X)\omega_q(Y)c^l_{i,j}X_l.
\end{aligned}
$$

这两个方程通常并不一致.第二个方程对系数 τ_{ij} 是二次式.但看特例 $\tau=\beta$,由定义有,对任意 $X\in\mathscr{G}$,

$$\beta(X)=\beta(X)_e=dL_g(X)=X,$$

这说明,当 $\tau=\beta$ 时,矩阵 $(\tau_{ij})=(\delta_{ij})$ 是恒等矩阵.于是以上两个方程归结为

$$
\begin{aligned}
d\beta(X,Y) &= -\sum_{j,p,q}c^j_{p,q}\omega_p(X)\omega_q(Y)X_j, \\
[\beta,\beta](X,Y) &= 2\sum_{l,p,q}c^l_{p,q}\omega_p(X)\omega_q(Y)X_l,
\end{aligned}
$$

所以我们有

$$d\beta=-\frac{1}{2}[\beta,\beta].$$

这样,Maurer-Cartan 方程只不过是表述 Lie 代数 $\mathscr{G}$ 的构造常数的精巧的说法.但它有方便之处.例如我们有

$$0=dd\beta=-\frac{1}{2}d[\beta,\beta].$$

可以看到

$$d[\beta,\beta]=[d\beta,\beta]-[\beta,d\beta]=2[d\beta,\beta].$$

由此式即有

Bianchi 恒等式 $\qquad [\beta,[\beta,\beta]]=0.$

它等价于 Jacobi 恒等式.

但我们感兴趣的是右不变场 $\alpha(X)=dR_{g^{-1}}(X)$.然而可以用下面的标准的手段把它与 β 连接起来.令 $J:G\longrightarrow G$ 为求逆映射:$Jx=x^{-1}$.我们有

$$JL_g(x)=J(gx)=x^{-1}g^{-1}=R_{g^{-1}}J(x).$$

故若 $X\in T_g(G)$,我们有

$$(J^*\beta)(X) = \beta(dJ(X)) = dR_g dJ(X)$$
$$= dJ(dL_{g^{-1}}(X)) = dJ(\alpha(X)).$$

然而，$\alpha(X)\in\mathscr{G}=T_e(G)$，而我们知道在 $T_e(G)$ 上，$dJ=-1$. 这表示

$$\alpha = -J^*(\beta).$$

将此式用于构造方程即有

$$d\alpha = \frac{1}{2}[\alpha,\alpha],$$

它当然是等价于 Maurer-Cartan 方程的.

还有更多的事要做. 把联络的变换公式写成

$$\mathrm{Ad}(\varphi)(\omega_{s\varphi}) = \varphi^*(\alpha) + \omega_s.$$

要由 ω 得到 R 就要作微分，即要比较 $d\mathrm{Ad}(\varphi)$ 和 $\mathrm{Ad}(\varphi)d$. 设在 $U\subset M$ 上有一 $\mathscr{G}$-值 1-形式 θ，有

$$[d(\mathrm{Ad}(\varphi))\theta](X,Y) = X(\mathrm{Ad}(\varphi)\theta(Y)) - Y(\mathrm{Ad}(\varphi)\theta(X))$$
$$- (\mathrm{Ad}(\varphi)\theta)[X,Y].$$

所以必须计算函数 $X(\mathrm{Ad}(\varphi)\theta(Y))=f$. 记住，它是这样作的：给定一点 $p\in M$，为计算 $f(p)$，令 $\gamma:\mathbf{R}\longrightarrow M$ 为一曲线，且 $\gamma(0)=p$，$\gamma'(0)=X_p$. 于是

$$f(p) = \frac{d}{dt}[\mathrm{Ad}(\varphi)\theta(Y)]_{\gamma(t)}|_{t=0}.$$

但函数

$$F(\gamma(t)) = [\mathrm{Ad}(\varphi)\theta(Y)]_{\gamma(t)} = \mathrm{Ad}(\varphi(\gamma(t)))(\theta(Y)_{\gamma(t)}).$$

问题是 $\theta(Y)_{\gamma(t)}$ 和 $\varphi(\gamma(t))$ 都是 t 的函数. 若将 $\theta(Y)_{\gamma(t)}$ 代以一常值向量 Z，我们在第五章中就已知道如何计算 $\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(\varphi(\gamma(t)))Z|_{t=0}$. 类似地，若将 $\mathrm{Ad}(\varphi(\gamma(t)))$ 代以常值 $\mathrm{Ad}(g)$，$g\in G$，则有

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(g)\theta(Y)_{\gamma(t)}|_{t=0} = \mathrm{Ad}(g)\frac{d}{dt}\theta(Y)_{\gamma(t)}|_{t=0}$$
$$= \mathrm{Ad}(g)(X_p(\theta(Y))).$$

事实上我们二者都要，这就是常用的方法. 考虑映射

$$G\times\mathscr{G}\xrightarrow{\mathrm{Ad}}\mathscr{G},\quad (g,Y)\longmapsto \mathrm{Ad}(g)Y.$$

现在点(g_0,Y_0)处计算$d(\mathrm{Ad})$. 取切向量$X\in T_{g_0}(G)$, $Z\in T_Y(\mathscr{G})=\mathscr{G}$, 我们有

$$d(\mathrm{Ad})(X,Z)=d(\mathrm{Ad})(X,0)+d(\mathrm{Ad})(0,Y).$$

对于向量$X\in T_{g_0}(G)$, $\widetilde{X}=dR_{g_0^{-1}}(X)=\alpha(X)\in\mathscr{G}$, 故$\exp(t\widetilde{X})g_0=:\delta(t):\mathbf{R}\longrightarrow G$是$G$中的曲线使$\delta(0)=g_0$, $\delta'(0)=X$. 所以

$$d(\mathrm{Ad})(X,0)=\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(\delta(t))Y_0\big|_{t=0}$$

$$=\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(\exp(t\widetilde{X}))\cdot\mathrm{Ad}(g_0)Y_0\big|_{t=0}.$$

但由第五章可知,此即

$$[\widetilde{X},\mathrm{Ad}(g_0)Y_0]=[\alpha(X),\mathrm{Ad}(g_0)Y_0].$$

对于向量$(0,Y)$, $t\longmapsto(g_0,Y_0+tY)$是一适当的曲线. 故

$$d(\mathrm{Ad})(0,Y)=\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(g_0)(Y_0+tY)\big|_{t=0}$$

$$=\mathrm{Ad}(g_0)\frac{d}{dt}(Y_0+tY)_{t=0}=\mathrm{Ad}(g_0)Y.$$

在现在的情况下, $F(\gamma(t))=\mathrm{Ad}(\varphi(\gamma(t)))\theta(Y)_{\gamma(t)}$是一个复合

$$R\longrightarrow G\times\mathscr{G}\xrightarrow{\mathrm{Ad}}\mathscr{G},$$

$$t\longmapsto(\varphi(\gamma(t)),\theta(Y)_{\gamma(t)})\longmapsto F(\gamma(t)).$$

所以我们有

$$(g_0,Y_0)=(\varphi(p),\theta(Y)_p)$$

$$X=\frac{d}{dt}\varphi(\gamma(t))\big|_{t=0}=d\varphi(X_p),$$

$$Y=\frac{d}{dt}\theta(Y)_{\gamma(t)}\big|_{t=0}=X_p(\theta(Y)).$$

作上述的计算即有

$$f(p)=[\alpha(d\varphi(X_p)),\mathrm{Ad}(\varphi(p))\theta(Y)_p]+\mathrm{Ad}(\varphi(p))X_p(\theta(Y)).$$

这意味着f可以写成

$$X(\mathrm{Ad}(\varphi)\theta(Y))=[\varphi^*(\alpha)(X),\mathrm{Ad}(\varphi)\theta(Y)]+\mathrm{Ad}(\varphi)\cdot X(\theta(Y)).$$

对$Y(\mathrm{Ad}(\varphi)\theta(X))$也是一样做. 合起来即有

$$d(\mathrm{Ad}(\varphi)\theta) = \mathrm{Ad}(\varphi)d\theta + [\varphi^*(\alpha), \mathrm{Ad}(\varphi)\theta].$$

现在一切都已具备. 对 $\mathrm{Ad}(\varphi)(\omega_{s\varphi}) = \varphi^*(\alpha) + \omega_s$ 作外微分, 由 Maurer-Cartan 构造方程, 即有

$$d(\mathrm{Ad}(\varphi)\omega_{s\varphi}) = d(\varphi^*(\alpha)) + d\omega_s = \varphi^*(d\alpha) + d\omega_s$$
$$= \frac{1}{2}\varphi^*[\alpha, \alpha] + d\omega_s = \frac{1}{2}[\varphi^*\alpha, \varphi^*\alpha] + d\omega_s.$$

但另一方面

$$d(\mathrm{Ad}(\varphi)(\omega_{s\varphi})) = \mathrm{Ad}(\varphi)[d\omega_{s\varphi}] + [\varphi^*(\alpha), \mathrm{Ad}(\varphi)\omega_{s\varphi}]$$
$$= \mathrm{Ad}(\varphi)(d\omega_{s\varphi}) + [\varphi^*(\alpha), \varphi^*(\alpha) + \omega_s],$$

亦即

$$\mathrm{Ad}(\varphi)(d\omega_{s\varphi}) + \frac{1}{2}[\varphi^*(\alpha), \varphi^*(\alpha)] + [\varphi^*(\alpha), \omega_s] = d\omega_s.$$

现在我们有

$$\mathrm{Ad}(\varphi)R_{s\varphi} = \mathrm{Ad}(\varphi)\left\{d\omega_{s\varphi} + \frac{1}{2}[\omega_{s\varphi}, \omega_{s\varphi}]\right\}$$
$$= \mathrm{Ad}(\varphi)(d\omega_{s\varphi}) + \frac{1}{2}[\mathrm{Ad}(\varphi)\omega_{s\varphi}, \mathrm{Ad}(\varphi)\omega_{s\varphi}]$$
$$= \mathrm{Ad}(\varphi)(d\omega_{s\varphi}) + \frac{1}{2}[\varphi^*(\alpha) + \omega_s, \varphi^*(\alpha) + \omega_s]$$
$$= \mathrm{Ad}(\varphi)(d\omega_{s\varphi}) + \frac{1}{2}[\varphi^*(\alpha), \varphi^*(\alpha)]$$
$$+ [\varphi^*(\alpha), \omega_s] + \frac{1}{2}[\omega_s, \omega_s]$$
$$= d\omega_s + \frac{1}{2}[\omega_s, \omega_s] = R_s.$$

得到了曲率形式的变换公式后, 就容易讨论一般的示性类了. 先回顾一下总的背景. 固定一个 Lie 群 G, 考虑主 G-丛 $P \longrightarrow M$ 的范畴. 作函数对应关系 $(P \longrightarrow M) \longmapsto H^*(M, \mathbf{R})$ (系数域为实或复), 即是说, 我们所得的示性类为 $H^*(BG, \mathbf{R})$. 令 $\mathscr{G}$ 为 G 之 Lie 代数. 考虑重线性映射

$$F: \mathscr{G} \times \cdots \times \mathscr{G} \longrightarrow \mathbf{R},$$

$$(X_1,\cdots,X_k)\longmapsto F(X_1,\cdots,X_k),$$

(1) F 为对称的，

(2) F 为不变的，即对任一 $g\in G$ 有

$$F(\mathrm{Ad}(g)X_1,\cdots,\mathrm{Ad}(g)X_k)=F(X_1,\cdots,X_k).$$

对每个 F 可作一多项式函数

$$f:\mathscr{G}\longrightarrow\mathbf{R},\quad X\longmapsto f(X)=F(X,\cdots,X).$$

f 称为不变多项式，记其集为 $I(G)$.

设 $f\in I(G)$ 为已知. 对每个主 G-丛 $P\longrightarrow M$ 取 P 上之一联络 $\{\omega_*\}$，其相应的曲率形式为 $\{R_*\}$. 由 f 之不变性与 $\{R_*\}$ 的变换规则知 $f(R_*)$ 是 M 上适当定义的微分形式（其值为实或复，若 f 来自 k-线性的 F，则其次数为 $2k$). 和前面一样，要证明 $f(R_*)$ 是一闭形式，且其 de Rham 类 $[f(R_*)]\in H^*(M)$ 与所取的联络无关. 例如取 $g=\exp(tY)$，对不变性(2)之式子作外微分，有

$$\sum_i F(X_1,\cdots,[Y,X_i],\cdots,X_k)=0.$$

此式加上 Bianchi 恒等式可给出 $df(R_*)=0$. 作

$$R_*=d\omega_*+\frac{1}{2}[\omega_*,\omega_*]$$

之外微分又给出

$$dR_*=\frac{1}{2}d[\omega_*,\omega_*]=\frac{1}{2}[d\omega_*,\omega_*]+\frac{1}{2}[\omega_*,d\omega_*]$$

$$=[d\omega_*,\omega_*]=[R_*,\omega_*]+\frac{1}{2}[[\omega_*,\omega_*],\omega_*].$$

我们已知，$\mathscr{G}$ 中的 Jacobi 恒等式给出 $[[\omega_*,\omega_*],\omega_*]=0$. 于是又恰好得出前面所给的 Bianchi 恒等式

$$dR_*=[R_*,\omega_*].$$

$[f(R_*)]$ 与 $\{\omega_*\}$ 无关的证明和前面完全一样. 故

$$(P\longrightarrow M)\longmapsto[f(R_*)]\in H^*(M,R)$$

是函子的对应关系，即对每一个 $f\in I(G)$，$[f(R_*)]$ 是 G 的一个示性类. 故对应关系 $f\longmapsto[f(R_*)]$ 定义了一个同态，称为 Weil 同态：

$$w: I(G) \longrightarrow H^*(BG, \mathbf{R}), \quad f \longmapsto [f(R_s)].$$

有一般的定理证明它实在是一个同构，即是说，用曲率形式来得到示性类，至少在实或复系数时，与前面用的"拓扑"方法是等价的.不仅是形式上如此，而且可以平行于 Borel-Hirzebruch 程序在 $I(G)$ 的框架下展开这个理论. 例如我们知道 Euler 类 $\chi \in H^*(BSO(2n))$ 的特性是：χ 限制在极大环面 $T=T^n \subset SO(2n)$ 上，$\chi|T$ 即权 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$. 在现在的框架下证明它. 先考虑最简单的情况 $T=S^1$, $L(S^1)=\mathbf{R}$, $\mathrm{Ad}(g)$ 是平凡作用. 现在，不变多项式 $f \in I(S^1)$ 显然就是通常的多项式

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

由我们对射影空间所已作的计算知，$f(x)=\frac{i}{2\pi}x$ 相应于陈类 c_1. 现在 $L(SO(2n))$ 即斜对称矩阵 Lie 代数，包含关系 $T^n \longrightarrow SO(2n)$ 变为 Lie 代数的包含：

$$L(T^n) = \mathbf{R}^n \longrightarrow L(SO(2n)),$$

$$(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n) \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & \theta_1 & & & & & \\ -\theta_1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & \theta_2 & & & \\ & & -\theta_2 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & \theta_n \\ & & & & & -\theta_n & 0 \end{bmatrix}$$

所以问题在于 $L(SO(2n))$ 上的那一个不变多项式 $f(A)$ 当 A 为以上的 2×2 分块矩阵时 $f(A)=\theta_1\theta_2\cdots\theta_n$? 正是 Pfaff 形式

$$\mathrm{Pf}(A) = \sum_{\sigma \in S_{2n}} \mathrm{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)}$$

在系数作适当调整后给出了答案. 证明这一点相对说来还比较容易.

顺便说一下，在 Borel-Hirzebruch 程序中一个关键的事实是 Borel 定理，即极大环面的包含映射 $\rho: T \longrightarrow G$ 至少在实系数情况

下诱导出一个单射

$$\rho^* : H^*(BG) \longrightarrow H^*(BT).$$

在我们的背景下，这个重要定理容易理解了. 若 $\rho: H \longrightarrow G$ 是 Lie 群间任一同态，而

$$F : \mathscr{G} \times \cdots \times \mathscr{G} \longrightarrow \mathbf{R}$$

是一不变对称重线性映射，

$$\rho^*(F) : \mathscr{H} \times \cdots \times \mathscr{H} \xrightarrow{\rho_*} \mathscr{G} \times \cdots \times \mathscr{G} \xrightarrow{F} \mathbf{R}$$

是 $\mathscr{H}$ 上的不变对称重线性映射. 于是 $F \longrightarrow \rho^*(F)$ 是一个同态 $\rho^* : I(G) \longrightarrow I(H)$，而说 $\rho^* I(G) \longrightarrow I(T)$ 是一单射就等于说 $F(X,\cdots,X)$ 由它在 $L(T)$ 上之值决定. 但这就是 Cartan 定理. 对任意 $Y \in L(G)$，$\{\exp(tY)\} \subset G$ 是一个单参数子群. Cartan 定理蕴涵了：存在一个 $g \in G$ 使

$$g\exp(tY)g^{-1} \subset T.$$

微分此式有

$$\mathrm{Ad}(g)Y \in L(T).$$

所以

$$\begin{aligned} F(Y,\cdots,Y) &= F(\mathrm{Ad}(g^{-1})X,\cdots,\mathrm{Ad}(g^{-1})Y) \\ &= F(X,\cdots,X), \end{aligned}$$

这里 $X = \mathrm{Ad}(g)Y \in L(T)$. 事实上，证明 $\mathrm{Im}(\rho^*) = I(T)^w$ 为 $I(T)$ 在 Weyl 群下不变的子环也同样简单. 很清楚，这件事，加上 $H^*(BG)$ 中的相应定理还有 Weil 同态的函子性质就足以证明 Weil 同态是一同构.

在结束本节之前还有一点要说明. 经过相当细微的计算后，我们已经看到局部联络形式 $\{\omega_i\}$ 的变换公式的"缺陷"可以理解为它表明这些局部数据在从 $P \longrightarrow M$ 的全空间 P 上定义了一个整体的 $\mathscr{G}$-值 1-形式. 显然会想到，对于曲率形式 $\{R_i\}$ 是否也有类似结果. 如果有，它是否能解释为什么 $\{R_i\}$ 之变换公式没有此缺陷？确实是可以做的，而且这在概念上很有意义，所以我们来作一个简短的说明.

记住，投影 $\pi: P \longrightarrow M$ 给出了“铅直”切空间 $V_z \subset T_z P$ 的适当定义，即 $V_z = \ker(d\pi: T_z P \longrightarrow T_{\pi(z)} M)$. 另一方面，“水平”子空间 $H_z \subset T_z P$ 却没有适当定义. 事实上，$\{\omega_i\}$的变换公式的缺陷正是反映了水平子空间不可能用局部坐标简单地定义. 但现在既已有了 P 上的整体 1-形式 ω，即可用它来给出水平子空间 H_z 的适当定义：

$$H_z = \ker(\omega: T_z P \longrightarrow \mathscr{G}).$$

我们知道 $\dim V_z = \dim \mathscr{G}$. ω 的 Ehresmann 定义的第一个性质说 ω 是全射$(\omega(\sigma(Y)) = Y, Y \in \mathscr{G})$，故

$$\dim H_z = \dim T_z P - \dim \mathscr{G} = \dim T_z P - \dim V_z.$$

由此可知有直和分解

$$T_z P = H_z \oplus V_z.$$

这样就有了两个分布：

$$V: z \longmapsto V_z, \quad H: z \longmapsto H_z.$$

但它们很不相同. 铅直分布作为纤维的切空间是可积的. 但水平分布却难得是可积的. 如果它是可积的，则其极大积分子流形正是底流形 M 的“复本”. 而这时 $P \longrightarrow M$ 就会有整体切口因而是平凡丛. 所以，Frobenius 定理必不成立. 对于 P 上两个水平矢量场 X 与 Y，$[X, Y]$不一定是水平的. 这件事有以下的推论. 若 P 上之形式 μ 对于一切水平的 $X_1, \cdots, X_k$ 均有

$$\mu(X_1, \cdots, X_k) = 0$$

则称 μ 为铅直的. 当 μ 为铅直时，$d\mu$ 不一定是，因为 $d\mu$ 中全出现括弧$[X, X_j]$. 这件事还有一个表述方法如下：令 h 为一个算子

$$h(X) = X \text{ 的水平成分}, \quad X \in T_z P$$

(这个定义是有意义的，因为有直和分解 $T_z P = H_z \oplus V_z$). 所以，若 μ 是铅直的，形式

$$D\mu(X_1, \cdots, X_{k+1}) = d\mu(hX_1, \cdots, hX_{k+1})$$

不一定为 0. 由定义，联络形式 ω 是最明显的铅直形式，于是可得 P 上的一个 $\mathscr{G}$ 值 2-形式 $\Omega = D\omega$. 我们指出，这一形式可以“下降”到 M 上面变成曲率形式$\{R_i\}$. 这件事不难证明. 令 μ 为定义于 P 上的

任意 $\mathscr{G}$-值形式. 我们要来从 μ 构造出一个定义在 M 上的 $P\times_G\mathscr{G}$-丛值的形式 $\tilde{\mu}$. 故令 $p\in M,\tilde{X}\in T_p(M)$. 取一点 $x\in P$ 使之位于 p 上，再取 $X\in H_x$ 使 $d\pi(X)=\tilde{X}$. 这是可能的，因为 $d\pi: H_x\longrightarrow T_p(M)$ 是一个同构. 于是定义 $\tilde{\mu}$ 为

$$\tilde{\mu}(\tilde{X})=[x,\mu(X)].$$

我们要验证 $\tilde{\mu}$ 并不依赖于 x. 另取一个 x_1，则必有 $g\in G$ 使 $x_1=xg$. 由 Ehresmann 定义的第二个性质，有

$$R_g^*\omega=\mathrm{Ad}(g^{-1})\omega,$$

于是

$$\omega(dR_gX)=(R_g^*\omega)X=\mathrm{Ad}(g^{-1})\omega(X)=0.$$

换言之，$dR_g(X)\in H_{xg}$. 因此

$$\tilde{\mu}(\tilde{X})=[xg,\mu(dR_gX)]=[xg,(R_g^*\mu)(X)].$$

若 μ 有类似的不变性质

$$R_g^*\mu=\mathrm{Ad}(g^{-1})\mu,$$

由空间 $P\times_G\mathscr{G}$ 之定义(G 通过 $\mathrm{Ad}(g)$ 作用于 $\mathscr{G}$ 上)，就会有

$$\tilde{\mu}(\tilde{X})=[xg,\mathrm{Ad}(g^{-1})\mu(X)]=[x,\mu(X)].$$

因此为了“下降”到 M 上所需的正是不变性质. 但 ω 的不变性显然蕴涵了 Ω 的不变性. 事实上，

$$\begin{aligned}R_g^*\Omega&=R_g^*d\omega\circ h=d(R_g^*\omega)\circ h=d(\mathrm{Ad}(g^{-1})\omega)\circ h\\&=\mathrm{Ad}(g^{-1})d\omega\circ h=\mathrm{Ad}(g^{-1})\Omega.\end{aligned}$$

所以 Ω 将在 M 上诱导出一个 $P\times_G\mathscr{G}$-值 2-形式 $\tilde{\Omega}$. $\tilde{\Omega}$ 正是我们前面所定义的曲率形式，这件事下一节即可看到. 最后还有一小点：既然 ω 是不变的，为什么不能下降到 M 上而得到一个 $\tilde{\omega}$ 呢？确实是可以的，但是

$$\tilde{\omega}(\tilde{X})=[x,\omega(X)]=0,$$

因为 X 是水平的.

§ 5. Yang-Mills 泛函

在本书最后一章的最后一节中,我们打算简略介绍一下所谓 Yang(杨振宁)-Mills 规范场理论. 它是关于物理学的统一场论的一个理论,对此我显然一无所知. 但它的数学表述却是调和形式理论的一个推广. 既然调和形式理论已经是导向一般指标定理的旅途的起点,用这个主题作为我们全部讨论的结尾自然也颇适合.

先要提醒一点:虽然在上一节中已经建立起了一个相当庞大的武库. 不要忘记,联络只是使我们能在矢量丛中取方向导数的一种运算. 在主 G-丛 $P \longrightarrow M$ 上的联络$\{\omega_s\}$的情况下,我们要施行上述求导的矢量丛 E 是给定了一个 G-空间 V 后作出的任意丛 $E=P\times_G V$. 回忆一下当 $G=GL(V)$为一般线性群时这是怎样作的. 令 s: $U \longrightarrow P$ 为一局部截口,固定 V 的基底$(e_1,\cdots,e_k)$后可得一个局部标架

$$s_i(p) = [s(p), e_i].$$

在 U 上给一矢量场 X,导数 D_X 将由下式决定:

$$D_X(s_i) = \sum_j \omega_s(X)_{ij} s_j.$$

它意味着,对于 $p\in U$ 有

$$D_X(s_i)|_p = \sum_j [s(p), \omega_s(X_p)_{ij} e_j].$$

我们对它作如下的解释:$(\omega_s(X)_{ij})$是一矩阵,故上式右方即$\omega_s(X)\cdot e_i$,即由 $GL(V)$在 V 上的作用所诱导的 Lie 代数 $\mathscr{G}l(V)$在 V 上的作用. 若 G 为一般的群而 V 为一 G-空间,仍可得 $\mathscr{G}$ 在 V 上的作用(定义如下:若 $Y\in\mathscr{G}, v\in V$,则 $Y(v)=\frac{d}{dt}(\exp(tY))v|_{t=0}$). 故对 M 上的矢量场 X 与 $v\in V$,则因 $\omega_s(X)\in\mathscr{G}$ 而 $\omega_s(X)v$ 也有意义. 所以我们对基底截口 s_i,定义协变导数为

$$D_X(s_i) = \omega_s(X)s_i, \qquad (*)$$

而对一般的截口

$$\rho = \sum_i \rho_i s_i, \qquad \rho_i \text{ 是函数},$$

则定义

$$D_X(\rho) = \sum_i X(\rho_i) s_i + \sum_i \omega_i(X) s_i,$$

第一项的出现是一公理(Leibnitz 法则).

任给一截口 $\rho: U \longrightarrow P\times_G V$ 后,可以定义函数 $\tilde{\rho}: \pi^{-1}(U) \longrightarrow V$ 如下:取一点 $x\in\pi^{-1}(U)$,则 $p=\pi(x)\in U$,故可得 $\rho(p)$ 是 $P\times_G V$ 中的一点:$\rho(p)=[\quad,\quad]$. 这个表示的第一个坐标仍可记作 x,第二个坐标则是固定的,记为 $\tilde{\rho}(x)$,即有

$$\rho(\pi(x)) = [x, \tilde{\rho}(x)].$$

函数 $\tilde{\rho}$ 显然有不变性,例如

$$\rho(\pi(xg)) = [xg, \tilde{\rho}(xg)],$$

且

$$\rho(\pi(xg)) = \rho(\pi(x)) = [x, \tilde{\rho}(x)] = [xg, g^{-1}\tilde{\rho}(x)],$$

所以

$$\tilde{\rho}(xg) = g^{-1}\tilde{\rho}(x).$$

逆之,任一适合上式的不变函数 $\tilde{\rho}$ 也定义一个截口 ρ 如下:

$$\rho(p) = [x, \tilde{\rho}(x)], \quad x \in \pi^{-1}(p).$$

所以,值在 $P\times_G V$ 中的 M 上之截口正是定义于 P 而值在 V 中的不变函数. 这两种观点均允许把它们看作 0-形式. 正如我们在切丛情况下所看到的,只要给出了一个联络,则不但可以求导一个矢量场,而且可以求导一个形式. 所以我们想把(*)推广到所有的高阶的值在 $P\times_G V$ 中的形式. 为此先用 V 值不变函数的观点来重述(*). 我们知道,函数的协变函数基本意义即是方向导数,即

$$D_X(\tilde{\rho}) = X(\tilde{\rho}).$$

不巧的是,上式没有意义. 因为 X 是 M 上的矢量场,而 $\tilde{\rho}$ 是 P 上的函数. 然而,记住若有一个联络 ω(看作 P 上的 $\mathscr{G}$-值 1-形式),则对每一点 $x\in P$,必有一水平子空间 $H_x=\ker\omega\subset T_x(P)$. 因为 $d\pi: H_x$

$\longrightarrow T_p(M)\,(p=\pi(x))$是一同构，$M$ 上的任意矢量场 X 可以提升成为 P 上的 $\widetilde{X}$，使

$$d\pi(\widetilde{X}_x) = X_p.$$

这称为 X 的水平提升. 将 $\widetilde{X}$ 作用到 $\tilde{\rho}$ 上可得出一个 P 上的 V-值函数

$$\widetilde{X}(\tilde{\rho}) = \langle \widetilde{X}, \tilde{\rho} \rangle.$$

由于 H 有不变性

$$H_{xg} = dR_g(H_x).$$

易见函数$\langle \widetilde{X}, \tilde{\rho} \rangle$也是不变的. 所以它相应于 M 上的一个截口. 我们指出，这截口正是 $D_X(\rho)$，即

$$D_X(\rho)_p = [x, \langle \widetilde{X}, \tilde{\rho} \rangle_x], x \in \pi^{-1}(p). \qquad (**)$$

这只要算一下就知道了. 首先因为 x 无关紧要故不妨取 $x=s(p)$. 记住 ω 与 ω_s 之间有关系式 $\omega_s = s^*(\omega)$，故对 $X_p \in T_p(M)$，我们有

$$\omega_s(X)_p = \langle s^*\omega, X \rangle_p = \langle \omega, ds(X_p) \rangle.$$

向量 $ds(X_p)$不一定是水平的. 但因 $d\pi ds(X_p) = X_p = d\pi(\widetilde{X}_{s(p)})$，可知 $\widetilde{X}_{s(p)} - ds(X_p)$是铅直的. 为了要算出它，只需用 ω 作用于其上. 因为 $\widetilde{X}$ 是水平的，故作用后得出

$$-\omega(ds(X_p)) = -\langle s^*(\omega), X \rangle_p = -\omega_s(X_p).$$

于是 $ds(X_p)$可以分解为水平与铅直两部分如下：

$$ds(X_p) = \widetilde{X}_{s(p)} + \sigma(\omega_s(X_p))_{s(p)}$$

运算 σ 即将 $\mathscr{G}$ 之元移为铅直场. 现可将此式用于任意的不变函数 $\tilde{\rho}: \pi^{-1}(U) \longrightarrow V$. 为了证明$(**)$，只需在相应于基底截口

$$s_i(p) = [s(p), e_i]$$

的基底 $\tilde{s}_i$ 上验证它即可. 我们有

$$ds(X_p)(\tilde{s}_i) = \langle X_p, \tilde{s}_i \circ s \rangle.$$

但$(\tilde{s}_i \circ s)(q) = \tilde{s}_i(s(q))$之特性是

$$[s(q), \tilde{s}_i(s(q))] = s_i(\pi(s(q))) = s_i(q) = [s(q), e_i],$$

亦即$(\tilde{s}_i \circ s)(q) = e_i$ 即为常值函数，从而

$$ds(X_p)(\tilde{s}_i) = 0.$$

另一方面，$\sigma_{s(p)}$又是

$$\tilde{s}(p): \quad G \longrightarrow P, \quad g \longmapsto s(p)g$$

之微分. 所以

$$(\sigma(\omega_x(X_p)))(\tilde{s}_i) = \omega_x(X_p)(\tilde{s}_i \circ \widetilde{s(p)})$$

但是

$$(\tilde{s}_i \circ \widetilde{s(p)})(g) = \tilde{s}_i(s(p)g) = g^{-1}\tilde{s}_i(s(p)) = g^{-1}e_i.$$

因为 $g \longmapsto g^{-1}$ 诱导出 $\mathscr{G}$ 上的变换 $Y \longmapsto -Y$，故有

$$\{\sigma(\omega_x(X_p))\}(\tilde{s}_i) = -\omega_x(X_p)e_i.$$

所以我们确有

$$(\tilde{X}, \tilde{s}_i)(s(p)) = \omega_s(X_p)s_i$$

故可得(＊＊).

所以，往上升协变导数化为"通常的"方向微商 $\tilde{X}(\tilde{\rho})$. 因为由定义 $\tilde{X}(\tilde{\rho}) = d\tilde{\rho}(\tilde{X})$ 正是将函数 $\tilde{\rho}$ 的外微分作用于 $\tilde{X}$. "通常的"一词的意义即此. 这是一个只需要微分构造的基本运算，它不需要附加的构造如联络等等. 联络 ω 是通过水平场概念进入的. 我们关心的只是把 $d\tilde{\rho}$ 作用于水平场 $\tilde{X}$. 若 $\tilde{X}$ 本来不是水平的，则要先用水平投影算子 h 把它变成水平的然后再施以 $d\tilde{\rho}$，即是说，这时协变导数是算子

$$D\tilde{\rho} = d\tilde{\rho} \circ h.$$

但这对任意的 V-值形式都有意义，所以应以它为协变导数的一般定义. 例如若 $\tilde{\rho} = \omega$ 即为联络本身(作为一个 $\mathscr{G}$-值 1-形式)，我们在上节已看到 $D\omega = \Omega$ 正"是"曲率形式，即 Ω 是 P 上的不变 $\mathscr{G}$ 值形式. 下到 M 就成为 $P \times_G \mathscr{G}$-值曲率形式. 一般情况下当然也可作这一程序. 在

(1) M 上的 $P \times_G V$-值形式 μ 以及

(2) P 上的不变 V-值水平形式 $\tilde{\mu}$

之间有一个双向的关系. 即已给 $x \in P, p = \pi(x) \in M$，则给出 μ 以后即可定义 $\tilde{\mu}$ 如下：

$$\mu(d\pi(X_1),\cdots,d\pi(X_k))_p=[x,\tilde{\mu}(X_1,\cdots,X_k)_x],$$
$$X_1,\cdots,X_k\in T_x(P).$$

$\tilde{\mu}$只依赖于水平部分$h(X_1),\cdots,h(X_k)$，即$\tilde{\mu}$为水平的，$\tilde{\mu}$是不变的，即

$$\tilde{\mu}(X_1,\cdots,X_k)_{xg}=g^{-1}\tilde{\mu}(X_1,\cdots,X_k)_x.$$

反之，给出这样一个不变的水平V-值形式$\tilde{\mu}$，又可定义μ如下：

$$\mu(X_1,\cdots,X_k)_p=[x,\tilde{\mu}(\tilde{X}_1,\cdots,\tilde{X}_k)_x],$$

这里$x\in\pi^{-1}(p)$是p"上方"的任一点，而$\tilde{X}_i\in T_x(P)$是$X_i\in T_p(M)$的任意水平提升.

在M上给出一个$P\times_G V$-值k-形式μ以及向量场X后，$D_X(\mu)$是一$P\times_G V$-值k-形式. 按上面所说$D_X(\mu)(X_1,\cdots,X_k)$应计算如下：把$X,X_1,\cdots,X_k$和μ都提升到P上成为$\tilde{X},\tilde{X}_1,\cdots,\tilde{X}_k$和$\tilde{\mu}$. 计算$D\tilde{\mu}(\tilde{X},\tilde{X}_1,\cdots,\tilde{X}_k)$再下降到$M$上. 我们就来作这件事. 为记号整齐起见，称$X=X_0,\tilde{X}=\tilde{X}_0$，则因$\tilde{X}_i(i=0,\cdots,k)$均已是水平的，

$$\begin{aligned}D\tilde{\mu}(\tilde{X}_0,\tilde{X}_1,\cdots,\tilde{X}_k)&=d\tilde{\mu}(\tilde{X}_0,\cdots,\tilde{X}_k)\\&=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\tilde{X}_i\{\tilde{\mu}(\tilde{X}_0,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\tilde{X}_k)\}\\&\quad+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\tilde{\mu}([\tilde{X}_i,\tilde{X}_j],\tilde{X}_0,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,\tilde{X}_k).\end{aligned}$$

按定义，第二组的各项下降后成为

$$\begin{aligned}&\mu[d\pi[\tilde{X}_i,\tilde{X}_j],d\pi(\tilde{X}_0),\cdots,d\pi(\tilde{X}_k)]\\&=\mu([X_i,X_j],X_0,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_k).\end{aligned}$$

第一组各项均为形如$\tilde{X}(\tilde{\rho})$，$\tilde{\rho}$是适当函数. 但是我们才讲了如何去处理它. 在邻域U中设有局部截口$s:U\longrightarrow P$. 则

$$\begin{aligned}\tilde{X}(\tilde{\rho})_{s(p)}&=ds(X_p)(\tilde{\rho})+\omega_s(X_p)\tilde{\rho}(s(p))\\&=X_p(\rho)+\omega_s(X_p)\rho\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}D_X\mu(X_1,\cdots,X_k)=d\mu(X,X_1,\cdots,X_k)+\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\omega_s(X_i)\\\circ\mu(X_0,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_k).\end{aligned}$$

记住，最后一项正是由 G 的表示所诱导出的 Lie 代数 $\mathscr{G}$ 在 V 上的作用，若取 $V=\mathscr{G}$ 及其伴随表示这一特例，$\mathscr{G}$ 的诱导作用就是 $\mathscr{G}$ 上的括弧运算. 这时由定义

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i[\omega_s(X_i),\mu(X_0,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_k)]=[\omega_s,\mu](X_0,X_1,\cdots,X_k).$$

用前面已介绍过的记号 i_X，其定义为

$$(i_X\mu)(X_1,\cdots,X_k)=\mu(X,X_1,\cdots,X_k),$$

则对 M 上的 $P\times_G\mathscr{G}$-值形式 μ，协变导数 $D_X\mu$ 在开集 U（s 为一截口 $s:U\longrightarrow P$）上有一表示

$$D_X\mu=i_X(d\mu+[\omega_s,\mu]).\qquad (*)$$

故在 M 上，协变导数本质上就是算子

$$D_s=d+[\omega_s,\quad].$$

例如取 $\mu=R$ 为曲率形式，Bianchi 恒等式

$$dR_s=[R_s,\omega_s]$$

即可重新表述为

$$dR_s-[R_s,\omega_s]=dR_s+[\omega_s,R_s]=D_sR_s=0.$$

注意，$(*)$ 并不适用于 ω_s，因为 ω_s 不是一个 $P\times_G\mathscr{G}$-值形式（局部地，ω_s 是 U 上的 $\mathscr{G}$-值形式！）然而 ω 定义于 P 上，故可对 ω 作用以 D，即得上节中定义的 $\Omega=D\omega$. Ω 是 P 上的不变 $\mathscr{G}$-值 2-形式，下降到 M 即得 M 上一个 $P\times_G\mathscr{G}$-值 2-形式 μ. 上节中我们说过，这就是曲率形式 R. 虽然我们并不需要它，我们还是提一下这是怎样作的. 在 P 上操作更为方便，首先，我们有

结构方程 $\Omega=d\omega+\frac{1}{2}[\omega,\omega]$.

证 我们需证的是对 P 上的矢量场 X,Y 有

$$\begin{aligned}\Omega(X,Y)&=d\omega(X,Y)+\frac{1}{2}[\omega,\omega](X,Y)\\&=X(\omega(Y))+Y(\omega(X))-\omega[X,Y]+[\omega(X),\omega(Y)].\end{aligned}\qquad (**)$$

有三种情况要考虑：

(1) X,Y 均为水平的. 这时

$$\frac{1}{2}[\omega,\omega](X,Y) = [\omega(X),\omega(Y)] = 0$$

且 $\Omega(X,Y)=d\omega(h(X),h(Y))=d\omega(X,Y)$. 故(* *)成立.

(2) X,Y 均为铅直,故有 $X=\sigma(X_1),Y=\sigma(Y_1)$,而 $X_1,Y_1\in\mathscr{G}$. 这时 $\Omega(X,Y)=0$. 又因 $\omega(Y)=Y_1,\omega(X)=X_1$ 是常值函数,故等式右方可化为

$$\begin{aligned}&-\omega[\sigma(X_1),\sigma(Y_1)]+[\omega(\sigma(X_1)),\omega(\sigma(Y_1))]\\&=-\omega\sigma[X_1,Y_1]+[X_1,Y_1]=-[X_1,Y_1]+[X_1,Y_1]=0.\end{aligned}$$

故(* *)成立.

(3) $X=\sigma(X_1)$为铅直的而 Y 是水平的,故式左的 $\Omega(X,Y)=0$. 至于右方,$X(\omega(Y))=0$,因为 $\omega(Y)=0$,$Y(\omega(X))=0$,因为 $\omega(X)=X_1$ 为常值函数,还有$[\omega(X),\omega(Y)]=0$. 故余下的唯有 $\omega[X,Y]$. 问题在于当 X 为铅直而 Y 为水平时$[X,Y]$也是水平的(我们不来证明这一点),故 $\omega[X,Y]=0$. 等式得证.

结构方程明显地蕴涵了:M 上相应于 Ω 的形式局部地可由下式给出

$$d\omega_s+\frac{1}{2}[\omega_s,\omega_s]=R_s.$$

这也解释了 Bianchi 恒等式. DR_s 相应于形式 $DD\omega$,由于 $d^2=0$,故它也为 0.

作以上这一切事的理由如下:我们现已看到,协变导数 D 即外微分加上一个扰动项$[\omega_s,\ \ ]$. 因为我们已对 d 建立了一个调和理论,这理论也有可能推广到 D. 回想一下,为了定义 Laplace-Beltrami 算子 Δ 还需要些什么. 回到第十七章,在那里我们处理的是通常的形式. 我们需要在 M 上有一 Riemann 构造,使得在 $T_p(M)$,$T_p^*(M)$和 $\Lambda^kT_p^*(M)$上均有内积,我们还需要定向,即 M 上的一个恒不为 0 的 n-形式. 然后可以定义算子 $*$. 对于 k-形式 μ,$^*\mu$ 是由下式刻画的$(n-k)$-形式

$$\langle \tau, {}^*\mu \rangle \omega_0 = \tau \wedge \mu. \tag{1}$$

这是一个逐点的方程，即对每一点 $p \in M$，均有

$$\langle \tau_p, ({}^*\mu)_p \rangle \omega_{0_p} = \tau_p \wedge \mu_p.$$

若设 M 为紧，即可定义形式的 L^2 内积为

$$\langle \tau, \mu \rangle = \int_M \langle \tau, \mu \rangle_p \omega_0. \tag{2}$$

然后我们来验证 $\delta = \pm * d *$ 是 d 的形式对偶，即

$$\langle d\tau, \mu \rangle = \langle \tau, \delta\mu \rangle.$$

然后即可定义 Laplace-Beltrami 算子 Δ 为

$$\Delta = d\delta + \delta d.$$

现在我们处理的则是 $P \times_G \mathscr{G}$-值形式. 我们首先失去了 $\tau \wedge \mu$. 但外积只不过给出了将一 k-形式与一$(n-k)$-形式变成一 n-形式的配对. 看一下(1)，我们需要的是一个配对

$$[P \times_G \mathscr{G}\text{-}k \text{ 形式}] \times [P \times_G \mathscr{G}\text{-}(n-k) \text{ 形式}] \longrightarrow \text{实值 } n \text{ 形式}.$$

若 $\mathscr{G}$ 上有内积就可以作出这个配对. 记此内积为$(\ , \ )$. 若 τ, μ 为 $P \times_G \mathscr{G}$ 值的 k 与$(n-k)$形式，定义(τ, μ)为通常实值 n-形式即可，即有

$$\begin{aligned}&(\tau, \mu)(X_1, \cdots, X_n) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)(\tau(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(k)}), \mu(X_{\sigma(k+1)}, \cdots, X_{\sigma(n)})).\end{aligned}$$

$\mathscr{G}$ 上的内积$(\ , \ )$还使我们能定义同维数形式的内积$\langle \ , \ \rangle$. 若 τ, μ 均为 $P \times_G \mathscr{G}$-值 k-形式，则我们局部地有

$$\mu = \sum \mu_i e_i, \quad \tau = \sum \tau_i e_i, \qquad \mu_i, \tau_i \text{ 为通常的形式},$$

于是对 $p \in M$,

$$\langle \mu, \tau \rangle_p = \sum_{i,j} \langle \mu_i(p), \tau_j(p) \rangle (e_i, e_j).$$

于是得出一个函数 $p \longmapsto \langle \mu, \tau \rangle_p$，而(1)又有了意义，我们可以用它

来定义 * 算子. 现在(2)也有了意义,所以也有了整体 $P\times_G\mathscr{G}$-值形式的内积. 现在不难看到 $\mathscr{D}=\pm * D *$ 是 D 的形式对偶,即

$$\langle D\tau,\mu\rangle = \langle \tau,\mathscr{D}\mu\rangle.$$

所以就有了 Laplace-Beltrami 算子

$$\Delta = \mathscr{D}D + D\mathscr{D}.$$

这些概念都准备好了,我们就可以提出以下问题. 对 P 上每个联络 ω,均有其曲率形式 R_ω,从而也有了其 L^2-范数

$$\| R_\omega \|^2 = \int_M \| R_\omega \|_p^2.$$

对应关系

$$\omega \longmapsto \int_M \| R_\omega \|_p^2$$

称为 Yang-Mills 泛函. 我们要想知道 R_ω 的 L^2-范数何时最小,即在 P 上之所有联络所成的空间中,求 $\| R_\omega \|^2$ 的临界点 ω. 这一点类似于 Hodge 理论,它是在一给定的 de Rham 类的形式的空间中求临界点. 我虽然并不懂这里面的物理学,但至少这似乎是可能的. 因为 R_ω 的 L^2-范数表示能量,但力学的 Hamilton 表述即自然规律恒使能量趋向极小这一原理.

这里与 Hodge 理论的类比远不止是形式. P 上的联络之空间 $\mathscr{A}$ 本质上是一矢量空间,正如在一给定的 de Rham 类中的一切形式之空间一样. 记住,我们在前面说过,当给定两个联络 ω_0 与 ω_1 后,其差 $\eta=\omega_1-\omega_0$ 不再是一联络但是更好的东西,η 是 P 上的美妙的 $P\times_G\mathscr{G}$-值 1-形式. 这件事的技术的说法是:$\mathscr{A}$ 为一仿射空间而相应的矢量空间是 M 上的在 $P\times_G\mathscr{G}$ 上取值的 1-形式的矢量空间 $\Lambda^1(M,P\times_G\mathscr{G})$. 由此,解决 Yang-Mills 问题的途径也是相似的,即用变分法,即其简单的变体. 具体说来,给定一个联络 $\omega=\omega_0$,考虑以下形式的变分

$$\omega_t = \omega_0 + t\eta,\quad \eta\in\Lambda^1(M,P\times_G\mathscr{G}).$$

很容易算出其曲率:

$$R_t = R_\omega = d\omega_t + \frac{1}{2}[\omega_t, \omega_t]$$

$$= d\omega_0 + td\eta + \frac{1}{2}[\omega_0 + t\eta, \omega_0 + t\eta]$$

$$= R_0 + t(d\eta + [\omega_0, \eta]) + \frac{t^2}{2}[\eta, \eta].$$

因为我们有一个单参数族联络,每个联络各有自己的协变导数,故应记之为 D_t. 注意,上式的线性项正是 $D_0\eta$,这是合法的,因为 η 是一个 1-形式! 于是我们有

$$\| R_t \|^2 = \| R_0 \|^2 + 2t\langle R_0, D\eta\rangle + t^2 \text{ 项}.$$

对于临界点(设为 $t=0$)应有 $\left(\frac{d}{dt}\| R_t \|^2\right)_{t=0} = 0$,亦即

$$\langle R_0, D\eta\rangle = \langle \mathscr{D} R_0, \eta\rangle = 0.$$

η 是任意 1-形式. 所以必要条件是

$$\mathscr{D}_\omega R_\omega = 0.$$

回想到,由 Bianchi 恒等式有

$$D_\omega R_\omega = 0,$$

和第十七章一样,这两个方程等价于 Laplace 方程

$$\Delta_\omega R_\omega = 0.$$

但这里与经典情况有一个很大的差别. 经典的 Laplace 方程是线性方程,现在则因 Δ_ω 与 R_ω 都依赖于未知的 ω,Laplace 方程则成了非线性的. 虽然如此,Hodge 理论的某些结果仍可推广到这里. 例如,"调和"联络空间是有限维的,所以在这个一般的框架中仍有指标定理. 讨论这个指标定理是当前一个很活跃的研究领域. 但是,这本讲义已经长得很了,我们最好还是就此打住.

参 考 文 献

[1] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vols 1—5, Publish or Perish, Berkeley, 1979.

[2] S. S. Chern, *Complex Manifolds without Potential Theory, Appendix, Geometry of Characteristic Classes*, Springer-Verlag, 1979.

$$R_t = R_\omega = d\omega_t + \frac{1}{2}[\omega_t, \omega_t]$$

$$= d\omega_0 + td\eta + \frac{1}{2}[\omega_0 + t\eta, \omega_0 + t\eta]$$

$$= R_0 + t(d\eta + [\omega_0, \eta]) + \frac{t^2}{2}[\eta, \eta].$$

因为我们有一个单参数族联络，每个联络各有自己的协变导数，故应记之为 D_t. 注意，上式的线性项正是 $D_0\eta$，这是合法的，因为 η 是一个 1-形式！于是我们有

$$\| R_t \|^2 = \| R_0 \|^2 + 2t\langle R_0, D\eta \rangle + t^2 \text{ 项}.$$

对于临界点(设为 $t=0$)应有 $\left(\frac{d}{dt}\| R_t \|^2\right)_{t=0} = 0$，亦即

$$\langle R_0, D\eta \rangle = \langle \mathscr{D} R_0, \eta \rangle = 0.$$

η 是任意 1-形式. 所以必要条件是

$$\mathscr{D}_\omega R_\omega = 0.$$

回想到，由 Bianchi 恒等式有

$$D_\omega R_\omega = 0,$$

和第十七章一样，这两个方程等价于 Laplace 方程

$$\Delta_\omega R_\omega = 0.$$

但这里与经典情况有一个很大的差别. 经典的 Laplace 方程是线性方程，现在则因 Δ_ω 与 R_ω 都依赖于未知的 ω，Laplace 方程则成了非线性的. 虽然如此，Hodge 理论的某些结果仍可推广到这里. 例如，“调和”联络空间是有限维的，所以在这个一般的框架中仍有指标定理. 讨论这个指标定理是当前一个很活跃的研究领域. 但是，这本讲义已经长得很了，我们最好还是就此打住.

参 考 文 献

[1] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vols 1—5, Publish or Perish, Berkeley, 1979.

[2] S. S. Chern, *Complex Manifolds without Potential Theory, Appendix, Geometry of Characteristic Classes*, Springer-Verlag, 1979.